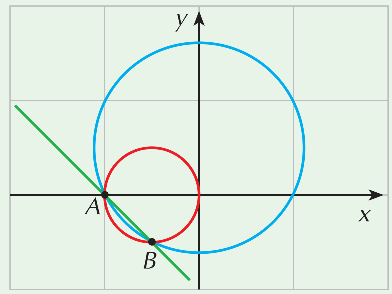
APPROFONDIMENTO

I fasci di circonferenze

Quando l'equazione di una circonferenza dipende da un parametro, essa rappresenta un fascio di circonferenze. Anche un fascio di circonferenze può avere due, uno o nessun punto base.
Consideriamo, per esempio, il fascio di circonferenze di equazione

$$x^2 + y^2 + (k+1)x + ky + k = 0$$

e intersechiamo le due circonferenze che otteniamo per $k = 0$ e per $k = -1$:



$$\begin{matrix} k = 0 \\ k = -1 \end{matrix} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + x = 0 \\ x^2 + y^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Il fascio ha due punti base: $a(-1, 0)$ e $B\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Riprendiamo il sistema precedente e sottraiamo membro a membro le due equazioni:

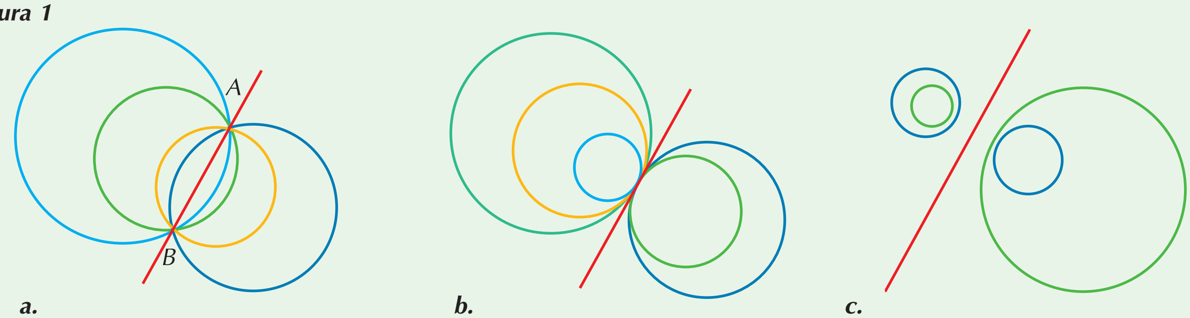
$$(x^2 + y^2 + x) - (x^2 + y^2 - y - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x + y + 1 = 0$$

Otteniamo in questo modo una retta che passa anch'essa per i punti base; tale retta prende il nome di **asse radicale**.

A seconda della posizione delle due circonferenze generatrici avremo vari tipi di fasci:

- se le due circonferenze sono secanti, il fascio ha due punti base e l'asse radicale è la retta che passa per questi due punti (***figura 1a***);
- se le due circonferenze sono tangenti, il fascio ha due punti base coincidenti (in pratica un solo punto) e l'asse radicale è la tangente comune a tutte le circonferenze (***figura 1b***);
- se le due circonferenze non si intersecano, il fascio non ha punti base e l'asse radicale non interseca le due circonferenze (***figura 1c***).

Figura 1



Esempio

Dopo aver individuato i punti base del fascio di equazione $x^2 + y^2 + (k-1)x + (k+2)y + k - 2 = 0$ troviamo la circonferenza del fascio che è tangente alla retta r di equazione $x + y + 2 = 0$.

Troviamo le equazioni di due particolari circonferenze:

$$\begin{array}{l} k=0 \\ k=2 \end{array} \quad \begin{cases} x^2+y^2-x+2y-2=0 \\ x^2+y^2+x+4y=0 \end{cases}$$

Troviamo così i punti base $A(-1, 0)$ e $B\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

Per individuare la circonferenza tangente a r calcoliamo il centro e il raggio della generica circonferenza del fascio:

$$C\left(\frac{1-k}{2}, -\frac{k+2}{2}\right) \qquad r=\frac{1}{2}\sqrt{(k-1)^2+(k+2)^2-4(k-2)}=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-2k+13}$$

Calcoliamo la distanza di C dalla retta r: $\dfrac{\left|\dfrac{1-k}{2}-\dfrac{k+2}{2}+2\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|-2k+3|}{2\sqrt{2}}$

Imponiamo che la distanza di C da r sia uguale al raggio; otteniamo così l'equazione

$$\frac{|-2k+3|}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-2k+13} \quad \text{da cui ricaviamo che} \quad k=-\frac{17}{8}$$

L'equazione della circonferenza richiesta si ottiene da quella del fascio ponendo $-\frac{17}{8}$ al posto di k; otteniamo così $8x^2+8y^2-25x-y-33=0$.

ESERCIZI

1 Del fascio di circonferenze di equazione $(1+k)x^2+(1+k)y^2-2x-4ky+2k=0$ puoi dire che:

a. ha due punti base V F

b. i centri delle circonferenze si trovano tutti sulla retta $x=1$ V F

c. ha per asse radicale la retta di equazione $x-2y+1=0$. V F

2 Dopo aver determinato i punti base del fascio di circonferenze di equazione $x^2+y^2+(k-6)x+(6-k)y+9-3k=0$ trova per quali valori di k si ottiene:

a. la circonferenza del fascio che passa per il punto $P(1, 2)$ [5]

b. la circonferenza di raggio 3 [0,6]

c. la circonferenza tangente alla retta $x+y-5=0$. [−1,7]

3 Dopo aver determinato i punti base del fascio di circonferenze di equazione $x^2+y^2+4x-y+k(x^2+y^2-2x)=0$ determina per quale valore di k si ottengono:

a. la circonferenza passante per il punto $(2, 1)$ [−12]

b. la circonferenza di raggio 1 $\left[\frac{13}{24}\right]$

c. la circonferenza con centro sull'asse y. [2]

4 Considerato il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + (k - 8)x - 4k + 16 = 0$ determina per quali valori di k si ottengono:

a. la circonferenza passante per O [4]

b. la circonferenza di centro $(6, 0)$ [−4]

c. le circonferenze tangenti alla retta $y = 4$ [8, − 8]

d. le circonferenze secanti la retta $y = 4$. [$k < -8 \ \vee \ k > 8$]

5 Considerato il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + 2(k + 1)x + (k - 1)y - k = 0$ determina per quali valori di k si ottengono:

a. la circonferenza Γ_1 avente centro sulla bisettrice del primo e terzo quadrante [−3]

b. la circonferenza passante per il centro di Γ_1 [−2]

c. le circonferenze di raggio $\sqrt{5}$ [−3; 1]

d. la circonferenza avente il centro nell'origine. [$\nexists k$]

6 Considerato il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + kx - 2y - 2 = 0$, determina il valore di k in modo che la circonferenza corrispondente:

a. abbia centro sull'asse y [0]

b. abbia centro sulla bisettrice del primo e terzo quadrante [−2]

c. abbia raggio $\sqrt{5}$ [$\pm 2\sqrt{2}$]

d. passi per il punto $(2, 2)$ [−1]

e. sia tangente all'asse x. [$\nexists k$]

7 Considerato il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + (2k - 1)x - (k + 4)y + k + 3 = 0$ determina k in modo che la circonferenza corrispondente:

a. abbia centro sull'asse x [−4]

b. abbia centro nel primo quadrante $\left[-4 < k < \frac{1}{2}\right]$

c. passi per l'origine [−3]

d. passi per il punto $(-1, -1)$ [$\nexists k$]

e. sia tangente all'asse y. [−2]