

## I sistemi simmetrici

Consideriamo il sistema di secondo grado  $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = -5 \end{cases}$

e osserviamo inizialmente che, se scambiamo le due variabili ponendo  $x$  al posto di  $y$  e viceversa, il sistema rimane lo stesso:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = -5 \end{cases} \quad \text{è la stessa cosa di} \quad \begin{cases} y + x = 4 \\ yx = -5 \end{cases}$$

perché l'addizione e la moltiplicazione sono operazioni commutative.

Risolviamo il sistema con il metodo di sostituzione ricavando l'espressione di  $x$  dalla prima equazione:

$$\begin{cases} x = 4 - y \\ y(4 - y) = -5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 - y \\ y^2 - 4y - 5 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$$

Osserviamo che anche nelle soluzioni  $x$  e  $y$  si scambiano i valori.

Un sistema che presenta queste caratteristiche si dice **simmetrico**.

Si dice **simmetrico** un sistema di due equazioni nelle due incognite  $x$  e  $y$  che rimane invariato se  $x$  si scambia con  $y$ .

Se un sistema simmetrico ammette come soluzione la coppia  $(a, b)$ , allora ammette anche la coppia  $(b, a)$ .

Un sistema simmetrico di secondo grado è sempre riconducibile alla forma

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$$

dove  $s$  e  $p$  sono numeri reali.

Questo sistema è il modello algebrico di un problema che abbiamo già affrontato nel paragrafo 2 di questo capitolo: trovare due numeri  $x$  e  $y$  conoscendo la loro somma  $s$  ed il loro prodotto  $p$ .

Oltre al metodo di sostituzione, per risolvere un sistema simmetrico possiamo allora anche ricondurci alla determinazione delle radici dell'equazione di secondo grado

$$t^2 - st + p = 0$$

Le soluzioni di questa equazione, chiamiamole  $t_1$  e  $t_2$ , accoppiate nei due modi possibili, sono anche le soluzioni del sistema; si ha cioè che il sistema è verificato dalle coppie:

$$\begin{cases} x = t_1 \\ y = t_2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = t_2 \\ y = t_1 \end{cases}$$

Risolviamo, ad esempio, il sistema  $\begin{cases} x + y = 14 \\ xy = 45 \end{cases}$

Risolviamo l'equazione ausiliaria  $t^2 - 14t + 45 = 0$ .

Le soluzioni sono  $t = 9 \vee t = 5$ .

*Le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$$

*sono le coppie  $(t_1, t_2)$  e  $(t_2, t_1)$  che sono le radici dell'equazione*

$$t^2 - st + p = 0$$

Le soluzioni del sistema sono  $\begin{cases} x = 9 \\ y = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$

Quindi:  $S = \{(9, 5); (5, 9)\}$ .

## ESERCIZI

---

**1**  $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -15 \end{cases}$

$$[S = \{(3, -5); (-5, 3)\}]$$

**2**  $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -4 \end{cases}$

$$[S = \{(-1, 4); (4, -1)\}]$$

**3**  $\begin{cases} x + y = -5 \\ xy = -6 \end{cases}$

$$[S = \{(1, -6); (-6, 1)\}]$$

**4**  $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ xy = 6 \end{cases}$

$$[S = \{(2, 3); (3, 2)\}]$$

**5**  $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -\frac{3}{4} \end{cases}$

$$[S = \left\{ \left( \frac{1}{2}; -\frac{3}{2} \right); \left( -\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right) \right\}]$$

**6**  $\begin{cases} x + y = \frac{4}{3} \\ 3xy = -4 \end{cases}$

$$[S = \left\{ \left( -\frac{2}{3}; 2 \right); \left( 2; -\frac{2}{3} \right) \right\}]$$

**7**  $\begin{cases} x + y + 1 = -1 \\ x(y + x) = -35 + x^2 \end{cases}$

$$[S = \{(-7, 5); (5, -7)\}]$$

**8**  $\begin{cases} (x + y)^2 = x^2 - 64 + y^2 \\ 3x + y = 2(x + 2) \end{cases}$

$$[S = \{(-4, 8); (8, -4)\}]$$