Il valore di π

Consideriamo un poligono di n lati inscritto in una circonferenza di raggio unitario e, per comodità, consideriamo un poligono regolare. Al crescere del numero dei lati, i perimetri di questi poligoni approssimano sempre meglio la lunghezza della circonferenza (***figura 1***). Possiamo allora pensare di costruire una serie di poligoni regolari raddoppiando ogni volta il numero dei lati; per esempio, se come primo poligono consideriamo l'esagono regolare, quello successivo sarà il poligono di 12 lati, quello successivo ancora avrà 24 lati e così via.

Cerchiamo adesso di stabilire una relazione fra il lato del poligono di n lati e quello di $2n$ lati. Sia AB il lato del poligono regolare inscritto di n lati (***figura 2***); per ottenere il lato del poligono di $2n$ lati basta prendere il punto medio C dell'arco AB: il lato di questo secondo poligono è AC. Se indichiamo con ℓ_n la lunghezza di AB, abbiamo che:

Figura 1

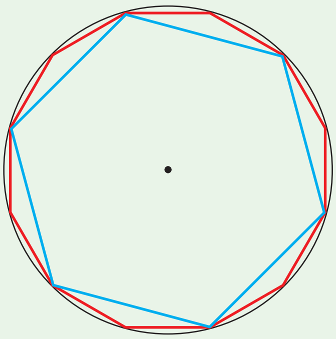
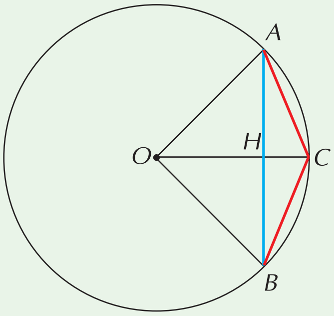


Figura 2



- $\overline{AH} = \frac{1}{2}\ell_n$
- $\overline{OH} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}\ell_n^2}$

  per il teorema di Pitagora applicato al triangolo OHA (il raggio della circonferenza è unitario)
- $\overline{HC} = \overline{OC} - \overline{OH} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}\ell_n^2}$
- $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HC}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\ell_n^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}\ell_n^2}\right)^2}$

  per il teorema di Pitagora applicato al triangolo AHC

Svolgendo i calcoli in modo opportuno su quest'ultima espressione, troviamo che $\overline{AC} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}}$

Dunque, se adesso indichiamo con ℓ_{2n} la lunghezza di AC, cioè del lato del poligono inscritto di $2n$ lati, abbiamo che

$$\ell_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}}$$

che è la relazione che stavamo cercando.

Per esempio, se $n = 6$, ℓ_n è il lato dell'esagono regolare inscritto e si ha che $\ell_6 = r = 1$; allora

$$\ell_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 0{,}51763809$$

Conoscendo adesso la misura di ℓ_{12} possiamo trovare quella di ℓ_{24}

$$\ell_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 0{,}51763809^2}} \approx 0{,}261052384$$

e così via.

Il perimetro del poligono di $2n$ lati si ottiene moltiplicando per $2n$ la lunghezza del lato; possiamo quindi dire che

$$\text{perimetro} = 2n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}}$$

Al tendere di n all'infinito, il perimetro di questi poligoni tende alla lunghezza della circonferenza, cioè, considerando che abbiamo posto $r = 1$, a 2π. Questo vuol dire che il semiperimetro, che indichiamo con P_{2n} tende a π.

La successione dei semiperimetri dei poligoni inscritti in una circonferenza di raggio unitario può essere definita per ricorrenza a partire per esempio dal semiperimetro P_6 dell'esagono in questo modo:

$$\begin{cases} P_6 = 3 \\ P_{2n} = n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}} \end{cases}$$

I termini di questa successione si possono generare in modo semplice con un foglio di Excel; alcuni di essi sono riportati nella tabella che segue.

n. lati	6	12	24	48	96	192	384
p	3	3,105828541	3,132628613	3,139350203	3,141031951	3,141452472	3,141557608

I valori ottenuti sono tutti valori approssimati per difetto di π e si nota subito che, già alla quinta iterazione, si ottengono tre cifre decimali stabili, con la quarta cifra ancora incerta.