LA DIVISIBILITÀ

MULTIPLI E DIVISORI DI UN NUMERO

richiami della teoria

- I **multipli** di un numero sono costituiti dall'insieme dei prodotti ottenuti moltiplicando quel numero per la successione dei numeri naturali;
- se un numero diviso per un altro numero dà per resto 0, allora il secondo numero è un **divisore** del primo e il primo è divisibile per il secondo;
- per trovare i divisori di un numero, si può dividerlo per la successione decrescente dei numeri naturali a partire dal numero stesso fino a 1. I quozienti esatti ($r = 0$) rappresentano i divisori del numero.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

1 Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
a. i multipli di un numero sono infiniti; V F
b. il 5 non è multiplo di 5; V F
c. i multipli di 2 costituiscono l'insieme dei numeri pari. V F

APPLICAZIONE

2 *Esercizio Svolto*

Scrivi i primi sei multipli del numero 5.

I primi sei multipli di 5 (escluso lo zero) sono dati dai seguenti prodotti:
$1 \cdot 5 = 5$; $2 \cdot 5 = 10$; $3 \cdot 5 = 15$; $4 \cdot 5 = 20$; $5 \cdot 5 = 25$; $6 \cdot 5 = 30$.

3 Determina i primi cinque multipli del numero 3.

4 Determina i primi otto multipli del numero 12.

5 Determina i multipli di 4 maggiori di 20 e minori di 40.

6 Scrivi i primi cinque multipli del numero 14.

7 Scrivi i primi sei multipli di 6 e i primi sei multipli di 11.

8 Sottolinea in ciascuna delle seguenti coppie il numero multiplo dell'altro:
a. (18; 54); **b.** (120; 30); **c.** (25; 5); **d.** (84; 12).

9 Sottolinea in ciascuna delle seguenti terne i multipli dello stesso numero:
a. (16; 48; 32); **b.** (360; 120; 240); **c.** (168; 192; 24).

10 *Esercizio Svolto*

Scrivi la successione dei multipli di 9 compresi tra 15 e 60.

I multipli di 9 sono:

$9 \cdot 1 = 9$; $9 \cdot 2 = 18$; $9 \cdot 3 = 27$; $9 \cdot 4 = 36$; $9 \cdot 5 = 45$; $9 \cdot 6 = 54$; $9 \cdot 7 = 63$; ....

I multipli di 9 compresi tra 15 e 60 sono quindi: 18; 27; 36; 45; 54.

11 Determina i multipli del numero 7 compresi tra 30 e 70.

12 *Esercizio Guidato*

Trova i divisori del numero 12.

$12 : 1 = 12$ con ....; $12 : 2 = 6$ con ....; $12 : 3 = 4$ con ....;

$12 : 4 = 3$ con ....; $12 : 5 = 2$ con ....; $12 : 6 = 2$ con ....;

$12 : 7 = 1$ con ....; $12 : 8 = 1$ con ....; $12 : 9 = 1$ con ....;

$12 : 10 = 1$ con ....; $12 : 11 = 1$ con ....; $12 : 12 = 1$ con ....

Solo i numeri le cui divisioni danno come resto .... sono i .... cercati, pertanto $D_{12} = \{$...$\}$.

13 Trova i divisori del numero 8.

14 Determina i divisori di 6.

15 Determina i divisori di 9.

16 Determina i divisori di 15.

● **17** Un numero si dice perfetto se è uguale alla somma dei suoi divisori tranne il numero stesso. Per esempio 6 è un numero perfetto poiché: $6 = 1 + 2 + 3$.
Alla luce di questo esempio individua tra i seguenti numeri quelli perfetti:
16; 28; 40; 102; 496; 8 128.

I criteri di divisibilità

richiami della teoria

- Un numero **divisibile per 2** ha l'ultima cifra pari;
- un numero **divisibile per 5** termina con zero o con 5;
- un numero **divisibile per 3** (o per 9) ha la somma delle sue cifre divisibile per 3 (o per 9);
- un numero **divisibile per 11** ha la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e quella di posto pari 0 o un multiplo di 11;
- un numero **divisibile per 10, 100, 1000** termina rispettivamente con uno, due tre zeri;
- un numero **divisibile per 4 e per 25** ha le ultime due cifre che formano un numero multiplo di 4 o di 25 oppure sono due zeri.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

18 Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

a. un numero divisibile per 2 o per 3 è sempre divisibile per 6; V F
b. tutti i numeri divisibili per 2 sono anche divisibili per 4; V F
c. se un numero è divisibile per 3 e per 4 è anche divisibile per 6; V F
d. se un numero è divisibile per 2 e per 5 è anche divisibile per 10; V F
e. tutti i multipli di 15 sono divisibili sia per 3 che per 5; V F
f. tutti i multipli di 12 sono divisibili sia per 3 che per 4. V F

APPLICAZIONE

19 Scrivi quattro numeri divisibili:
a. per 2 e minori di 20; **b.** per 3 e superiori a 10; **c.** per 5, minori di 27 e maggiori di 6.

20 Scrivi quattro numeri divisibili:
a. per 2 e non per 3; **b.** per 3 e non per 2; **c.** contemporaneamente per 2 e per 3.

21 Scrivi quattro numeri divisibili:
a. per 3 e non per 5; **b.** per 5 e non per 3; **c.** contemporaneamente per 3 e per 5.

22 Scrivi quattro numeri divisibili:
a. per 4 e non per 5; **b.** per 5 e non per 4; **c.** contemporaneamente per 4 e per 5.

23 Verifica, applicando il relativo criterio di divisibilità, quali dei seguenti numeri sono divisibili per 4:
a. 256; **b.** 344; **c.** 442; **d.** 482; **e.** 872.

24 Individua fra i seguenti numeri quelli divisibili per 2, quelli divisibili per 3 e quelli divisibili contemporaneamente per 2 e per 3:
16; 21; 36; 42; 63; 70; 78; 96.

25 Individua fra i seguenti numeri quelli divisibili per 3, quelli divisibili per 5 e quelli divisibili contemporaneamente per 3 e per 5:
33; 40; 45; 51; 60; 80; 105; 165.

26 Individua fra i seguenti numeri quelli divisibili solo per 4, quelli divisibili solo per 5 e quelli divisibili contemporaneamente per 4 e per 5:
24; 30; 52; 60; 75; 80; 112; 140.

27 Individua fra i seguenti numeri quelli divisibili per 11:
88; 111; 132; 198; 311; 418; 591; 1012.

28 Individua tra i seguenti numeri quelli divisibili contemporaneamente per 2, 3 e 5:
20; 30; 45; 120; 100; 270; 330; 440.

29 Individua tra i seguenti numeri quelli divisibili contemporaneamente per 3, 5 e 7:
105; 125; 165; 420; 1 155; 1 575.

30 Individua tra i seguenti numeri quelli divisibili contemporaneamente per 2, 3, 5 e 11:
770; 1 040; 1 320; 2 310; 2 970.

31 Dopo aver scritto i primi venti numeri divisibili per 3, individua quelli divisibili anche per 5.

32 Dopo aver scritto i primi venti numeri divisibili per 2, individua quelli divisibili anche per 5.

33 Cambia la posizione delle cifre dei numeri seguenti in modo tale da renderli divisibili per 2.
a. 387; **b.** 491; **c.** 589; **d.** 821; **e.** 497.

34 Cambia la posizione delle cifre dei numeri seguenti in modo tale da renderli divisibili per 5.
a. 107; **b.** 529; **c.** 603; **d.** 258; **e.** 603.

35 Cambia la posizione delle cifre dei numeri seguenti in modo tale da renderli divisibili per 11.
a. 257; **b.** 981; **c.** 437; **d.** 835; **e.** 593.

NUMERI PRIMI E NUMERI COMPOSTI

richiami della teoria

- Un numero **primo** è divisibile solo per 1 e per se stesso;
- un numero **composto** è divisibile non solo per 1 e per se stesso, ma anche per qualche altro numero.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

36 Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

a. il prodotto di due numeri primi è ancora un numero primo; V F
b. tutti i numeri primi sono dispari; V F
c. i numeri primi, ad eccezione del numero 2, sono tutti dispari; V F
d. ogni numero primo, ad eccezione dell'uno, ha due divisori; V F
e. i numeri primi sono sempre minori di mille. V F

37 Rispondi alle seguenti domande.

a. Qual è il più piccolo numero primo composto da due cifre?
b. Qual è il più grande numero primo composto da due cifre?
c. Qual è il più piccolo numero non primo diverso da 1?
d. Qual è il più grande numero non primo composto da due cifre?

APPLICAZIONE

38 Indica, sottolineandoli, quali fra i seguenti numeri sono primi:
2; 4; 5; 8; 12; 13; 15; 17; 19; 21; 27; 31.

39 Individua i primi cinque numeri primi.

40 Indica, sottolineandoli, quali fra i seguenti numeri sono composti:
3; 6; 7; 9; 10; 11; 14; 16; 18; 20; 22; 23.

41 Individua i numeri composti compresi tra 1 e 19.

42 Scrivi due numeri non primi ma primi tra loro.

43 Scrivi i numeri primi minori di 100 che terminano con la cifra 3.

44 Scrivi cinque coppie di numeri primi la cui differenza non sia un numero primo.

45 Individua almeno una coppia di numeri primi (escluso il numero 1):

a. minori di 15 la cui somma è 31;
b. minori di 30 la cui differenza è 24;
c. compresi tra 30 e 40;
d. minori di 40 la cui differenza è 10.

46 Scrivi i numeri 40 e 60 come somme di numeri primi.

47 Se moltiplichiamo qualunque numero primo per tutti i numeri primi minori di quello dato e poi aggiungiamo il numero 1 al risultato ottenuto, il numero ricavato è ancora un numero primo. Ad esempio, se consideriamo il numero 11, otteniamo: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$ che è ancora un numero primo.
Verifica tale proprietà con i seguenti numeri primi: 13; 17; 19.

LA SCOMPOSIZIONE IN FATTORI PRIMI

richiami della teoria

- I **fattori primi** sono i numeri primi che, moltiplicati tra di loro, danno il numero in esame;
- la **scomposizione in fattori primi** o **fattorizzazione** è l'operazione che ci permette di scrivere un numero composto come prodotto di fattori primi;
- per **scomporre un numero in fattori primi** si eseguono le divisioni successive tra il numero stesso e i suoi divisori primi fino ad ottenere come quoziente il numero 1; i divisori primi che compaiono più di una volta si scrivono sotto forma di potenza.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

48 Associa ad ogni numero la corretta scomposizione in fattori primi:

a. 16 → ① $2^2 \cdot 3$; ② $2 \cdot 8$; ③ 2^4;
b. 24 → ① $2 \cdot 12$; ② $2^3 \cdot 3$; ③ $6 \cdot 4$;
c. 50 → ① $2 \cdot 25$; ② $2 \cdot 5^2$; ③ $5 \cdot 10$.

49 Sottolinea per ogni scomposizione il corrispondente numero composto:

a. $5^2 \cdot 3$ → ① 15; ② 30; ③ 75;
b. $2 \cdot 3^2$ → ① 6; ② 12; ③ 18;
c. $2^4 \cdot 5$ → ① 40; ② 80; ③ 1000.

APPLICAZIONE

Scomponi in fattori primi i seguenti numeri utilizzando il metodo della fattorizzazione.

50 *Esercizio Svolto*

a. 24; **b.** 30; **c.** 36.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$24 = 2^3 \cdot 3$ $\qquad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $\qquad 36 = 2^2 \cdot 3^2$

51 **a.** 18; **b.** 40; **c.** 96.

52 **a.** 108; **b.** 215; **c.** 363.

53 **a.** 468; **b.** 700; **c.** 1100.

54 Scomponi i seguenti numeri in fattori primi utilizzando il metodo dei diagrammi ad albero:
a. 120; **b.** 162; **c.** 432.

Il criterio generale di divisibilità

richiami della teoria

- Due numeri sono divisibili tra loro se ciascun fattore del numero divisore è presente nella scomposizione del numero dividendo con esponente minore o uguale a quello del fattore corrispondente;
- il quoziente di due numeri divisibili fra loro si ottiene moltiplicando tutti i fattori del dividendo aventi per esponente la differenza degli esponenti con cui compaiono nei due termini della divisione.

APPLICAZIONE

55 Utilizzando il criterio generale di divisibilità verifica se le seguenti coppie di numeri sono divisibili fra loro e in caso affermativo, calcola il quoziente:

a. (400; 25); **b.** (216; 12); **c.** (384; 18).

IL MASSIMO COMUNE DIVISORE (M.C.D.) E IL MINIMO COMUNE MULTIPLO (m.c.m.)

richiami della teoria

- Il **M.C.D.** di due o più numeri è il maggiore tra i divisori comuni ai numeri dati;
- se due o più numeri sono tali che il minore di essi è divisore di ciascuno degli altri, quest'ultimo è il M.C.D. dei numeri dati;
- due o più numeri sono **primi tra loro** se hanno 1 come M.C.D.;
- per calcolare il M.C.D. di due o più numeri, con il metodo della scomposizione in fattori primi, si scompongono i numeri dati in fattori primi, poi si moltiplicano tra di loro tutti i fattori comuni, presi ciascuno una sola volta e con l'esponente minore;
- il **m.c.m.** di due o più numeri è il minore tra i multipli comuni ai numeri stessi;
- se due o più numeri sono tali che il maggiore di essi è multiplo di ciascuno degli altri, quest'ultimo è il m.c.m. dei numeri dati;
- per calcolare il m.c.m. di due o più numeri, con il metodo della scomposizione in fattori primi, si scompongono i numeri dati in fattori primi, poi si moltiplicano tra di loro tutti i fattori comuni e non comuni, presi ciascuno una sola volta e con l'esponente maggiore.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

56 Indica quale delle seguenti affermazioni è quella corretta:
a. dati due o più numeri non sempre esiste il loro M.C.D.;
b. due o più numeri si dicono primi tra di loro se hanno 2 come M.C.D.;
c. se due o più numeri sono tali che il minore di essi è divisore di ciascuno degli altri, quest'ultimo numero è il M.C.D. dei numeri dati.

57 Indica quale delle seguenti affermazioni è quella corretta:
a. se due o più numeri sono tali che il minore di essi è multiplo di ciascuno degli altri, quest'ultimo numero è il m.c.m. dei numeri dati;
b. se due numeri sono primi tra loro il m.c.m. è il loro prodotto;
c. è la stessa cosa dire che due numeri sono primi e che sono primi tra loro.

58 Rispondi alle seguenti domande:
a. qual è il M.C.D. di due numeri uguali?
b. Qual è il M.C.D. di due numeri uno multiplo dell'altro?
c. Qual è il m.c.m. di due numeri uguali?
d. Qual è il m.c.m. di due numeri uno multiplo dell'altro?

59 Rispondi alle seguenti domande:
a. qual è il M.C.D. di due numeri primi?
b. Qual è il m.c.m. di due numeri primi?
c. Sapendo che il M.C.D. tra 12 e 16 è 4, quanto vale il M.C.D. tra 1200 e 1600?
d. Sapendo che il m.c.m. tra 20, 24 e 30 è 120 quanto vale il m.c.m. tra 40, 48 e 60?

APPLICAZIONE

Calcola il M.C.D. di ciascuna coppia di numeri mediante la scomposizione in fattori primi.

60 *Esercizio Svolto*

(14, 20).

$$\begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$14 = 2 \cdot 7$ $\qquad 20 = 2^2 \cdot 5$

Pertanto M.C.D. $(14, 20) = 2$.

61 **a.** (12, 10); **b.** (14, 18); **c.** (40, 50). [2; 2; 10]

62 **a.** (64, 80); **b.** (450, 810); **c.** (384, 378). [16; 90; 6]

63 **a.** (75, 225); **b.** (510, 450); **c.** (1080, 495). [75; 30; 45]

64 **a.** (48, 60); **b.** (28, 30); **c.** (160, 216). [12; 2; 8]

65 **a.** (88, 242); **b.** (104, 117); **c.** (308, 448). [22; 13; 28]

66 **a.** (135, 75); **b.** (220, 726); **c.** (1080, 270). [15; 22; 270]

Calcola il m.c.m. di ciascuna coppia di numeri mediante la scomposizione in fattori primi.

67 *Esercizio Svolto*

(24, 36).

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$24 = 2^3 \cdot 3$ $\qquad 36 = 2^2 \cdot 3^2$

Pertanto m.c.m. $(24, 36) = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$.

68 **a.** (10, 15); **b.** (24, 18); **c.** (20, 50). [30; 72; 100]

69 **a.** (75, 90); **b.** (64, 24); **c.** (250, 32). [450; 192; 4000]

70 **a.** (108, 36); **b.** (68, 40); **c.** (126, 96). [108; 680; 2016]

71 **a.** (15, 12, 60); **b.** (18, 30, 40); **c.** (150, 260, 300). [60; 360; 3900]

● **72** **a.** (25, 10, 40); **b.** (33, 44, 65); **c.** (18, 24, 50). [200; 8580; 1800]

● **73** **a.** (9, 36, 40); **b.** (27, 51, 108); **c.** (85, 91, 34). [360; 1836; 15470]

74 Determina due coppie di numeri il cui M.C.D. sia 6.

75 Determina due coppie di numeri il cui m.c.m. sia 200.

76 Determina i multipli comuni di 12 e 18 minori di 200.

77 Tra i multipli comuni ai numeri 8 e 18, alcuni sono quadrati perfetti. Tra questi, determina il minore.

78 Verifica, con alcuni esempi, che se due numeri hanno come divisore comune l'unità, anche i loro quadrati, i loro cubi e qualunque altra potenza, mantengono la stessa proprietà.

● **79** Calcola il M.C.D. dei seguenti gruppi di numeri con il metodo delle divisioni successive:
a. (126, 50); **b.** (252, 90). [2; 18]

● **80** Calcola mediante fattorizzazione il M.C.D. e il m.c.m. delle seguenti terne di numeri:
a. (1260, 600, 1050); **b.** (594, 4400, 4725). [30, 12600; 1, 831600]

I PROBLEMI DI CALCOLO DI M.C.D. E m.c.m.

APPLICAZIONE

Risolvi i seguenti problemi che presentano nello svolgimento il calcolo del M.C.D. e del m.c.m.

81 In un sacchetto sono contenute delle biglie; si sa che raggruppandole per tre non resta alcuna biglia, mentre raggruppandole per 5 ne restano 4. Quante biglie sono contenute nel sacchetto sapendo che sono più di 10 e meno di 25? [24]

82 Nell'astuccio di Andrea sono contenuti tra i 30 e i 40 pastelli. Calcola quanti sono i pastelli sapendo che il loro numero è divisibile per 5, mentre diviso per 3 si ottiene per resto 2. [35]

83 Una squadra di calcio è formata al massimo da 30 calciatori. Calcola il loro numero sapendo che contandoli 3 alla volta o 4 alla volta ne avanzano sempre 2. [due soluzioni: 14 oppure 26]

84 Tre fili di lana sono lunghi rispettivamente 6 m, 12 m e 15 m. Da questi si vogliono ottenere dei gomitoli tutti della stessa lunghezza e senza avanzi. Quanto sarà lungo ciascun gomitolo? [3 m]

85 Per raggiungere le piste di una località turistica sono disponibili una funivia e uno skilift. La funivia parte ogni 5 minuti e lo skilift ogni 4 minuti. Se partono insieme all'apertura delle piste, dopo quanto tempo ripartiranno di nuovo insieme? [20 minuti]

86 Dei quattro fornitori di un ristorante il primo passa ogni 2 giorni, il secondo ogni 3 giorni, il terzo ogni 4 e il quarto ogni 5. Se oggi si incontrano tutti insieme dopo quanti giorni si incontreranno di nuovo? [60 giorni]

87 Paolo ha in tasca un certo numero di monete da € 1 per un valore complessivo inferiore a € 50. Se le conta per 5 ne rimangono 4 se le conta per 11 non ne rimane alcuna. Quante monete ha Paolo? [44]

88 Nel garage di un condominio sono parcheggiate numerose autovetture. Sapendo che il loro numero è compreso tra 50 e 60, che è un multiplo di 5 e che diviso per 4 dà come resto 3, calcola il numero complessivo delle autovetture. [55]

89 Un sacchetto contiene meno di 50 caramelle e più di 35. Se le inserisco in 4 sacchetti me ne avanza 1, se invece le inserisco in 5 sacchetti non avanza alcuna caramella. Quante sono complessivamente le caramelle? [45]

90 Tre amici per fare una corsa si recano presso il parco comunale e, per compiere un giro completo impiegano rispettivamente 8, 10 e 20 minuti. Se partono contemporaneamente dallo stesso punto, dopo quanto tempo si incontreranno nuovamente? [40 minuti]

91 La direzione di una ditta decide di riunire ogni 45 giorni il consiglio di amministrazione, ogni 30 i responsabili di produzione e ogni 20 giorni i rappresentanti. Se oggi si sono tenute contemporaneamente le tre riunioni fra quanto tempo si riuniranno di nuovo nello stesso giorno? [180 giorni]

● **92** La centrale del latte di una città deposita il latte raccolto in tre cisterne aventi rispettivamente la capacità di 8 000, 5 500 e 6 250 litri. Per la commercializzazione all'ingrosso si vogliono riempire dei contenitori tutti con la stessa capienza travasando il contenuto delle tre cisterne in modo da non avere avanzi di latte. Quale sarà la capienza massima dei contenitori? [250 litri]

● **93** Sappiamo che è possibile ottenere il m.c.m. tra due numeri moltiplicando tra loro i due numeri e dividendo il prodotto ottenuto per il M.C.D. dei numeri stessi. Alla luce di questa proprietà calcola il m.c.m. dei seguenti numeri:
a. 36 e 40; **b.** 24 e 50; **c.** 60 e 100. [360, 600, 300]

94 Se fra due o più numeri naturali il minore di essi è divisore degli altri, esso è il M.C.D. dei numeri dati; se il più grande dei numeri assegnati è multiplo di tutti gli altri, allora esso è il m.c.m. di quelli assegnati. Determina in quali dei seguenti casi è possibile applicare le considerazioni precedenti per calcolare il M.C.D. o il m.c.m.:

a. 50, 25, 250, 125; **b.** 6, 36, 18, 72; **c.** 17, 34, 68, 7; **d.** 15, 25, 30, 50.

[**a**., **b**.]

95 Una biblioteca universitaria è organizzata mediante delle postazioni per lo studio individuale. Ogni 10 aree di studio è presente un interruttore per la corrente, ogni 6 una presa per la corrente e ogni 9 un pulsante per le chiamate d'emergenza. Calcola ogni quante postazioni si troveranno contemporaneamente interruttore, presa e pulsante. [90]

96 I genitori di Matteo possiedono una collezione di CD con 76 brani jazz, 156 pop e 96 rock. Da tale raccolta vogliono ricavare una serie di CD in modo che ogni CD abbia lo stesso numero di pezzi sia in totale che per categoria e che questi siano il più elevato possibile. Quante tracce deve contenere ogni CD? [12 di cui 4 per ogni categoria]

97 Due sposi, rispettivamente di 40 e 38 anni, hanno due figli le cui età hanno per M.C.D. la differenza tra le età dei genitori e per m.c.m. l'età del padre che è più vecchio della madre. Qual è l'età dei due figli? [8, 10]