APPROFONDIMENTO

Una dimostrazione per assurdo del secondo criterio

Premessa alla dimostrazione.

La dimostrazione dei teoremi che abbiamo enunciato finora è stata condotta in modo diretto, partendo dalle ipotesi e ragionando sugli assiomi e su proprietà già messe in evidenza; ma questo non è il solo modo di condurre una dimostrazione. Quella che stiamo per eseguire è una **dimostrazione per assurdo** che si conduce in questo modo:

- si nega la tesi del teorema assumendo che sia falsa;
- dalla falsità della tesi si deducono alcune affermazioni le quali, ad un certo punto, entrano in contrasto con le ipotesi del teorema, con una proprietà nota o con uno degli assiomi affermandone la falsità;
- poiché le ipotesi, le proprietà e gli assiomi sono affermazioni assolutamente vere, il presupposto errato può solo essere quello iniziale nel quale si è dichiarato che la tesi è falsa;
- se la tesi non può essere falsa, allora deve essere vera.

Veniamo adesso alla dimostrazione del secondo criterio che condurremo per assurdo.

Dimostrazione.

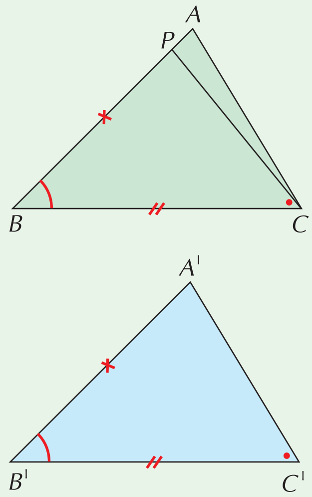
Negazione della tesi.

Supponiamo che i triangoli ABC e $A'B'C'$ non siano congruenti.

Affermazioni che si possono dedurre.

Se i triangoli non sono congruenti (***figura 1***), anche i loro lati non sono tutti a due a due congruenti e, per esempio, può essere che sia $AB > A'B'$.
In questo caso, deve esistere un punto P su AB in modo che sia $BP \cong B'A'$.

Figura 1



Il triangolo PBC e il triangolo $A'B'C'$ hanno dunque:

- $BC \cong B'C'$ per ipotesi
- $\widehat{PBC} \cong \widehat{A'B'C'}$ per ipotesi
- $BP \cong B'A'$ per costruzione

Per il primo criterio di congruenza si ha quindi che $\overset{\triangle}{PBC} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'}$ e, in particolare, $\widehat{PCB} \cong \widehat{A'C'B'}$.

Poiché $\widehat{PCB} \cong \widehat{A'C'B'}$ e $\widehat{A'C'B'} \cong \widehat{ACB}$ (per ipotesi), allora per la proprietà transitiva $\widehat{PCB} \cong \widehat{ACB}$.

Affermazione contraddittoria.

L'affermazione $\widehat{PCB} \cong \widehat{ACB}$ è in contrasto con la costruzione fatta in quanto, essendo P un punto interno all'angolo $\widehat{ACB}$, si verifica che $\widehat{PCB} < \widehat{ACB}$.

Presupposto errato.

Poiché il ragionamento è stato condotto in modo corretto, la sola affermazione errata è quella iniziale nella quale si era dichiarata la non congruenza dei due triangoli ABC e $A'B'C'$.

Conclusione.

I triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti.