CAPITOLO 1 Sistemi di riferimento e curve

Obiettivi

- scrivere l'equazione di una curva in forma parametrica
- scrivere l'equazione di una curva in coordinate polari
- utilizzare coordinate logaritmiche e semilogaritmiche

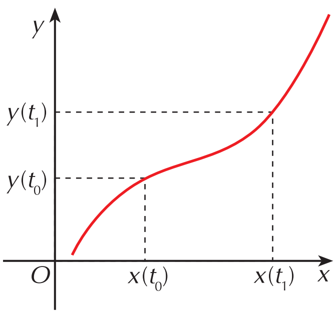
1. Le equazioni parametriche di una curva

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 12

Immaginiamo un punto che si muove in un sistema di riferimento cartesiano; la sua posizione è individuata, istante dopo istante, da una coppia di coordinate (x, y) ciascuna delle quali dipende dal tempo t.

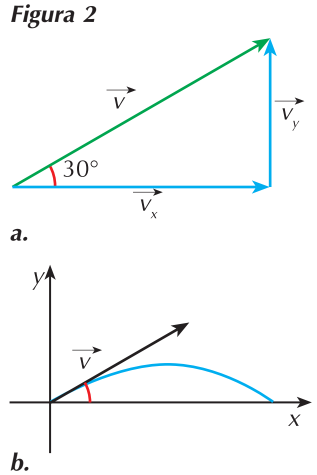
Per esempio, se il punto P si muove lungo la linea rappresentata in ***figura 1***, all'istante t_0 l'ascissa di P è $x_0 = x(t_0)$ e la sua ordinata è $y_0 = y(t_0)$; all'istante t_1 l'ascissa P è $x_1 = x(t_1)$ e la sua ordinata è $y_1 = y(t_1)$, e così via. In casi come questo l'ascissa e l'ordinata di un punto che appartiene a una curva sono date in funzione di un parametro t.

Figura 1



Il moto di una pallina che viene lanciata con una certa velocità è un esempio di un moto di questo tipo; se la velocità di lancio è di $4m/s$ ed ha un'inclinazione di $30°$ rispetto alla linea orizzontale (***figura 2a***), il moto lungo l'asse x è rettilineo uniforme con velocità $v_x = 2\sqrt{3}$m/s, quello lungo l'asse y è uniformemente accelerato con accelerazione $g = 9{,}8$m/s^2 e velocità iniziale $v_y = 2$m/s.

Figura 2



Se il sistema di riferimento è fissato come in ***figura 2b***:

- il moto in orizzontale è descritto dalla legge

  $x = v_x \cdot t \qquad \text{cioè} \qquad x = 2\sqrt{3}t$

- il moto in verticale è descritto dalla legge

  $y = v_y \cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2 \qquad \text{cioè} \qquad y = 2t - 4{,}9t^2$

La posizione del punto P nel piano dove avviene il moto è quindi descritta da entrambe le equazioni contemporaneamente, cioè dal sistema:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{3}t \\ y = 2t - 4{,}9t^2 \end{cases}$$

Molti fenomeni, per essere descritti in modo completo, hanno bisogno di una rappresentazione algebrica di questo tipo nel quale le coordinate di un punto dipendono entrambe da uno stesso parametro. In generale, possiamo dire che:

fissato un sistema di riferimento cartesiano, l'equazione di una curva si può esprimere in forma parametrica mediante il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

dove le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ esprimono le coordinate di un punto P della curva in funzione di t.

Vediamo come si possono esprimere in forma parametrica le equazioni dei principali luoghi di punti.

Le equazioni parametriche di una retta

Sappiamo che l'equazione di una retta che passa per due punti assegnati di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) ha la forma

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

che, se poniamo $x_2 - x_1 = \ell$ e $y_2 - y_1 = p$, possiamo scrivere in questo modo

$$\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{p}$$

Se ora indichiamo con t il valore comune delle due espressioni, se poniamo cioè $\frac{x - x_1}{\ell} = t$ e $\frac{y - y_1}{p} = t$, otteniamo le equazioni parametriche della retta.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \ell t + x_1} \\ \boldsymbol{y = pt + y_1} \end{cases}$$

Per esempio, la retta che passa per i punti $A(1, -2)$ e $B(-3, 0)$, ha equazione:

- considerando A come primo punto e B come secondo

  $\ell = x_2 - x_1 = -3 - 1 = -4 \qquad p = y_2 - y_1 = 0 + 2 = 2 \qquad \begin{cases} x = -4t + 1 \\ y = 2t - 2 \end{cases}$

- considerando B come primo punto e A come secondo

  $\ell = 1 + 3 = 4 \qquad p = -2 - 0 = -2 \qquad \begin{cases} x = 4t - 3 \\ y = -2t \end{cases}$

Le equazioni parametriche di una retta non sono definite in modo unico perché basta prendere i punti in ordine inverso oppure scegliere altri due punti della retta per ottenere equazioni diverse.

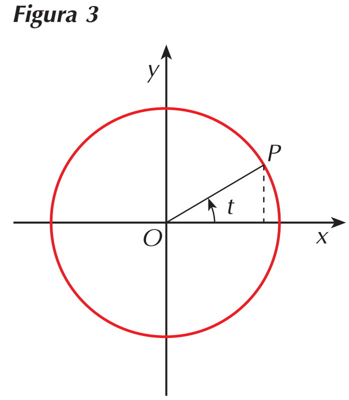
Le equazioni parametriche di una conica

La circonferenza

Consideriamo la circonferenza di raggio r avente centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali (***figura 3***). Le coordinate di un punto P della circonferenza, indicando con t l'angolo orientato che la semiretta OP forma con il semiasse positivo delle ascisse, sono date dalle relazioni

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \qquad \text{con} \quad t \in [0, 2\pi)$$

Figura 3



Queste dunque sono le equazioni parametriche di una circonferenza avente centro nell'origine; se il centro è un punto di coordinate (a, b), basta applicare alle precedenti equazioni la traslazione di vettore $\vec{v}(a,\ b)$ ottenendo

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = a + r \cos t} \\ \boldsymbol{y = b + r \sin t} \end{cases}$$

Per esempio, la circonferenza di centro $C\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$ e raggio $r = 3$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} + 3 \cos t \\ y = 1 + 3 \sin t \end{cases}$$

La parabola

Per scrivere le equazioni parametriche di una parabola basta porre uguale a t la variabile indipendente dell'equazione; abbiamo così:

- $\begin{cases} \boldsymbol{x = t} \\ \boldsymbol{y = at^2 + bt + c} \end{cases}$ se la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse $\boldsymbol{y}$
- $\begin{cases} \boldsymbol{x = at^2 + bt + c} \\ \boldsymbol{y = t} \end{cases}$ se la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse $\boldsymbol{x}$

L'ellisse

La costruzione di un'ellisse può essere fatta con riga e compasso disegnando due circonferenze concentriche aventi come raggi i semiassi dell'ellisse (***figura 4***); una semiretta s uscente dall'origine (centro comune delle due circonferenze) le interseca in A e B. Tracciata da A la parallela all'asse x e da B la parallela all'asse y, il loro punto di intersezione P appartiene all'ellisse.
Indicato con t l'angolo formato dal semiasse positivo delle ascisse con la semiretta s, i punti A e B hanno coordinate

$$A(b \cos t,\ b \sin t) \qquad\qquad B(a \cos t,\ a \sin t)$$

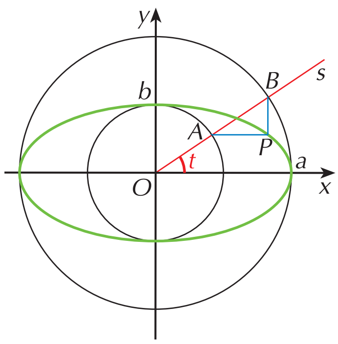
Il punto P ha la stessa ascissa di B e la stessa ordinata di A:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_P = a \cos t} \\ \boldsymbol{y_P = b \sin t} \end{cases} \qquad \text{con} \quad t \in [0,\ 2\pi)$$

Al variare di t, queste equazioni descrivono l'ellisse.
Per esempio, l'ellisse di semiassi $a = 3$ e $b = 2$ ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

Figura 4



L'iperbole

Si dimostra che le equazioni parametriche di un'iperbole sono:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = b \tan t \end{cases} \qquad \text{con} \quad t \in [0,\ 2\pi)\ \wedge\ t \neq \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

dove a è il semiasse trasverso e b quello non trasverso. Per esempio, l'iperbole di semiasse trasverso $a = 1$ e semiasse non trasverso $b = 3$ ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t} \\ y = 3 \tan t \end{cases}$$

APPROFONDIMENTI

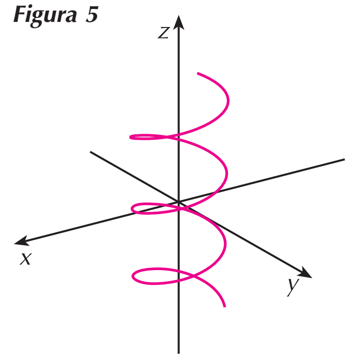
CURVE PARAMETRICHE NELLO SPAZIO

Se una curva è definita nello spazio le sue equazioni parametriche diventano:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Per esempio, la curva $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ rappresenta l'elica cilindrica in ***figura 5***; un modello reale di elica cilindrica è costituito da una molla.

Figura 5



ESEMPI

1. Scriviamo le equazioni parametriche della retta di coefficiente angolare 2 che passa per il punto $A(3, -1)$.

Osserviamo che, avendo posto $x_2 - x_1 = \ell$ e $y_2 - y_1 = p$, il coefficiente angolare della retta è proprio il rapporto $\frac{p}{\ell}$; possiamo quindi porre $p = 2$ e $\ell = 1$ (oppure $p = 4$ e $\ell = 2$ e così via, in modo che il rapporto sia sempre 2) e scrivere l'equazione della retta: $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$

2. Determiniamo la forma parametrica dell'equazione della circonferenza che ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 2 = 0$.

Troviamo innanzi tutto centro e raggio della circonferenza: $C(1, -3)$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 36 - 8} = 2\sqrt{2}$.

L'equazione in forma parametrica è quindi $\begin{cases} x = 1 + 2\sqrt{2}\cos t \\ y = -3 + 2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$

3. Una conica ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$; dopo averne individuato il tipo, scriviamo la sua equazione cartesiana.

La forma dell'equazione suggerisce che si tratta di una ellisse di semiassi $a = 2$ e $b = 1$. La sua equazione cartesiana è quindi $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

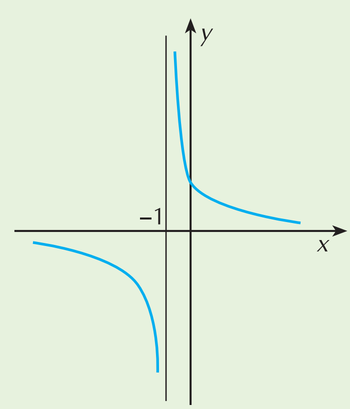
4. Una curva ha equazione parametrica $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$; scriviamo la sua equazione cartesiana.

Dobbiamo eliminare il parametro t dalle due equazioni; ricaviamo allora l'espressione di t dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda:

$$t = \frac{x + 1}{2} \qquad \text{quindi} \qquad y = \frac{2}{x + 1}$$

Si tratta di una funzione omografica avente per asintoti l'asse delle ascisse e la retta di equazione $x = -1$ (***figura 6***).

Figura 6



VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. La retta che passa per i punti di coordinate $(1, -1)$ e $(2, 3)$ ha equazione (sono possibili più alternative):

a. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 4t \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -4t - 1 \end{cases}$

2. La circonferenza che ha centro nell'origine e raggio 3 ha equazione parametrica:

a. $\begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 9 \sin t \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x = 3 \sin t \\ y = 3 \cos t \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

2. IL SISTEMA DI RIFERIMENTO POLARE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 14

Il sistema di riferimento cartesiano non è il solo modo per individuare la posizione di un punto nel piano.
Pensiamo ad una situazione reale: dobbiamo dare delle indicazioni precise ad un robot che deve tracciare il percorso di un utensile su un piano. Supponiamo che il robot stia procedendo in modo rettilineo in una certa direzione r; per indicargli che deve raggiungere un punto P dalla posizione O in cui si trova (***figura 7***) basta ad esempio dirgli in modo opportuno: «Gira a sinistra di 20° e vai avanti di 30cm». In sostanza, basta fornirgli un numero reale che rappresenta la distanza di P da O (cioè il modulo del vettore $\overrightarrow{OP}$) e l'ampiezza dell'angolo che la direzione r precedente forma con $\overrightarrow{OP}$.

Figura 7

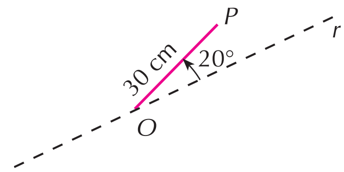
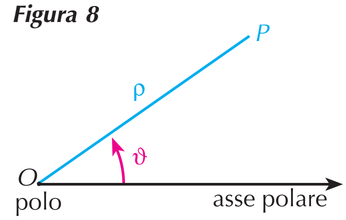


Figura 8



Per individuare un punto nel piano si può far riferimento ad un altro sistema di coordinate, che chiameremo **coordinate polari**, e che viene definito in questo modo. In un piano fissiamo (***figura 8***):

- un punto O che chiamiamo **polo**
- una semiretta orientata avente origine in O, detta **asse polare**
- una unità di misura per i segmenti
- il verso antiorario come verso positivo per la misura degli angoli orientati.

In questo modo, un qualsiasi punto P del piano può essere individuato assegnando la misura ρ del segmento OP e quella ϑ dell'angolo orientato che la semiretta OP forma con l'asse polare. E' evidente che l'angolo ϑ è definito a meno di multipli dell'angolo giro; infatti ogni punto P è definito sia dalla coppia (ρ, ϑ) sia dalla coppia $(\rho, \vartheta + 2k\pi)$.
Viceversa, dati due numeri reali (ρ, ϑ), dove $\rho > 0$ e ϑ è definito a meno di multipli di 2π, il punto P ad essi associato si determina disegnando la semiretta uscente da O che forma l'angolo ϑ con l'asse polare e prendendo su di essa il punto P tale che $\overline{OP} = \rho$. Possiamo quindi dire che:

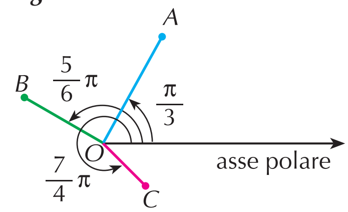
qualunque punto P del piano diverso da O è individuato da una coppia di numeri reali (ρ, ϑ), dove $\rho > 0$, che costituiscono le sue **coordinate polari**. Il numero ρ si dice **modulo** di P e il numero ϑ si dice **anomalia**.

L'angolo ϑ per il quale vale la relazione $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ costituisce l'**anomalia principale** del punto P.

Per completare la definizione includendo anche il punto O in questo sistema, si conviene poi che O abbia modulo 0 e anomalia indefinita; il punto O è quindi definito da una qualunque coppia $(0, \vartheta)$.

Per esempio, fissato un sistema di riferimento polare, i punti $A\left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{6}\pi\right)$, $C\left(1, \dfrac{7}{4}\pi\right)$ si rappresentano come in ***figura 9***.

Figura 9



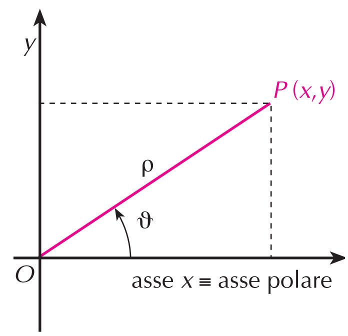
Relazioni fra coordinate polari e coordinate cartesiane

Consideriamo un punto P avente coordinate polari (ρ, ϑ) e fissiamo il sistema cartesiano in modo che l'origine coincida con il polo O e l'asse delle ascisse coincida con l'asse polare (***figura 10***).

Se (x, y) sono le coordinate cartesiane di P, allora sussistono le seguenti relazioni

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}} \qquad (\mathbf{A})$$

Figura 10



Viceversa, se sono note le coordinate cartesiane (x, y) di P, da queste relazioni e applicando il teorema di Pitagora, ricaviamo che le sue coordinate polari (ρ, ϑ) sono espresse dalle relazioni:

$$\boxed{\begin{array}{c} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\[2ex] \cos \vartheta = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \sin \vartheta = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array}} \qquad (\mathbf{B})$$

Per esempio:

- se $\left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$ sono le coordinate polari di un punto A, le sue coordinate cartesiane sono

$$x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \qquad y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

  quindi $A\left(\sqrt{3}, 1\right)$;

- se un punto B ha coordinate cartesiane $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$, le sue coordinate polari sono

$$\rho = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4 \qquad \cos \vartheta = -\frac{1}{2} \qquad \sin \vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

  quindi $B\left(4, \dfrac{2}{3}\pi\right)$.

L'equazione di una curva in coordinate polari

Il grafico di una curva si può descrivere mediante un'equazione che lega le coordinate dei suoi punti una volta che sia stato fissato un sistema di riferimento.

Se l'equazione della curva è data in forma cartesiana, la si può scrivere in coordinate polari applicando le formule di trasformazione (**A**) precedenti; viceversa, se l'equazione è data in forma polare, si può trovare la corrispondente equazione cartesiana applicando le trasformazioni (**B**). Per esempio:

- la circonferenza avente equazione cartesiana $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$ ha come equazione polare la seguente:

$$(\rho \cos \vartheta)^2 + (\rho \sin \vartheta)^2 + 2(\rho \cos \vartheta) - 4(\rho \sin \vartheta) - 1 = 0$$

  cioè, sviluppando i calcoli $\quad \rho^2 + \rho(2\cos \vartheta - 4\sin \vartheta) - 1 = 0$

- la curva di equazione polare $2\cos \vartheta = \rho \sin^2 \vartheta$ ha equazione cartesiana:

$$2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2$$

  cioè, sviluppando i calcoli $\quad x = \frac{1}{2}y^2 \quad$ che corrisponde a una parabola con vertice nell'origine e asse di simmetria coincidente con l'asse x.

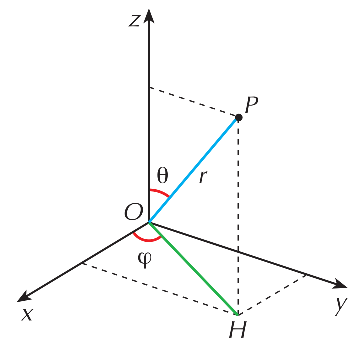
APPROFONDIMENTI

IL RIFERIMENTO POLARE NELLO SPAZIO

Nello spazio in cui è stato fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, un punto P è individuato dalla terna r, ϑ e φ (***figura 11***) dove:

- r è la distanza OP
- ϑ è l'angolo zenitale (o anche distanza zenitale), cioè l'angolo formato dal raggio OP con l'asse z
- φ è l'angolo azimutale (o anche longitudine), cioè l'angolo formato da OH con l'asse x, essendo H la proiezione di P sul piano xy.

Figura 11



La terna (r, ϑ, φ) è legata alle coordinate cartesiane dalle relazioni:

$x = OH \cos \varphi = r \sin \vartheta \cos \varphi \qquad y = OH \sin \varphi = r \sin \vartheta \sin \varphi \qquad z = r \cos \vartheta$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Il punto che nel piano cartesiano ha coordinate $\left(-6, 2\sqrt{3}\right)$, in un sistema di riferimento polare ha coordinate:

a. $\left(2\sqrt{3}, \frac{2}{3}\pi\right)$ **b.** $\left(4\sqrt{3}, \frac{5}{6}\pi\right)$ **c.** $\left(4, \frac{5}{6}\pi\right)$ **d.** $\left(4\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

2. La retta che in coordinate cartesiane ha equazione $x - 2y = 1$ in coordinate polari ha equazione:

a. $\rho\,(\cos \vartheta - 2 \sin \vartheta) = 2$ **b.** $\rho\,(\cos \vartheta + 2 \sin \vartheta) = 2$

c. $\rho\,(\cos \vartheta + 2 \sin \vartheta) = 1$ **d.** $\rho\,(\cos \vartheta - 2 \sin \vartheta) = 1$

3. LA SCALA LOGARITMICA

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 15

Se un numero k è maggiore di 10, il suo logaritmo in base 10 è molto più piccolo del numero stesso:

$\log 20 = 1{,}30...$ $\quad \log 400 = 2{,}60...$ $\quad \log 5000 = 3{,}69...$ $\quad$ e così via.

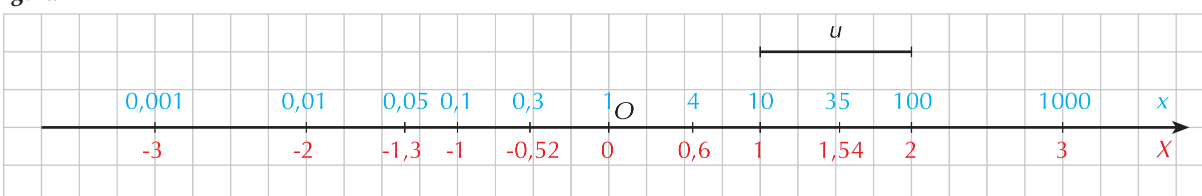
Quando si devono rappresentare numeri che spaziano in un range molto grande di valori, come per esempio le distanze interstellari o le frequenze di udibilità del suono (da 20Hz a 20000Hz), si ricorre ad una scala logaritmica, vale a dire che, dato un numero reale positivo x (altrimenti il logaritmo non esiste), si valuta il suo logaritmo decimale. Di conseguenza:

- se $0 < x < 1 \quad \rightarrow \quad \log x < 0$
- se $1 \leq x < 10 \quad \rightarrow \quad 0 \leq \log x < 1$
- se $10 \leq x < 100 \quad \rightarrow \quad 1 \leq \log x < 2$
- se $100 \leq x < 1000 \quad \rightarrow \quad 2 \leq \log x < 3$

e così via.

Sulla retta dei numeri, la scala logaritmica viene rappresentata tenendo presenti le considerazioni precedenti. Fissata un'origine O e un'unità di misura ω si procede in questo modo (segui la ***figura 12***).

Figura 12



- Poiché $\log 10^0 = \log 1 = 0$, al punto O facciamo corrispondere la potenza $10^0 = 1$
- Alla destra del punto O :
  - poiché $\log 10^1 = 1$, al punto che si trova a distanza 1 da O facciamo corrispondere la potenza $10^1 = 10$
  - poiché $\log 10^2 = 2$, al punto che si trova a distanza 2 da O facciamo corrispondere la potenza $10^2 = 100$

  e così via.
- Alla sinistra del punto O :
  - poiché $\log 10^{-1} = -1$, al punto che si trova a distanza -1 da O facciamo corrispondere la potenza $10^{-1} = 0{,}1$
  - poiché $\log 10^{-2} = -2$, al punto che si trova a distanza -2 da O facciamo corrispondere la potenza $10^{-2} = 0{,}01$

  e così via.

Nella figura:
- *i numeri in blu sono i valori di x*
- *i numeri in rosso sono i valori $X = \log x$*

I valori intermedi tra una potenza di 10 e la successiva si collocano nel corrispondente valore di logaritmo; per esempio:

- il numero 4 che si trova tra 1 e 10 viene posto in corrispondenza di $\log 4 \approx 0{,}6$
- il numero 35 che si trova tra 10 e 100 viene posto in corrispondenza di $\log 35 \approx 1{,}54$
- il numero 0,3 che si trova tra 0,1 e 1 viene posto in corrispondenza di $\log 0{,}3 \approx -0{,}52$
- il numero 0,05 che si trova tra 0,01 e 0,1 viene posto in corrispondenza di $\log 0{,}05 \approx -1{,}3$.

In pratica, indicata con x l'ascissa di un punto P e con X la sua coordinata logaritmica, tra queste due variabili sussiste la relazione

$$X = \log x$$

In scala logaritmica si possono quindi rappresentare solo valori x positivi, mentre i valori di X dei corrispondenti logaritmi decimali sono positivi se $x > 1$, negativi se $0 < x < 1$; il valore 0 viene assunto in corrispondenza di $x = 1$.

IL SISTEMA DI COORDINATE LOGARITMICHE

Quando in un piano si introduce un sistema di riferimento cartesiano, su ciascuno dei due assi si può fissare una scala logaritmica; si parla in questo caso di **coordinate logaritmiche**.
L'unità di misura scelta per i due assi può essere la stessa, ma si possono anche usare unità diverse (esattamente come nel piano cartesiano si può avere un sistema monometrico oppure dimetrico).
Se indichiamo con (X, Y) le coordinate logaritmiche di un punto P, e con (x, y) le sue coordinate cartesiane consuete, abbiamo che:

$$X = \log x \qquad \text{e} \qquad Y = \log y$$

Grazie alle proprietà dei logaritmi, l'uso di questo tipo di coordinate può semplificare la rappresentazione grafica di alcune curve; ricordiamo infatti che un prodotto tra due numeri si trasforma nella somma dei loro logaritmi, mentre una potenza si trasforma nel prodotto tra l'esponente e il logaritmo della base.
Supponiamo, per esempio, di dover rappresentare la curva di equazione

$$y = x^{\frac{3}{4}} \qquad \text{con } x > 0$$

Se consideriamo i logaritmi decimali dei due membri abbiamo che

$$\log y = \log x^{\frac{3}{4}} \qquad \text{cioè} \qquad \log y = \frac{3}{4}\log x$$

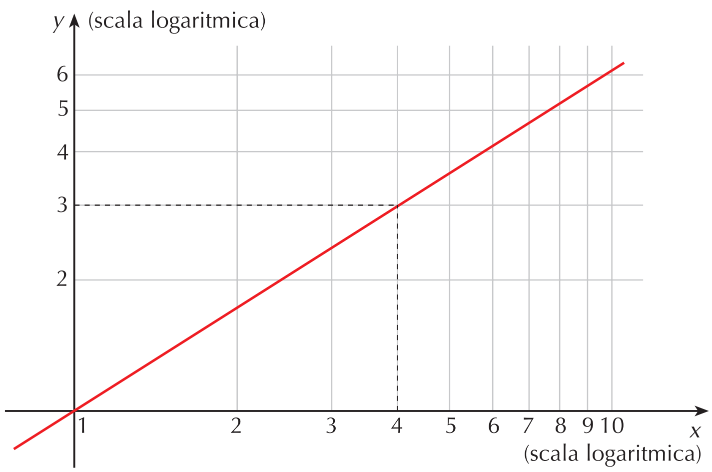
Ponendoci in una sistema di coordinate logaritmiche si ottiene:

$$Y = \frac{3}{4}X$$

che rappresenta una retta di coefficiente angolare $\frac{3}{4}$ che passa per l'origine (il grafico è in ***figura 13***).

Viceversa, data la retta che in coordinate logaritmiche ha equazione $Y = -X + 3$, ci chiediamo quale sia la relazione funzionale tra x e y.

Figura 13



Ponendo $\log x$ al posto di X e $\log y$ al posto di Y otteniamo:

$$\log y = -\log x + 3 \qquad \text{cioè} \qquad \log y = \log \frac{10^3}{x}$$

La relazione funzionale cercata ha quindi equazione $y = \dfrac{1000}{x}$ e rappresenta un'iperbole equilatera.

IL SISTEMA DI COORDINATE SEMILOGARITMICHE

Oltre ad un sistema di riferimento dove su entrambi gli assi cartesiani si è fissata una scala logaritmica, si può anche pensare ad uno nel quale questa scala sia fissata su uno solo dei due assi, per esempio l'asse y. Si parla in questo caso di **riferimento semilogaritmico**. In sostanza, sull'asse delle ascisse si mantiene una scala lineare e sull'asse y una scala logaritmica (***figura 14***):

$$X = x \qquad \text{e} \qquad Y = \log y$$

Per esempio:

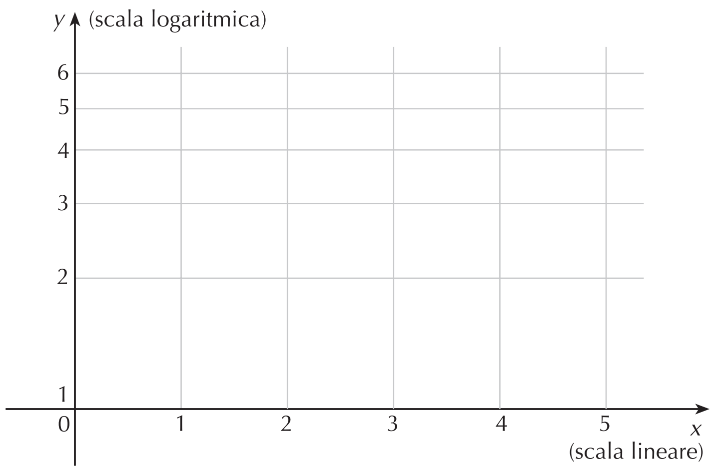
- la funzione $y = 1000 \cdot 2^x$ diventa:

  $\log y = \log(1000 \cdot 2^x) \quad \rightarrow \quad \log y = \log 1000 + x\log 2 \qquad \text{cioè} \qquad Y = 3 + x\log 2$

- viceversa, la funzione $Y = \log 2 + x \log 5$ diventa:

  $\log y = \log(2 \cdot 5^x) \qquad \text{cioè} \qquad y = 2 \cdot 5^x$

Figura 14



I concetti e le regole

L'equazione parametrica di una curva

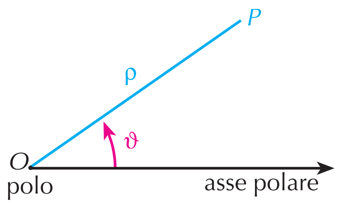
L'equazione di una curva è in forma parametrica se è rappresentata dal sistema

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

dove le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ esprimono le coordinate di un suo punto P in funzione del parametro t.

Il sistema di riferimento polare

Un sistema di coordinate polari nel piano è fissato quando vengono dati una semiretta orientata detta **asse polare** la cui origine O è detta **polo** e una unità di misura per i segmenti.



Ad ogni punto P del piano si può associare la coppia ordinata di numeri (ρ, ϑ) dove:

- ρ rappresenta la misura del segmento OP rispetto all'unità prefissata (**modulo** di P)
- ϑ rappresenta la misura in radianti dell'angolo orientato che l'asse polare forma con la semiretta OP (**anomalia** di P).

Le formule per il passaggio da coordinate polari (ρ, ϑ) a coordinate cartesiane (x, y) e viceversa sono le seguenti:

- da coordinate polari a coordinate cartesiane: $x = \rho \cos \vartheta \qquad y = \rho \sin \vartheta$
- da coordinate cartesiane a coordinate polari: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \cos \vartheta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \sin \vartheta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

La scala logaritmica

Fissata un'unità di misura su una semiretta orientata, ad ogni numero x positivo si può associare il numero $X = \log x$; i valori che si ottengono sono la rappresentazione in scala logaritmica dei numeri x.
Un sistema di coordinate logaritmiche è un sistema di riferimento cartesiano sui cui assi viene fissato un sistema di coordinate logaritmiche.

ESERCIZI CAPITOLO 1

Sistemi di riferimento e curve

LE EQUAZIONI PARAMETRICHE DI UNA CURVA

la teoria è a pag. 1

RICORDA

- L'equazione parametrica di una retta che passa per due punti assegnati è $\begin{cases} x = \ell t + x_1 \\ y = pt + y_1 \end{cases}$

  dove ℓ rappresenta la differenza $x_2 - x_1$ fra le ascisse dei due punti e p la differenza $y_2 - y_1$ fra le ordinate.

- L'equazione parametrica di una circonferenza di centro (a, b) e raggio r è $\begin{cases} x = a + r\cos t \\ y = b + r\sin t \end{cases}$

- L'equazione parametrica di una parabola con asse parallelo all'asse y è $\begin{cases} x = t \\ y = at^2 + bt + c \end{cases}$

- L'equazione parametrica di un'ellisse di semiassi a e b è $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

- L'equazione parametrica di un'iperbole di semiassi a e b è $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = b\tan t \end{cases}$

Applicazione

1 Costruisci per punti le curve che hanno le seguenti equazioni parametriche e riconoscine il tipo

a. $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 2t^3 - t^2 \\ y = t^3 - t + 1 \end{cases}$

2 Scrivi l'equazione cartesiana delle rette di equazioni parametriche

a. $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t - 2 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{2}{3}t + \dfrac{4}{3} \end{cases}$ $[3x - 2y - 1 = 0;\ 2x - 3y + 4 = 0]$

3 Scrivi una possibile equazione parametrica della retta $x + y - 2 = 0$. $\left[\begin{cases} x = t \\ y = -t + 2 \end{cases}\right]$

4 Scrivi un'equazione parametrica della retta che passa per i punti $A(1, -3)$ e $B(2, 5)$. $\left[\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 8t - 3 \end{cases}\right]$

5 Trova le coordinate del punto di intersezione della retta di equazione cartesiana $2x - 3y = 5$ con la retta di equazione parametrica $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$. $\left[\left(\dfrac{25}{7}, \dfrac{5}{7}\right)\right]$

6 Scrivi l'equazione parametrica della retta che passa per $A(0, 1)$ ed è parallela a quella di equazione cartesiana $y = 3x - 5$.
(Suggerimento: ricorda che $m = \dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{p}{\ell}$)

$$\left[\begin{cases} x = t \\ y = 3t + 1 \end{cases}\right]$$

7 Scrivi l'equazione parametrica della retta che passa per $A(2, 7)$ ed è perpendicolare alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

$$\left[\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 7 \end{cases}\right]$$

8 Trova le coordinate dei punti di intersezione fra la circonferenza avente centro nell'origine e raggio 2 e la retta di equazione parametrica $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2(t - 1) \end{cases}$.

$[(2, 0); (0, -2)]$

9 Data la curva di equazione parametrica $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$, riconoscine il tipo e scrivi la sua equazione in coordinate cartesiane.

$$\left[\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1\right]$$

10 Data la curva di equazione parametrica $\begin{cases} x = \dfrac{5}{\cos t} \\ y = 3 \tan t \end{cases}$, riconoscine il tipo e scrivi la sua equazione in coordinate cartesiane.

$$\left[\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1\right]$$

11 Scrivi l'equazione parametrica dell'ellisse con centro nell'origine di semiassi $a = 6$ e $b = 4$.

$$\left[\begin{cases} x = 6 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}\right]$$

12 Scrivi l'equazione parametrica della circonferenza avente centro nell'origine e raggio 6. Successivamente trova le coordinate dei punti di intersezione con la retta $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases}$.

$[(\pm 3, \pm 3\sqrt{3})]$

13 Scrivi l'equazione parametrica della circonferenza avente centro nel punto $C(1, 4)$ e raggio 5. Trova poi la lunghezza della corda intercettata sull'asse delle ascisse.

$$\left[\begin{cases} x = 1 + 5 \cos t \\ y = 4 + 5 \sin t \end{cases}; 6\right]$$

14 Scrivi l'equazione parametrica dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti che ha vertice in $V(\sqrt{6}, \sqrt{6})$.

$$\left[\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{6}{t} \end{cases}\right]$$

Scrivi l'equazione cartesiana delle curve che hanno le seguenti equazioni parametriche.

15 $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = \dfrac{2t - 1}{t - 5} \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = \dfrac{t}{t - 1} \end{cases}$ $\qquad$ $\left[y = \dfrac{2x - 3}{x - 6}; y = \dfrac{x - 1}{x - 2}\right]$

16 $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = \dfrac{4}{7}t \\ y = \dfrac{7}{t} \end{cases}$ $\qquad$ $[y = x^2 - 6x + 8; xy = 4]$

17 $\begin{cases} x = \dfrac{2(1 - t^2)}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1 + t^2} \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = \dfrac{1 - t}{1 + t} \\ y = \dfrac{2t}{t + 1} \end{cases}$ $\qquad$ $\left[y = \dfrac{2 - x}{4}; y = 1 - x\right]$

18 $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = \dfrac{4t^2}{1-t^2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t \\ y = \dfrac{1}{2t} \end{cases}$ $\left[y = 2x - 2;\ xy = \dfrac{1}{4}\right]$

19 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 + \sin t \\ y = 2 + \cos t \end{cases}$ $\left[\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1;\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0\right]$

IL SISTEMA DI RIFERIMENTO POLARE

la teoria è a pag. 5

RICORDA

- Per passare dal sistema di riferimento polare a quello cartesiano devi applicare le formule:
$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$
- Per passare dal sistema cartesiano a quello polare devi applicare le formule:
$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ $\cos\vartheta = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\sin\vartheta = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

da cui si ricava che è: $\tan\vartheta = \dfrac{y}{x}$

Applicazione

In un sistema di riferimento polare, rappresenta i punti che hanno le seguenti coordinate.

20 $P\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$ $Q\left(3, \dfrac{\pi}{3}\right)$ $R\left(7, -\dfrac{\pi}{6}\right)$ $S\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ $T\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right)$

21 $P\left(6, \dfrac{\pi}{4}\right)$ $Q\left(4, -\dfrac{3}{4}\pi\right)$ $R\left(1, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ $S\left(\sqrt{2}, \dfrac{5}{6}\pi\right)$ $T\left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{2}{3}\pi\right)$

Determina le coordinate cartesiane dei punti che hanno le seguenti coordinate polari.

22 $P\left(5, \dfrac{3}{4}\pi\right)$ $Q\left(-2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ $R\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}\pi\right)$ $S\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

23 $P\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ $Q(1, \pi)$ $R\left(4, \dfrac{2}{3}\pi\right)$ $S\left(10, -\dfrac{3}{4}\pi\right)$

24 $P\left(2, -\dfrac{\pi}{4}\right)$ $Q\left(3, \dfrac{\pi}{6}\right)$ $R\left(4, \dfrac{5}{6}\pi\right)$ $S\left(2, \dfrac{3}{4}\pi\right)$

25 $P\left(5, -\dfrac{\pi}{6}\right)$ $Q(2, -\pi)$ $R\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$ $S\left(1, -\dfrac{\pi}{2}\right)$

Determina le coordinate polari dei punti aventi le seguenti coordinate cartesiane.

26 $P(3, -3)$ $Q(-\sqrt{3}, 3)$ $R\left(\dfrac{5}{2}\sqrt{3}, -\dfrac{5}{2}\right)$

27 $P(-5,\ 5\sqrt{3})$ $\qquad Q\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ $\qquad R(1,\ -2)$

28 $P(2\sqrt{3},\ 6)$ $\qquad Q\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\qquad R\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3}\right)$

29 $P(-3,\ 3)$ $\qquad Q(10,\ 5\sqrt{2})$ $\qquad R(0,\ 3)$

30 $P(0,\ -5)$ $\qquad Q(-2,\ 4\sqrt{2})$ $\qquad R(3,\ -\sqrt{3})$

31 Scrivi l'equazione polare della retta passante per i punti di coordinate cartesiane $A(1,\ 1)$ e $B(0,\ 2)$.
$\left[\sqrt{2} = \rho\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \vartheta\right)\right]$

32 Scrivi l'equazione polare della retta che ha equazione cartesiana $x - 2y - 1 = 0$.
$[\rho\ (\cos\vartheta - 2\sin\vartheta) = 1]$

33 Scrivi in coordinate polari l'equazione della bisettrice del primo e terzo quadrante di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.
$\left[\vartheta = \dfrac{\pi}{4}\right]$

34 Scrivi l'equazione polare della circonferenza che ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 9$. $[\rho = 3]$

35 Scrivi l'equazione polare della parabola $y = x^2 + 3$. $[\rho\sin\vartheta - \rho^2\cos^2\vartheta = 3]$

36 Scrivi l'equazione polare della circonferenza che ha centro nel punto C di coordinate cartesiane $(1,\ 1)$ e raggio $\sqrt{2}$. $[\rho^2 - 2\rho\ (\cos\vartheta + \sin\vartheta) = 0]$

37 Scrivi l'equazione polare della circonferenza che ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 - ax - ay = 0$.
$[\rho = a\ (\sin\vartheta + \cos\vartheta)]$

38 Scrivi l'equazione polare dell'iperbole di equazione cartesiana $x^2 - y^2 = 1$. $[\rho^2\cos 2\vartheta = 1]$

39 Scrivi l'equazione polare della curva di equazione cartesiana $x^2 - y^2 = a^2$. $\left[\rho^2 = \dfrac{a^2}{\cos 2\vartheta}\right]$

40 Data l'equazione in coordinate polari $\rho^2 - 4\rho\cos\left(\vartheta - \dfrac{\pi}{6}\right) + 3 = 0$, trasformala in coordinate cartesiane.
$[x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - 2y + 3 = 0]$

41 Trasforma in coordinate cartesiane l'equazione polare $\rho\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \vartheta\right) = 1$ e, dopo averne individuato il tipo, rappresentala graficamente.
$[\sqrt{3}x + y = 2]$

42 Trasforma in coordinate cartesiane l'equazione polare $\rho = 2\sin\vartheta$ e, dopo averne individuato il tipo, rappresentala graficamente.
$[x^2 + y^2 - 2y = 0]$

43 Trasforma in coordinate cartesiane l'equazione polare $\rho^2\sin 2\vartheta = 6$ e, dopo averne individuato il tipo, rappresentala graficamente.
[iperbole equilatera di equazione $xy = 3$]

LA SCALA LOGARITMICA

la teoria è a pag. 7

RICORDA

In una scala logaritmica i valori X rappresentati sono proporzionali ai logaritmi delle ascisse positive x:

$$X = \log x$$

Comprensione

44 In scala logaritmica:

a. si possono rappresentare solo numeri reali positivi. V F

b. i valori $X = \log x$ sono solo numeri positivi V F

c. valori interi (numeri come 2, 3, 4 ...) sono sempre equidistanziati V F

d. non esiste la possibilità di rappresentare lo zero V F

e. per rappresentare numeri compresi tra 1 e 10 si utilizza un segmento di uguale lunghezza rispetto a quello che si usa per rappresentare numeri compresi tra 10 e 100. V F

45 In un sistema di coordinate logaritmiche, ad ogni punto di coordinate (x, y) corrisponde un punto di coordinate (X, Y) dove:

a. $x = \log X$ e $y = \log Y$

b. $X = \log x$ e $Y = \log y$

c. $X = \log y$ e $Y = \log x$

Applicazione

46 Rappresenta i seguenti numeri in scala logaritmica:

0,04 0,8 2 25 95 128 4387.

47 In laboratorio si è controllata la concentrazione di un farmaco dopo un certo numero di ore dal suo assorbimento; i dati sono in tabella:

Tempo (in h)	0	5	10	15	20	25	30
Concentrazione (in mg)	1000	700	400	180	90	30	8

Rappresenta i dati in un riferimento cartesiano in scala semilogaritmica (scala logaritmica sull'asse y dove viene riportata la concentrazione).

48 La popolazione mondiale ha subito un notevole incremento a partire dal 1800 e i dati relativi alla sua numerosità sono riportati in tabella:

Anno	1800	1900	1960	2000	2010
Popolazione (in miliardi di individui)	1	1,5	3	6	7

Rappresenta i dati in un riferimento cartesiano in scala semilogaritmica (scala logaritmica sull'asse y dove viene riportata la popolazione).

49 In un grafico con scala semilogaritmica è rappresentata la retta di equazione $Y = X\log 3 - \log 5$. Trova il legame funzionale tra x e y sapendo che $X = x$ e $Y = \log y$. $\left[y = \frac{3^x}{5}\right]$

50 E' data la funzione $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. In un grafico con scala semilogaritmica qual è il coefficiente angolare della retta che la rappresenta? $[-\log 4]$

51 La legge che rappresenta la crescita di una popolazione di batteri è data dalla formula $N = N_0 \cdot 2^{kt}$, dove N_0 è la numerosità della popolazione di batteri al tempo $t = 0$, N è la popolazione al tempo t e k è il numero di suddivisioni cellulari che avvengono in ogni unità di tempo. Trasforma la legge in scala semilogaritmica ponendo $Y = \log N$. $[Y = kt\log 2 + \log N_0]$

52 La legge di decadimento radioattivo delle sostanze segue la legge $m = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$ dove m_0 è la massa radioattiva presente al tempo $t = 0$, m è la massa radioattiva presente al tempo t e λ è la costante di decadimento radioattivo il cui valore è un numero caratteristico di ciascuna sostanza radioattiva e dà la misura della maggiore o minore rapidità con cui avviene il processo di trasformazione. Trasforma la legge in scala semilogaritmica ponendo $Y = \ln m$. [$y = \ln m_0 - \lambda t$]

Per la verifica delle competenze

1 La magnitudo M di un terremoto viene definita, secondo la scala Richter, dalla formula $M = \log \dfrac{A}{A_0}$ dove A rappresenta il massimo spostamento rispetto allo zero della traccia lasciata da un sismografo e A_0 indica il valore massimo dello stesso spostamento per un terremoto preso come campione.
Stabilisci, motivando adeguatamente le risposte, se le seguenti affermazioni sono corrette oppure no.

a. Un terremoto di magnitudo 6 è dieci volte più potente di un terremoto di magnitudo 5.

b. Un terremoto di magnitudo 7,2 ha una potenza doppia di uno di magnitudo 3,6.

[corretta la **a.**; errata la **b.**]

2 L'orecchio umano percepisce la pressione sonora in maniera logaritmica, anziché lineare, quindi risulta conveniente esprimere le grandezze legate all'ampiezza del suono in un'unità di misura logaritmica chiamata *decibel*. Se X è una generica grandezza e X_0 è un valore di riferimento per quella grandezza, si definisce decibel l'espressione $\mathrm{dB} = 10\log \dfrac{X}{X_0}$.

a. Due suoni hanno rispettivamente intensità di 10^{-12}Watt/m^2 e 10^{-14}Watt/m^2; qual è il rapporto fra le loro intensità in decibel? [2]

b. Due suoni hanno intensità di 100dB e 70dB, qual è il rapporto fra le loro intensità espresse in Watt/m^2? [1000]

Soluzioni esercizi di comprensione

44 **a.** V, **b.** F, **c.** F, **d.** V, **e.** V **45** **b.**

Test finale di autovalutazione

1 Determina le coordinate del punto di intersezione delle rette le cui equazioni parametriche sono le seguenti:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + \frac{1}{2}t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3s - 1 \\ y = 5 - 4s \end{cases}$$

15 punti

2 L'equazione parametrica $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ rappresenta:

a. l'ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

b. l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

c. l'iperbole di equazione $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

d. una curva diversa dalle precedenti.

10 punti

3 La curva di equazione $\rho = \frac{6}{3 - 5\cos\vartheta}$ rappresenta:

a. un'ellisse **b.** una parabola **c.** un'iperbole

10 punti

4 L'equazione polare della retta $x + 1 = 0$ è:

a. $\rho\cos\vartheta = -1$ **b.** $\rho\cos\vartheta = 1$ **c.** $\rho = \cos\vartheta$ **d.** $\rho = -\cos\vartheta$

10 punti

5 In un sistema di riferimento polare è dato il segmento AB di estremi $A\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ e $B\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$. Dopo aver scritto le coordinate cartesiane di A e B, verifica che AB è parallelo all'asse polare.

11 punti

6 Considerata la curva di equazione polare $\rho = \frac{-1}{1 - \sqrt{3}\cos\vartheta}$:

a. individuane il tipo — 10 punti

b. trova i punti di modulo uguale a 2 — 7 punti

c. scrivi la sua equazione cartesiana. — 7 punti

7 In un sistema di coordinate semilogaritmiche è data la retta di equazione $Y = X\log 2 + 1$. La sua equazione in coordinate cartesiane è:

a. $y = 2x + 1$ **b.** $y = 2^x$ **c.** $y = 10 \cdot 2^x$ **d.** $y = 2^x + 1$

10 punti

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	Totale
Punteggio								

Voto: $\frac{\text{totale}}{10} + 1 =$

Soluzioni

1 $\left(\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)$

2 **a.**

3 **c.**

4 **a.**

5 $A(2, 2)$; $B\left(2\sqrt{3}, 2\right)$

6 **a.** iperbole, **b.** $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$, **c.** $2x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

7 **c.**