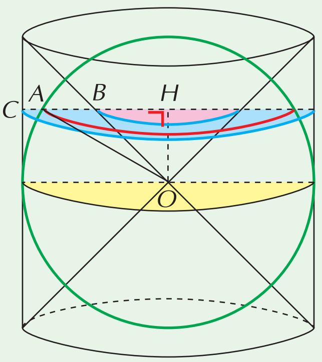
La dimostrazione della formula del volume della sfera

Valutiamo adesso il volume della sfera. Consideriamo una sfera di centro O e raggio r, il cilindro equilatero ad essa circoscritto e i due coni che hanno per basi le basi del cilindro e per vertice il centro della sfera (***figura 1***). Il solido che si ottiene togliendo dal cilindro i due coni prende il nome di **anticlessidra**. Dimostriamo che vale il seguente teorema.

Figura 1



Una sfera è equivalente all'anticlessidra.

Dimostrazione.

Sezioniamo la figura costruita con un piano parallelo alla base. Se tale piano passa per il centro della sfera, allora la sezione della sfera è il cerchio massimo, la sezione dell'anticlessidra è ancora il cerchio massimo e quindi le due sezioni sono equivalenti.

Se il piano non passa per il centro, la sezione che si ottiene dalla sfera è un cerchio di raggio HA, quella che si ottiene dall'anticlessidra è la corona circolare delimitata dai cerchi di raggi HC e HB.

L'area del cerchio di raggio HA è: $\pi\overline{HA}^2$

L'area della corona circolare è: $\pi\left(\overline{HC}^2 - \overline{HB}^2\right)$

Osserviamo adesso che HC è proprio il raggio della sfera (pertanto $HC = AO = r$) e che, visto che il cono ha il raggio di base congruente all'altezza, anche $HB \cong OH$. Quindi possiamo scrivere:

$$\overline{HC}^2 - \overline{HB}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OH}^2$$

Inoltre, se applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo OAH, si ha che $\overline{AH}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OH}^2$. Da tutto ciò deriva che:

$$\overline{HC}^2 - \overline{HB}^2 = \overline{AH}^2$$

Allora il cerchio sezione del piano con la sfera è equivalente alla corona circolare sezione del piano con l'anticlessidra; per il principio di Cavalieri la sfera e l'anticlessidra sono quindi equivalenti. ◀

Il teorema dimostrato ci indica il modo di calcolare la misura del volume di una sfera:

$$V_{\text{sfera}} = V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{cono}}$$

ed essendo $V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 \qquad V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3}\pi r^3$

si ha che $\boxed{V_{\text{sfera}}} = 2\pi r^3 - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^3 \boxed{= \frac{4}{3}\pi r^3}$