Le equazioni

Il concetto di equazione e i principi di equivalenza

richiami della teoria

- Un'**identità** è un'uguaglianza di due espressioni che è verificata da qualunque valore attribuito alle lettere che vi figurano;
- un'**equazione** è un'uguaglianza di due espressioni che è verificata da particolari valori attribuiti alle lettere che vi figurano;
- per **risolvere un'equazione** occorre trovare tutte le soluzioni o radici che rendono uguali i due membri;
- due equazioni si dicono **equivalenti** quando hanno le stesse soluzioni;
- **1º principio di equivalenza:** addizionando o sottraendo ai due membri di un'equazione uno stesso numero o una stessa espressione algebrica si ottiene un'equazione equivalente a quella data;
- **legge del trasporto:** in ogni equazione un termine può essere trasportato da un membro all'altro purché lo si cambi di segno;
- **soppressione di termini uguali:** se in entrambi i membri di un'equazione figurano due termini uguali, essi possono essere soppressi;
- **2º principio di equivalenza:** moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero diverso da zero si ottiene un'equazione equivalente a quella data;
- **cambiamento dei segni:** cambiando il segno di ogni termine di un'equazione si ottiene un'equazione equivalente a quella data;
- **riduzione a forma intera:** un'equazione che contiene termini frazionari può essere ridotta a forma intera moltiplicando tutti i suoi termini per il m.c.m. di tutti i denominatori.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

1 Un'equazione è un'uguaglianza di due espressioni (di cui almeno una letterale) che è verificata:
a. per alcuni valori attribuiti alla lettera o alle lettere che vi figurano;
b. da particolari valori attribuiti alla lettera o alle lettere che vi figurano;
c. per qualsiasi valore attribuito alla lettera o alle lettere che vi figurano.

2 Completa la seguente regola:
risolvere un'equazione significa .... che rendono uguali ....

3 Completa le seguenti definizioni:
a. un'equazione si dice frazionaria o fratta quando ....;
b. due equazioni si dicono equivalenti quando ....

4 Il primo principio di equivalenza afferma che:
a. addizionando o sottraendo ai due membri di un'equazione uno stesso numero o una stessa espressione algebrica, otteniamo un'equazione equivalente a quella data;
b. moltiplicando o dividendo i due membri di un'equazione per uno stesso numero otteniamo un'equazione equivalente a quella data;

c. moltiplicando o dividendo i due membri di un'equazione per uno stesso numero diverso da zero otteniamo un'equazione equivalente a quella data.

5 Completa le seguenti regole:
a. in ogni equazione un termine può essere trasportato da un membro all'altro ....;
b. se in entrambi i membri di un'equazione compaiono due termini uguali, ...;
c. il secondo principio di equivalenza delle equazioni afferma che .... entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero, ... otteniamo .... a quella data;
d. cambiando il segno ad ogni termine di un'equazione si ottiene ....;
e. un'equazione che contiene termini frazionari può essere ridotta a forma intera .... tutti i suoi termini per .... di tutti ....

APPLICAZIONE

6 *Esercizio Svolto*

Scrivi un'equazione equivalente a $x - 7 = 2x + 1$ applicando il primo principio di equivalenza.

Possiamo sommare ad entrambi i membri un numero qualsiasi, ad esempio $+5$:

$x - 7 + 5 = 2x + 1 + 5 \quad \rightarrow \quad x - 2 = 2x + 6.$

7 Scrivi un'equazione equivalente a $3x + 1 = -3 + 2x$ applicando il primo principio di equivalenza.

8 *Esercizio Svolto*

Scrivi un'equazione equivalente a $4x + 3 = 2x - 4$ applicando il secondo principio di equivalenza.

Possiamo moltiplicare entrambi i membri per un numero qualsiasi, ad esempio -2:

$-8x - 6 = -4x + 8.$

9 Scrivi un'equazione equivalente a $2x + 3 = 6 - 7x$ applicando il secondo principio di equivalenza.

10 *Esercizio Svolto*

Applica la legge del trasporto all'equazione $\frac{2}{3}x - 1 = -\frac{3}{2}x + 4$.

Spostando i termini contenenti l'incognita a destra del segno di uguaglianza e i termini noti a sinistra (con l'avvertenza di cambiare i segni), si ottiene: $\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}x = +1 + 4$.

11 Applica la legge del trasporto all'equazione $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}x = 2x - \frac{3}{4} - 7$.

12 *Esercizio Svolto*

Riduci l'equazione $\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} = \frac{7}{4}x + \frac{1}{6}$ a forma intera.

Calcoliamo il m.c.m. fra i denominatori; m.c.m. $(2; 4; 6) = 12$

Moltiplichiamo quindi ciascun termine dell'equazione per il m.c.m.:

$12 \cdot \frac{1}{4}x - 12 \cdot \frac{3}{2} = 12 \cdot \frac{7}{4}x + 12 \cdot \frac{1}{6} \qquad \text{cioè} \qquad 3x - 18 = 21x + 2.$

13 Riduci l'equazione $\frac{5}{2} + \frac{1}{10}x = -\frac{2}{6} + \frac{1}{3}x$ a forma intera.

La risoluzione di equazioni

richiami della teoria

- Per **risolvere** un'equazione, **ridotta in forma** normale, basta dividere entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita;
- per **risolvere** un'equazione **non ridotta in forma normale** si deve:
  a. eliminare eventuali parentesi, eseguendo le operazioni indicate;
  b. eliminare i denominatori moltiplicando ogni termine per il m.c.m. dei denominatori;
  c. applicare la legge del trasporto;
  d. ridurre i termini simili in modo da scrivere l'equazione in forma normale;
  e. dividere entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita;
- l'equazione è **determinata** se il coefficiente dell'incognita è diverso da 0;
- l'equazione è **impossibile** se il coefficiente dell'incognita è uguale a 0 e il termine noto è diverso da 0;
- l'equazione è **indeterminata** se il coefficiente dell'incognita e il termine noto sono uguali a 0;
- un'**equazione** è di **2° grado** se l'incognita è elevata alla seconda potenza (al quadrato); le equazioni di 2° grado ammettono due soluzioni.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

14 Un'equazione ridotta a forma normale si rappresenta con la scrittura:
a. $ax - b = 0$; **b.** $ax + bx = c$; **c.** $ax = b$.

15 Per risolvere un'equazione ridotta a forma normale basta dividere:
a. solo un membro dell'equazione per il coefficiente dell'incognita x;
b. entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita x;
c. entrambi i membri dell'equazione per il termine noto.

16 Completa la seguente procedura di calcolo.
Per risolvere un'equazione di 1° grado ad un'incognita:
a. si eliminano eventuali .... eseguendo le operazioni indicate;
b. si eliminano i .... moltiplicando ogni termine per il .... dei denominatori;
c. si applica la legge ....;
d. si riducono i termini simili in modo da scrivere l'equazione ....;
e. si determina la soluzione applicando il .... principio di equivalenza.

17 Data un'equazione $ax = b$:
a. se a è diverso da 0 allora l'equazione è ....;
b. se a è uguale a 0 e b è diverso da 0 allora l'equazione è ....;
c. se a è diverso da 0 e b è uguale a 0 allora l'equazione è ....;
d. se sia a che b sono uguali a 0 allora l'equazione è ....

18 Data l'equazione $ax^2 = b$, se a non è nullo, allora la soluzione è:
a. $x = +\sqrt{\dfrac{b}{a}}$; **b.** $x = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$; **c.** $x = \pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

19 Data l'equazione $(x - a) \cdot (x - b) = 0$ per la legge di annullamento del prodotto si ha:
$x - a = ...$ $\Rightarrow$ $x = ...$ oppure $..... - b = ...$ $\Rightarrow$ $x = ...$

APPLICAZIONE

Risolvi le seguenti equazioni applicando i principi di equivalenza e fai la verifica della soluzione ottenuta.

20 *Esercizio Svolto*

a. $2x + 1 = x + 5$

Aggiungiamo ai due membri l'espressione algebrica $-x - 1$

$2x + \cancel{1} - \mathbf{x} - \cancel{\mathbf{1}} = \cancel{x} + 5 - \cancel{\mathbf{x}} - \mathbf{1} \quad \rightarrow \quad 2x - x = +5 - 1 \quad \rightarrow \quad x = 4.$

Verifica per $x = 4$: $2 \cdot 4 + 1 = 4 + 5 \quad \rightarrow \quad 8 + 1 = 9 \quad \rightarrow \quad 9 = 9$

Avendo ottenuto lo stesso risultato nei due membri, $x = 4$ è la soluzione dell'equazione.

b. $x + 5 = +12x - 6$

Applichiamo direttamente la legge del trasporto $+x - \mathbf{12x} = -6 - \mathbf{5} \quad \rightarrow \quad -11x = -11$

Cambiando segno, moltiplicando cioè per -1 entrambi i membri, si ottiene $11x = 11$

Dividendo entrambi i membri per 11 (2° principio) otteniamo $x = 1$.

Verifica per $x = 1$: $1 + 5 = 12 \cdot 1 - 6 \quad \rightarrow \quad 6 = 12 - 6 \quad \rightarrow \quad 6 = 6$

Avendo ottenuto lo stesso risultato nei due membri, $x = 1$ è la soluzione dell'equazione.

21 **a.** $3x - 2 = 5x + 6$; **b.** $x - 7 = +2x - 1$;

22 **a.** $3x - 4 = 2x + 2$; **b.** $2 - 3x = 8 - x$.

Risolvi le seguenti equazioni.

23 *Esercizio Svolto*

a. $3x - 2 + x = 4 + 4x \quad \rightarrow \quad 3x + x - 4x = 2 + 4 \quad \rightarrow \quad 0x = 6$

L'equazione è impossibile (nessun numero x moltiplicato per 0 dà come risultato $+6$).

b. $4x - 2 + x = 3x - 2 + 2x \quad \rightarrow \quad 4x + x - 3x - 2x = 2 - 2 \quad \rightarrow \quad 0x = 0$

L'equazione è indeterminata (qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà come risultato 0).

24 $5x - 2x + 2 = x + 2 + 2x$; $-3 + 4x + 1 = 2x + 4 + 2x$. [indeterminata; impossibile]

25 $4x - 3x + 3 - x = 3 \cdot (x + 2)$; $x + 3x - 4x + 5 = 4 - 2x + 1$. [$-1$; 0]

26 $3x - 5 + 2x - 7 = 2 - 5x + 1$; $2x + 2 \cdot (x - 1) = 4x + 5$. $\left[\frac{3}{2}; \text{ impossibile}\right]$

27 $4x + 3 \cdot (2x + 2) = 2x$; $4 - 3x + 1 = 8 - (x + 3) - 2x$. $\left[-\frac{3}{4}; \text{ indeterminata}\right]$

28 $2x - 3 = 2 \cdot (2x + 1) - 2x + 1$; $-3x - 4x + 1 = 3 \cdot (x + 2)$. $\left[\text{impossibile}; -\frac{1}{2}\right]$

29 $2 \cdot (x + 1) - 3x - 1 = -x + 1$; $2 + 5 \cdot (x - 1) = 4x - 2 \cdot (x + 1)$. $\left[\text{indeterminata}; \frac{1}{3}\right]$

30 $3x - 2(x + 4) = 2x - 2 - x - 6$. [indeterminata]

31 *Esercizio Svolto*

$\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} - 2 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{12}$.

Il m.c.m. dei denominatori è 12 pertanto:

$$12\cdot\frac{1}{4}x+12\cdot\frac{2}{3}-12\cdot2=12\cdot\frac{3}{2}x-12\cdot\frac{1}{12}\quad\rightarrow\quad 3x+8-24=18x-1\quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad 3x-18x=-8+24-1\quad\rightarrow\quad -15x=15\quad\rightarrow\quad 15x=-15\quad\rightarrow\quad x=-1$$

Possiamo concludere che $x=-1$ è la radice dell'equazione.

Verifica per $x=-1$:

$$\frac{1}{4}\cdot(-1)+\frac{2}{3}-2=\frac{3}{2}\cdot(-1)-\frac{1}{12}\quad\rightarrow\quad -\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-2=-\frac{3}{2}-\frac{1}{12}\quad\rightarrow\quad -\frac{19}{12}=-\frac{19}{12}.$$

32 $\frac{1}{2}x-x+\frac{1}{7}=\frac{3}{14}x-2.$ [3]

33 $3-3x-\frac{1}{3}x=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}+2x+\frac{5}{3}.$ $\left[\frac{22}{67}\right]$

34 *Esercizio Guidato*

$$\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-2=\frac{1}{7}x+2\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right).$$

Svolgiamo i calcoli nella parentesi tonda al secondo membro: $\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-2=\frac{1}{7}x+2x-......$

Il m.c.m. dei denominatori è 28 pertanto:

$$28\cdot\frac{1}{2}x+28\cdot\frac{3}{4}-28\cdot2=28\cdot\frac{1}{7}x+28\cdot2x-28\cdot3\quad\rightarrow\quad .....x+21-.....=4x+.....x-84$$

$$\rightarrow\quad 14x-4x-56x=-21+56-84\quad\rightarrow\quad .....x=.........\quad\rightarrow\quad x=\frac{49}{46}$$

35 $\frac{4}{5}+\frac{17}{15}x+1+2x=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\cdot(x-3).$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

36 $\frac{1}{2}(x+2)-\frac{4}{5}+x=(x-3)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right).$ $\left[-\frac{21}{40}\right]$

37 $\frac{4}{5}x+1-3\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}+2x-1.$ $\left[-\frac{5}{21}\right]$

38 $\frac{x+1}{6}-\frac{1}{2}+x\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2x-1}{3}.$ [0]

39 $\frac{2(x+3)}{12}+\frac{3(2-x)}{4}=\frac{1}{2}-\frac{2(2x-1)}{3}+\frac{3x+2}{4}.$ [impossibile]

40 $\dfrac{\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-2}=\dfrac{\frac{x}{3}+3}{\frac{1}{3}-2}.$ [2]

41 $\dfrac{\frac{x-3}{2}+\frac{x-5}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{3(x+1)}{4}-\frac{(x+1)}{2}}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}-\frac{1}{20}.$ [6]

42 $-\dfrac{\frac{x-1}{4}}{1+\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{2}{3}(x+2)}{1+\frac{1}{3}}=-\dfrac{\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}}{1+\frac{2}{3}}.$ $\left[-\frac{5}{16}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado riconducibili al primo.

43 *Esercizio Svolto*

$x \cdot (x-3) + 2x - 1 = (x-1) \cdot (x+1) + 2 \quad \rightarrow \quad \cancel{x^2} - 3x + 2x - \cancel{1} = \cancel{x^2} - \cancel{1} + 2 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad -x = +2 \quad \rightarrow \quad x = -2.$

44 $3x + x \cdot (2-x) = (x+1) \cdot (2-x) + 2.$ $[1]$

45 $2x - 3x \cdot (x-2) + 1 = -3x^2 + 4.$ $\left[\frac{3}{8}\right]$

46 $4x - 1 + 2x - (x-3) \cdot (2x+1) = -2x^2 - 3.$ $\left[-\frac{5}{11}\right]$

47 $x^2 - 3x + 1 = x(x-2) + 4.$ $[-3]$

48 $(x+2)(2x-1) + x - 3 = 2(x+1)(x-1) - 1.$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

49 $\frac{x^2+2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{(x-3)(x+1)}{3}.$ $\left[-\frac{13}{4}\right]$

50 $\frac{(2x+1)^2}{6} - \frac{5x-3}{2} = \frac{7}{4} + \frac{4(x-1)(x+1)}{6}.$ $\left[\frac{7}{22}\right]$

51 $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) + 3\left(x + \frac{1}{4}\right) = -(-2x+1).$ $\left[-\frac{15}{4}\right]$

52 $(x+3)^2(x-3)^2 + \left(\frac{1}{3}x - 1\right)^2 = (x^2-7)(x^2+7) - 6(3x^2+2) + \frac{1}{9}x(x-1) + 148.$ $[-9]$

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado di diverso genere.

53 *Esercizio Svolto*

$(5x-10) \cdot (2x+5) = 0.$

Applicando la legge di annullamento del prodotto:

- $5x - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad 5x = 10 \quad \rightarrow \quad x = \frac{10}{5} \quad \rightarrow \quad x = 2$
- $2x + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = -5 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{5}{2}$

54 $(2x-8) \cdot (7x+3) = 0;$ $\qquad (3x+2) \cdot (6x+3) = 0.$ $\left[4, -\frac{3}{7}; -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right]$

55 $(2x+5) \cdot (3-x) = 0;$ $\qquad (2x-7) \cdot (x+5) = 0$ $\left[-\frac{5}{2}, 3; \frac{7}{2}, -5\right]$

56 $(4x+1) \cdot (12x-6) = 0;$ $\qquad (2+3x) \cdot (4-2x) = 0.$ $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; -\frac{2}{3}, 2\right]$

57 $(2x+1)(x-3) = 0;$ $\qquad (2-4x)(4x+5) = 0.$ $\left[-\frac{1}{2}, 3; \frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right]$

58 *Esercizio Guidato*

a. $\frac{1}{2}x^2 - 200 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 = 200 \quad \rightarrow \quad x^2 = \ldots\ldots \cdot 2 = 400 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\ldots\ldots} = \pm 20$

Verifica per $x = 20$:

$\frac{1}{2} \cdot 20^2 - 200 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot ..... - 200 = 0 \quad \rightarrow \quad 200 - 200 = 0 \quad \rightarrow \quad ..... = ...$

Verifica per $x = -20$:

$\frac{1}{2} \cdot (-20)^2 - 200 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 400 - 200 = 0 \quad \rightarrow \quad 200 - 200 = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0$

Come possiamo notare, l'equazione è verificata sia per $x = ...$ che per $x = -.....$

b. $2x^2 + 3200 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 = -3200 \quad \rightarrow \quad x^2 = -\frac{3200}{.....} = -1600 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{..........}$

Come possiamo notare l'equazione risulta .... poiché non esiste alcun numero che elevato ...., dà come risultato -1600.

59 $3x^2 - 2700 = 0;$ $\quad$ $2x^2 + 5000 = 0.$ $\quad$ [± 30; impossibile]

LA RISOLUZIONE DI PROBLEMI MEDIANTE EQUAZIONI

richiami della teoria

- Fasi da sviluppare **per risolvere un problema con le equazioni**:
  a. **identificare i dati** del problema;
  b. **scegliere l'incognita** e indicarla con una lettera, generalmente la lettera x;
  c. **impostare** l'equazione risolutiva;
  d. **risolvere l'equazione**;
  e. **verificare** se la soluzione è accettabile o meno.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

60 In un problema si indica un numero pari con $2x$:
il numero pari successivo si indica con: **a.** $2x+1$ **b.** $2(x+1)$
il numero dispari precedente si indica con: **a.** $2x-1$ **b.** $2(x-1)$

61 In un problema si indica un numero dispari con $2x+1$ e risolvendo il problema si trova che $x=3$. Il numero dispari cercato è:
a. 3 **b.** 7 **c.** 5

APPLICAZIONE

Risolvi i seguenti problemi.

62 *Esercizio Svolto*

Calcola due numeri naturali sapendo che la loro differenza è 12 e che uno è il quadruplo dell'altro.

Identificazione dei dati e scelta dell'incognita

Indichiamo provvisoriamente i due numeri con N_1 ed N_2.

Dati	Incognite
$N_1,\ N_2 \in N$	N_1
$N_1 - N_2 = 12$	N_2
$N_1 = 4 \cdot N_2$	

$N_1 = \text{incognita} = x$
$N_2 = x - 12$

Equazione risolutiva

$N_1 = 4 \cdot N_2 \qquad x = 4 \cdot (x-12) \quad \rightarrow \quad x = 4x - 48 \quad \rightarrow \quad x - 4x = -48 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad -3x = -48 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{48}{3} = 16$

Il numero N_2 si ottiene per differenza: $16 - 12 = 4$.

Discussione: La soluzione è accettabile perchè i due numeri appartengono all'insieme dei numeri naturali.

Risposta: I due numeri sono 16 e 4.

63 Calcola due numeri naturali sapendo che la loro somma è 60 e che uno è il triplo dell'altro. [15; 45]

64 Determina tre numeri consecutivi la cui somma sia 33. [10; 11; 12]

65 *Esercizio Guidato*

Calcola due numeri naturali sapendo che la loro somma è 41 e la loro differenza è 11.

Identificazione dei dati e scelta dell'incognita

Per schematizzare i dati e le incognite del problema indichiamo provvisoriamente i due numeri con N_1 ed N_2.

Dati	Incognite
$N_1, N_2 \in N$	N_1
$N_1 + N_2 = ...$	N_2
$N_1 - N_2 = ...$	

Chiamiamo dunque $N_1 =$ incognita $= x$.
Dalla relazione $N_1 + N_2 = 41$ possiamo dire che $N_2 =$ somma $- N_1 = ... - x$.

Equazione risolutiva

$N_1 - N_2 = 11 \quad \to \quad x - (..... - x) = ... \quad \to \quad x - 41 + x = 11 \quad \to \quad x + x = 41 + 11 \quad \to$

$\to \quad 2x = 52 \quad \to \quad x = \frac{.....}{.....} \quad \to \quad x = ...$

Possiamo quindi dire che il primo numero è: $N_1 = ...$

Il numero N_2 si ottiene per differenza: $41 - 26 = 15$.

Discussione: La soluzione è accettabile perchè i due numeri appartengono all'insieme dei naturali come richiesto dai dati del problema.

Risposta: I due numeri sono 26 e 15.

66 Calcola due numeri naturali sapendo che la loro somma è 51 e la loro differenza è 9. [21; 30]

67 *Esercizio Guidato*

Trova due numeri naturali sapendo che la loro differenza è 2 e che il rapporto della loro somma e della loro differenza è 14.

Identificazione dei dati e scelta dell'incognita

Dati	Incognite
$N_1, N_2 \in N$	N_1
$N_1 - N_2 = ...$	N_2
$\dfrac{N_1 + N_2}{N_1 - N_2} = 14$	

Se indichiamo con x il maggiore dei due numeri, l'altro è $(x - 2)$.
$N_1 =$ incognita $= x$
$N_2 = x - 2$

Equazione risolutiva

$\dfrac{x + (x-2)}{x - (x-2)} = 14 \quad \to \quad \dfrac{x + x - 2}{x - ..... + ...} = 14 \quad \to \quad \dfrac{2x - 2}{.....} = 14 \quad \to \quad 2x - 2 = ... \cdot 2 \quad \to$

$\to \quad 2x = ... + 2 \quad \to \quad 2x = ... \quad \to \quad x = \dfrac{.....}{2} = ...$

Il minore dei due numeri è quindi $N_2 = x - 2 = ... - 2 = ...$

Discussione: La soluzione è accettabile perché i due numeri appartengono all'insieme dei numeri naturali.

Verifica

$$\frac{15+(.....-2)}{15-(.....-2)}=14 \quad \rightarrow \quad \frac{15+13}{15-13}=14 \quad \rightarrow \quad \frac{.....}{2}=14 \quad \rightarrow \quad .....=.....$$

Risposta: I due numeri sono 15 e 13.

68 Trova due numeri naturali sapendo che la loro differenza è 14 e che il rapporto della loro somma e della loro differenza è 3. [14; 28]

69 *Esercizio Guidato*

Un numero intero è formato da due cifre la cui somma è 12; sapendo che scambiando la cifra delle unità con quella delle decine, si ottiene un numero che è inferiore di 18 al numero dato, calcola il numero iniziale.

Identificazione dei dati e scelta dell'incognita

Se indichiamo con x la cifra della unità, quella delle decine è $(12-x)$; il numero si può allora così rappresentare:

$10(12-.....)$ $+x$
decine unità

Il numero ottenuto scambiando le cifre sarà:

.... $+(12-.....)$
decine unità

Dati	Incognite
$U,\ D \in N$	U
$U+D=12$	D
$10U+D=10D+U-18$	

Equazione risolutiva

$.....+(12-x)=.....\cdot(12-x)+x-18 \quad \rightarrow \quad 10x+12-x=120-10x+x-18 \quad \rightarrow$

$10x-x-x+10x=120-12-18 \quad \rightarrow \quad 18x=90 \quad \rightarrow \quad x=\frac{....}{....}=.... \quad \rightarrow$ cifra delle unità

La cifra delle decine è $12-x=12-.....=......$

Discussione: La soluzione è accettabile perché la cifra delle decine e quella delle unità appartengono all'insieme dei numeri naturali.

Risposta: Il numero richiesto è 75.

70 Un numero intero è formato da due cifre la cui somma è 10; sapendo che scambiando la cifra delle unità con quella delle decine, si ottiene un numero che è superiore di 18 al numero dato, calcola il numero. [46]

71 Determina un numero tale che sottraendo 5 dalla sua metà e aggiungendo il triplo del numero alla differenza trovata, si ottiene 9. [4]

72 Determina due numeri pari consecutivi sapendo che, sommando i $\frac{2}{3}$ del minore con i $\frac{5}{4}$ del maggiore, si ottiene 14. [6; 8]
(Suggerimento: ricorda che un numero pari si può esprimere con $2x$ di conseguenza il suo numero pari consecutivo con $2x+2$).

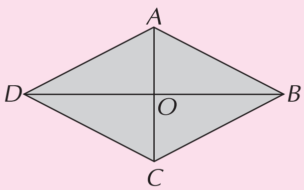
73 Calcola l'età di un padre e di un figlio sapendo che queste differiscono di 26 anni e che fra 3 anni l'età del figlio sarà metà di quella del padre. [49; 23]

Risolvi i seguenti problemi di geometria.

74 ***Esercizio Svolto***

La semidiagonale di un rombo è $\frac{3}{5}$ del lato; sapendo che l'altra diagonale misura 8 m, calcola l'area e il perimetro del rombo.

Identificazione dei dati e scelta dell'incognita



Dati	Incognite
$\overline{OA}, \overline{AB} \in R^+$	$A_{(ABCD)}$
$OA = \frac{3}{5} \cdot AB$	$2p_{(ABCD)}$
$\overline{BD} = 8$ m	

Se indichiamo con x la misura del lato del rombo, quella della semidiagonale OA è $\frac{3}{5}x$.

Equazione risolutiva

Poiché è nota la misura dell'altra semidiagonale, $\overline{BO} = \overline{BD} : 2 = (8 : 2)$ m $= 4$ m, avremo l'equazione risolutiva applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AOB.

$$x^2 - \left(\frac{3}{5}x\right)^2 = 4^2 \quad \rightarrow \quad x^2 - \frac{9}{25}x^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \frac{25x^2 - 9x^2}{25} = \frac{400}{25} \quad \rightarrow \quad 16x^2 = 400 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x^2 = \frac{400}{16} = 25 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Discussione: La soluzione accettabile è solo quella positiva, cioè $x = +5$.

Verifica: $5^2 - \left(\frac{3}{5} \cdot 5\right)^2 = 4^2 \quad \rightarrow \quad 25 - 9 = 16 \quad \rightarrow \quad 16 = 16$

Quindi: $\overline{AB} = 5$ m; $\quad \overline{OA} = \frac{3}{5} \cdot 5$ m $= 3$ m; $\quad \overline{AC} = 2 \cdot \overline{OA} = 2 \cdot 3$ m $= 6$ m.

$$A_{(ABCD)} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2} = \left(\frac{6 \cdot 8}{2}\right) \text{m}^2 = 24 \text{ m}^2$$

$$2p_{(ABCD)} = \overline{AB} \cdot 4 = (5 \cdot 4) \text{ m} = 20 \text{ m}$$

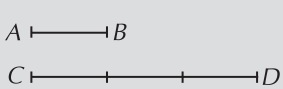
Risposta: L'area è 24 m^2 e il perimetro è 20 m.

75 Una dimensione di un rettangolo $\frac{5}{13}$ della diagonale; sapendo che l'altra dimensione misura 18 m, calcola l'area e il perimetro del rettangolo. [135 m^2; 51 m]

76 ***Esercizio Guidato***

Calcola la misura di due segmenti sapendo che la loro differenza è 22 m e uno è $\frac{1}{3}$ dell'altro.

Identificazione dei dati e scelta dell'incognita



Dati	Incognite
$\overline{AB}, \overline{CD} \in R^+$	$\overline{AB}$
$AB = \frac{1}{3} \cdot .....$	$\overline{CD}$
$\overline{CD} - ..... = 22$ m	

Se indichiamo con x la misura del segmento CD, il segmento AB misura ....x.

Equazione risolutiva

$..... - ..... = 22 \quad \rightarrow \quad 2x = ... \quad \rightarrow \quad x = 33$ m

Calcoliamo la misura di AB: $\overline{AB} = \frac{1}{3} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{3} \cdot 33 \text{ m} = 11 \text{ m}$

Discussione: La soluzione è accettabile perché ....

Verifica: $33 - \frac{1}{3} .... = 22 \quad \rightarrow \quad 33 - ..... = ... \quad \rightarrow \quad 22 = 22$

Risposta: I due segmenti misurano pertanto ....

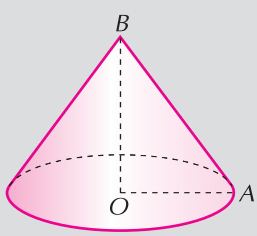
77 La misura di un segmento supera quella di un altro di 25 m e uno è $\frac{4}{9}$ dell'altro; calcola le due misure. [20 m; 45 m]

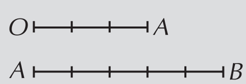
78 Determina l'area e il perimetro di un trapezio rettangolo sapendo che la proiezione del lato obliquo sulla base maggiore misura 12 cm, il lato obliquo è $\frac{5}{4}$ dell'altezza e che la base minore è congruente all'altezza stessa. [352 cm^2; 80 cm]

79 *Esercizio Guidato*

La geometria solida e le equazioni

Il raggio di base di un cono è $\frac{3}{5}$ dell'apotema; sapendo che l'area della superficie laterale è 60π cm^2, calcola il volume del cono.





Dati	Incognita
$\overline{OA}, \overline{AB} \in R^+$ $OA = \frac{3}{5} \cdot AB$ $A_\ell = 60\pi$ cm^2	V

Identificazione dei dati e scelta dell'incognita

Se indichiamo con x la misura dell'apotema, quella del raggio di base è .....x.

Equazione risolutiva

L'equazione risolutiva è data dalla formula del calcolo dell'area laterale: $A_\ell = \pi \cdot r \cdot a$.

$$\pi \cdot \frac{3}{5} \cdot x \cdot x = 60\pi \quad \rightarrow \quad \frac{3}{5}x^2 = 60 \quad \rightarrow \quad x^2 = ... \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{100} = \pm 10 \text{ cm}$$

Discussione: Delle due soluzioni è accettabile solo quella .... cioè $x =$ ....

Verifica: $\pi \cdot \frac{3}{5} \cdot 10 \cdot 10 = 60\pi \quad \rightarrow \quad \pi\, 6 \cdot 10 = 60\pi \quad \rightarrow \quad 60\pi = 60\pi$

Quindi: $\overline{AB} = 10$ cm; $\quad \overline{OA} = \frac{3}{5} \cdot \overline{AB} = \frac{3}{5} \cdot 10 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$

$$\overline{OB} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{10^2 - .....} \text{ cm} = \sqrt{..... - .....} \text{ cm} = \sqrt{64} \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} \text{ cm}^3 = 96\pi \text{ cm}^3.$$

80 Determina l'area della superficie totale e il volume di un parallelepipedo sapendo che una dimensione di base è doppia dell'altra, l'altezza misura 2 cm e l'area di base è 50 cm^2. $[160\ cm^2;\ 100\ cm^3]$

81 Le dimensioni di un parallelepipedo sono date da tre numeri consecutivi la cui somma è 48 m. Calcola il volume e l'area della superficie totale del parallelepipedo. $[4080\ m^3;\ 1534\ m^2]$

82 Il raggio di un cono è $\frac{5}{12}$ dell'altezza; calcola il volume del solido sapendo che l'area della superficie laterale è $3185\pi\ cm^2$. $[34300\pi\ cm^3]$

83 L'altezza di un cilindro è $\frac{4}{3}$ del raggio di base; sapendo che l'area della superficie totale è $1050\pi\ cm^2$, calcola la misura dello spigolo di un cubo equivalente al cilindro. [24,17 cm]

LE DISEQUAZIONI

richiami della teoria

- Una **disequazione** è una disuguaglianza di due espressioni verificata solo da particolari valori attribuiti all'incognita;
- **risolvere** una disequazione significa trovare tutte le soluzioni o radici;
- due disequazioni si dicono **equivalenti** quando hanno le stesse soluzioni;
- **1° principio di equivalenza:** addizionando o sottraendo ad entrambi i membri di una disequazione uno stesso numero o una stessa espressione algebrica, si ottiene una disequazione equivalente;
- **legge del trasporto:** in ogni disequazione un termine può essere trasportato da un membro all'altro purché lo si cambi di segno;
- **soppressione di termini uguali:** se in entrambi i membri di una disequazione figurano dei termini uguali, essi possono essere soppressi;
- **2° principio di equivalenza:**
  a. moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per **uno stesso numero positivo** otteniamo una disequazione equivalente;
  b. moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per **uno stesso numero negativo,** otteniamo una disequazione equivalente a quella data ma con tutti i **segni cambiati** e con **verso opposto**;
- per **risolvere** una disequazione di 1° grado ad una incognita occorre sviluppare le seguenti fasi:
  a. si riduce la disequazione a forma intera;
  b. si eliminano eventuali parentesi, eseguendo le operazioni indicate;
  c. si trasportano i termini che contengono l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo;
  d. si riduce la disequazione alla forma normale;
  e. se il **coefficiente della x non è positivo**, si rende tale moltiplicando per -1 entrambi i membri della disequazione con l'avvertenza di cambiare anche il **verso** della disequazione;
  f. si trova il valore della x con la stessa procedura usata nelle equazioni (come se il segno $>$ oppure $<$ fosse sostituito dal segno $=$);
  g. per maggior chiarezza, inoltre, si può rappresentare graficamente l'insieme delle soluzioni.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

84 Completa le seguenti affermazioni:
a. una disequazione è .... di due espressioni verificata solo da .... attribuiti alle ....;
b. risolvere una disequazione significa ....

85 Due disequazioni si dicono equivalenti se:
a. hanno qualche soluzione uguale;
b. non hanno soluzioni in comune;
c. hanno le stesse soluzioni.

86 Completa le seguenti regole:
a. addizionando o sottraendo ad entrambi i membri di una disequazione uno stesso numero o ...., si ottiene una disequazione ....;
b. in ogni disequazione un termine può essere .... da un membro all'altro purché ....

87 In una disequazione due termini si possono sopprimere quando:
a. sono uguali ed entrambi sono nello stesso membro;
b. sono opposti e figurano in membri diversi;
c. sono uguali e figurano in membri diversi.

88 Completa la seguente regola.
Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero:
a. positivo, diverso da zero, otteniamo una disequazione .... a quella data;
b. negativo, otteniamo una disequazione equivalente a quella data ma con tutti i segni .... e con verso ....

APPLICAZIONE

89 *Esercizio Svolto*

Risolvi la disequazione $-5x - 3 + 2x > +3 - x$ e rappresenta graficamente la sua soluzione.

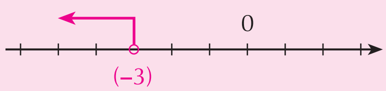
Trasportiamo al primo membro tutti i termini contenenti l'incognita e al secondo membro i termini noti.

$-5x + 2x + x > +3 + 3 \quad \rightarrow \quad -2x > +6.$

Moltiplicando per -1 entrambi i membri bisogna invertire il segno della disequazione, pertanto:

$$2x < -6 \quad \rightarrow \quad x < -\frac{6}{2} \quad \rightarrow \quad x < -3.$$

L'insieme delle soluzioni è dunque $\quad S = \{\forall x \in R : x < -3\}$.

Graficamente: 

(Il pallino vuoto sul numero significa che tale valore non va considerato)

90 Risolvi e rappresenta graficamente la disequazione $\quad 2x - 5x + 3 < -2 + 4x + 5$. $[x > 0]$

91 *Esercizio Svolto*

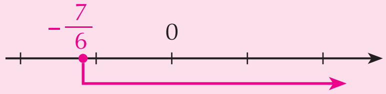
Risolvi la disequazione $+\frac{1}{3}x + \frac{5}{4} + x \geq \frac{5}{6}x + \frac{2}{3}$ e rappresenta graficamente la sua soluzione.

Per ridurre la disequazione alla forma intera calcoliamo il m.c.m. di tutti i denominatori, cioè 12.

$$12 \cdot \frac{1}{3}x + 12 \cdot \frac{5}{4} + 12 \cdot x \geq 12 \cdot \frac{5}{6}x + 12 \cdot \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad 4x + 15 + 12x \geq 10x + 8 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 4x + 12x - 10x \geq +8 - 15 \quad \rightarrow \quad 6x \geq -7 \quad \rightarrow \quad x \geq -\frac{7}{6}.$$

L'insieme delle soluzioni è dunque $\quad S = \left\{\forall x \in R : x \geq -\frac{7}{6}\right\}$.

Graficamente: 

(Il pallino pieno sul numero significa che tale valore deve essere considerato)

92 Risolvi la disequazione $\frac{3}{2} + \frac{1}{5}x - \frac{6}{15} \geq \frac{1}{2}x + 1$ e rappresenta graficamente la sua soluzione. $\left[x \leq \frac{1}{3}\right]$

93 Risolvi la disequazione $\frac{x-1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2x}{6} \leq \frac{2x+1}{3} - 1$ e rappresenta graficamente la sua soluzione. $[x \geq 1]$

94 Risolvi la disequazione $\frac{2x+1}{3} - \frac{2-x}{7} \geq \frac{x-1}{21} + \frac{4}{3}$ e rappresenta graficamente la sua soluzione. $\left[x \geq \frac{13}{8}\right]$

Risolvi le seguenti disequazioni.

95 $\frac{x-2}{4} + \frac{1-4x}{2} + \frac{1}{8} \leq \frac{7}{8} - \frac{3-2x}{4}$. $[x \geq 0]$

96 $\frac{2(2x+1)}{3} + \frac{2(x-1)}{3} + \frac{1}{9} \geq \frac{x+3}{3} - \frac{1}{9}x$. $\left[x \geq \frac{1}{2}\right]$

97 $(2x+3)^2 - (2x+3)(2x-3) > 6(x-2)$. $[x > -5]$