

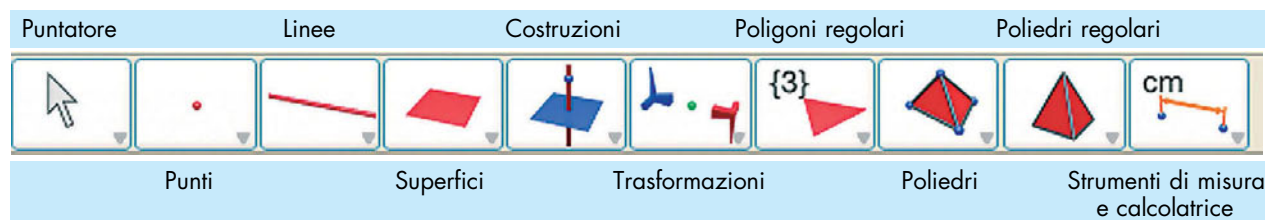


# Matematica in laboratorio

## 1. LA GEOMETRIA DELLO SPAZIO CON CABRI 3D

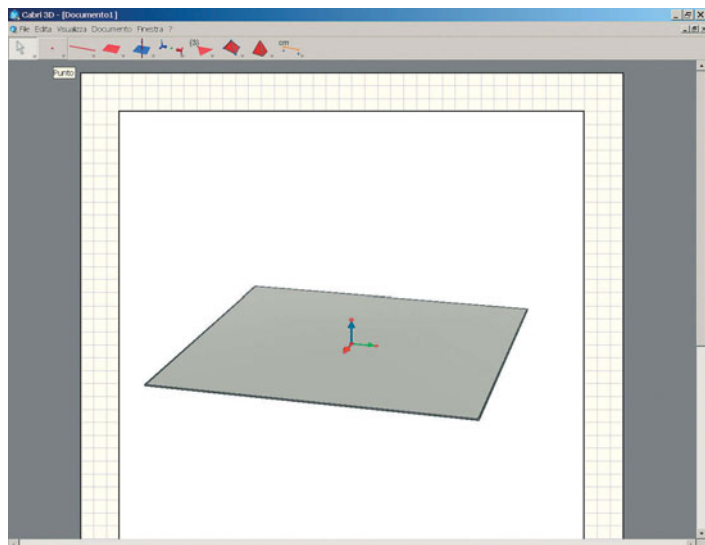
Cabri 3D è un software che, consentendo una facile costruzione di solidi, piani e figure dello spazio in genere, permette di mettere in evidenza caratteristiche e proprietà delle quali è difficile rendersi conto con il disegno manuale.

La sua struttura è del tutto simile a quella dell'analogo software che opera nel piano; gli strumenti di disegno e costruzione sono raggruppati nella **Barra degli strumenti**, suddivisi nei gruppi rappresentati dalle icone che puoi vedere di seguito.



All'apertura, Cabri 3D crea in modo automatico una zona di lavoro a sfondo bianco (detta anche **vista**) che contiene un piano detto piano di base, con un sistema di riferimento rappresentato da tre vettori ortogonali. La parte in grigio di questo piano è la parte visibile (PV) che occorre però pensare prolungata indefinitamente. Tutte le costruzioni di punti, rette, solidi, vengono sempre poste inizialmente sul piano di base (all'interno della PV o fuori di essa).

Come esempio iniziale, costruiamo un parallelepipedo rettangolo e vediamo come operano i principali comandi di gestione della pagina video.



### ■ Per costruire un parallelepipedo rettangolo:

1. clicca sull'icona *Poliedri* e scegli lo strumento **Parallelepipedo XYZ**
2. clicca in un punto della PV (primo vertice della base del parallelepipedo) e sposta il mouse fino a definire la base del parallelepipedo (il puntatore indica il vertice opposto del rettangolo di base; attenzione: non si deve cliccare)

3. tenendo premuto il tasto Maiuscolo della tastiera sposta il mouse verso l'alto (o verso il basso) per definire l'altezza del parallelepipedo;
4. quando hai deciso quali devono essere le sue dimensioni, clicca in modo da confermare la costruzione.

Le dimensioni e la posizione del parallelepipedo nel piano di base possono essere modificate in modalità *Puntatore* agendo in questo modo:

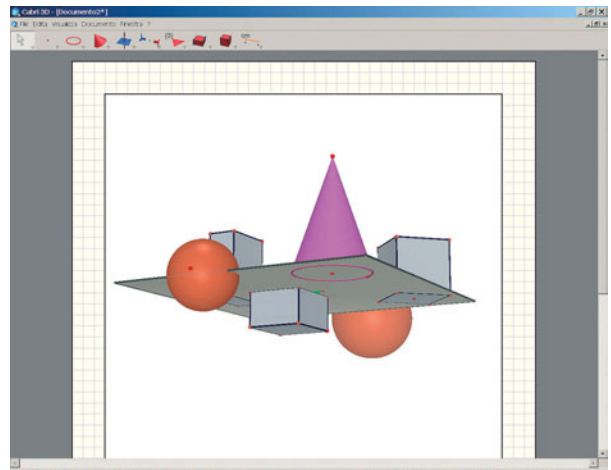
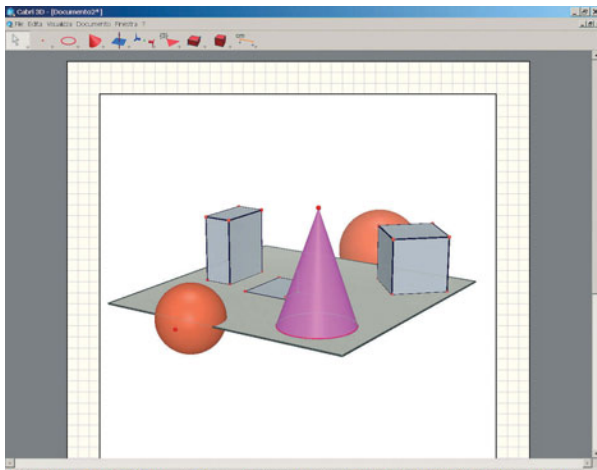
- per variare le dimensioni: clicca sull'ultimo punto scelto (quello che è servito per definire l'altezza) e trascinalo fino a raggiungere le nuove dimensioni;
- per variare la posizione: clicca in un punto qualsiasi del solido (un vertice o una faccia) e trascinalo.

Anche quando, durante il trascinamento, il solido esce dalla PV, ricorda che non abbandona mai il piano di base.

## ■ Il punto di vista

Qualunque costruzione viene vista "dall'esterno" secondo una certa angolazione che può essere variata mediante trascinamento del mouse con il tasto destro quando ci si trova in modalità *Puntatore*.

Nella figura che segue abbiamo rappresentato alcuni solidi (che imparerai a costruire nel corso di questa esercitazione) secondo punti di vista diversi.



## Come disegnare e spostare punti

Un punto si disegna con lo strumento **Punto** dell'icona *Punti* con un clic del mouse sul piano di base; tutti i punti, sia che il mouse sia posizionato sulla PV o al di fuori di essa, vengono inizialmente disegnati nel piano di base. Per creare un punto al di fuori del piano di base, si deve usare il tasto Maiuscolo e, tenendolo premuto, spostare il mouse nella posizione in cui si vuole creare il punto.

Attenzione al messaggio che identifica ciascun punto del piano di base in fase di creazione:

- se il punto appartiene alla PV il messaggio è:  
*un nuovo punto (sul piano)*
- se il punto appartiene al piano di base ma non è sulla PV il messaggio è:  
*un nuovo punto (nello spazio)*

La differenza è sostanziale, in quanto un punto che appartiene alla PV può essere spostato solo sul piano di base e non può uscire da esso, mentre un punto che appartiene al piano di base, ma non alla PV, può essere spostato anche in un piano diverso da quello di base.

Un punto qualsiasi può essere spostato:

- lungo il piano stesso con il metodo del trascinamento
- al di fuori del piano cui appartiene trascinando il mouse dopo aver premuto il tasto Maiuscolo (questo comando non ha effetto sui punti della PV).

Per imparare ad usare questi comandi, disegna alcuni punti sul piano di base, sia nella PV che al di fuori di essa, e alcuni punti non sul piano di base; cambia adesso l'angolo di visuale usando il tasto destro del mouse per verificare la posizione dei punti in relazione al piano di base. Prova poi a spostarli cercando di far uscire dal piano di base quelli che vi appartengono.

### **Come tracciare rette e piani**

**Per tracciare una retta** si usa lo strumento **Retta** dell'icona *Linee* andando a selezionare due punti del piano di base; la retta giace dunque su tale piano.

Per costruire una retta che non appartiene al piano di base si possono eseguire due differenti costruzioni:

- disegnare la retta sul piano di base selezionando i due punti in modo che almeno uno di essi non appartenga alla PV e trascinare poi il punto non sulla PV al di fuori del piano di base;
- disegnare un punto che non appartiene al piano di base e condurre per esso la retta (l'altro punto può essere scelto sul piano di base).

Operazioni analoghe devono essere eseguite per tracciare semirette e segmenti.

**Per tracciare un piano** si usa lo strumento **Piano** dell'icona *Superfici*. Sono possibili diverse costruzioni, ciascuna corrispondente ad una proprietà diversa dei piani; per ognuna di esse è comunque necessario aver definito in primo luogo un punto non appartenente al piano di base, chiamiamolo *A*.

- Piano per tre punti: dopo aver selezionato lo strumento **Piano**:
  - clicca su *A* e su altri due punti sul piano di base, oppure:
  - definisci prima altri due punti oltre ad *A* e clicca poi su ciascuno di essi.
- Piano definito da due rette complanari:
  - disegnare due rette passanti per *A*
  - attivare lo strumento **Piano** e selezionare le due rette.
- Piano definito da una retta e un punto:
  - disegnare una retta passante per *A*
  - attivare lo strumento **Piano** e selezionare la retta e un punto fuori di essa.

In modo analogo si costruiscono:

- un semipiano (occorre aver definito la retta origine e scegliere poi un punto che non le appartiene);
- un angolo convesso (si seleziona il vertice e altri due punti per definire le semirette che lo individuano);
- un triangolo (si selezionano i tre punti che ne sono i vertici).

### **Perpendicolarità e parallelismo nello spazio**

L'icona *Costruzioni* contiene tutti gli strumenti per costruire rette e piani mutuamente perpendicolari oppure paralleli.

- Con lo strumento **Perpendicolare** si possono costruire:
  - la retta perpendicolare a un piano:
    - disegnare il piano e il punto *A* dal quale si vuole tracciare la perpendicolare
    - selezionare lo strumento **Perpendicolare**
    - cliccare sul punto *A* e sul piano (l'ordine può anche essere invertito);
  - il piano perpendicolare a una retta:
    - disegnare la retta
    - selezionare lo strumento **Perpendicolare**
    - cliccare sulla retta e sul punto per il quale deve passare il piano (l'ordine può anche essere invertito);
  - la retta perpendicolare a un'altra retta:
    - disegnare la prima retta
    - selezionare lo strumento **Perpendicolare**
    - cliccare sulla retta e, **tenendo premuto il tasto Ctrl**, cliccare sul punto per il quale deve passare la retta.

■ Con modalità del tutto analoghe alle precedenti, lo strumento **Parallelo** consente di tracciare:

- una retta parallela a un'altra retta
- un piano parallelo a un altro piano.

## Il teorema delle tre perpendicolari

Utilizzando gli strumenti che abbiamo descritto, possiamo verificare il teorema delle tre perpendicolari che ricordiamo di seguito:

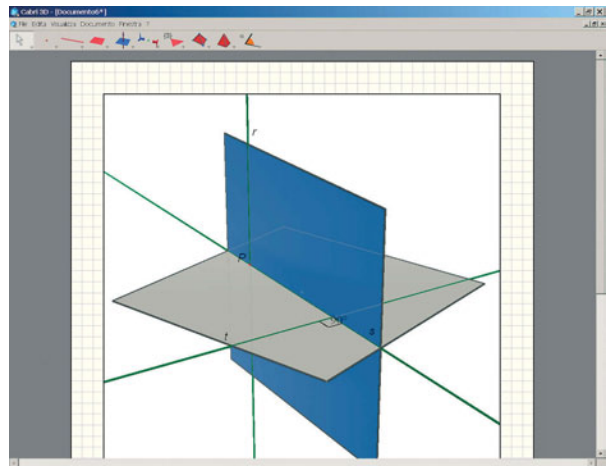
*dato un piano  $\alpha$  e una retta  $r$  ad esso perpendicolare che lo incontra in  $P$ , sia  $t$  una retta di  $\alpha$  non passante per  $P$  e sia  $s$  la perpendicolare a  $t$  passante per  $P$ ; allora la retta  $t$  è perpendicolare al piano definito da  $r$  e da  $s$ .*

Assumiamo come piano  $\alpha$  il piano di base; esegui le seguenti costruzioni tenendo presente che per attribuire un nome a un oggetto basta cliccare su di esso e digitare il nome da tastiera (per le lettere greche occorre usare il corrispondente codice ASCII preceduto dal tasto ALT: per esempio ALT + 225 corrisponde a  $\beta$ ):

- preso un punto  $P$  su  $\alpha$ , traccia la retta  $r$  perpendicolare al piano di base
- traccia una retta sul piano di base e indicala con  $t$
- traccia da  $P$  la perpendicolare alla retta  $t$  e indicala con  $s$
- traccia il piano  $\beta$  passante per le rette  $r$  e  $s$ .

Per verificare che il piano così costruito è perpendicolare alla retta  $t$  si può usare lo strumento **Misura di un angolo** dell'icona *Strumenti di misura*. Selezionando la retta e il piano viene evidenziato che l'angolo è di  $90^\circ$ .

Nelle figura a lato è rappresentata l'immagine che si ottiene da questa costruzione; in essa abbiamo modificato il colore delle rette e nascosto alcuni oggetti che non servono alla rappresentazione del teorema. Per fare queste operazioni si deve agire con il tasto destro del mouse su ciascun oggetto e scegliere le impostazioni dal menu che viene proposto.



## La costruzione dei poliedri

Abbiamo già visto come si costruisce un parallelepipedo rettangolo; con modalità analoghe si possono costruire poliedri di ogni genere usando gli strumenti dell'icona *Poliedri*. La cosa da tenere presente è che almeno uno dei punti che servono per individuare il solido non deve appartenere allo stesso piano degli altri, altrimenti il solido risulta "appiattito" sul piano. Diamo di seguito le indicazioni per la costruzione dei principali poliedri.

- Un **tetraedro** è definito da 4 punti che sono i suoi vertici, tre dei quali appartengono ad uno stesso piano mentre il quarto deve trovarsi su un piano diverso.
- Un **prisma** si può costruire se prima si sono disegnati:
  - il poligono di base con lo strumento **Poligono** dell'icona *Superfici* oppure con gli strumenti dell'icona *Poligoni regolari*
  - un vettore (dall'icona *Linee*) che rappresenta l'altezza del prisma.

Dopo aver selezionato lo strumento **Prisma** basta ora indicare il poligono e il vettore.

- Anche per costruire una **piramide** si deve prima disegnare il poligono di base; dopo aver selezionato lo strumento **Piramide** è sufficiente poi indicare la base e un punto non appartenente al piano di base che ne sia il vertice.

Uno strumento interessante è **Apri poliedro** che consente di aprire le facce del solido ed eventualmente svilupparle su un piano. Nella figura a lato abbiamo costruito un prisma regolare avente per base un pentagono e abbiamo poi applicato ad esso questo strumento; lo sviluppo piano può essere completato trascinando con il mouse una delle facce.

Le potenzialità di questo software sono davvero interessanti e senza dubbio possono facilitare l'apprendimento delle proprietà delle figure nello spazio. Per acquisire maggiori abilità nel suo utilizzo ti consigliamo di eseguire le costruzioni proposte di seguito e di provare l'uso degli strumenti che non abbiamo potuto descrivere; troverai un aiuto nel manuale di utilizzo che trovi in corrispondenza del punto di domanda nella riga dei menu.

