ESERCIZI E PROBLEMI DI RIEPILOGO

1 Verifica che tutte le primitive delle funzioni $f(x) = -\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ e $g(x) = -(x+4)^{-2}$, per lo stesso valore della costante additiva, si intersecano nei punti di ascissa $x = \pm 2$. Scelta poi la primitiva $F(x)$ di $f(x)$ che passa anche per il punto di coordinate $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ e la primitiva $G(x)$ di $g(x)$ che passa per il punto di coordinate $\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$, studia le due funzioni F e G. Stabilisci poi se è finita l'area della parte di piano racchiusa fra le due funzioni e l'asse delle ascisse e calcolane in questo caso la misura.

$$\left[F(x) = \frac{1}{x(x+1)},\ G(x) = \frac{1}{x+4},\ \text{area} = 2\ln 3\right]$$

2 Studia le funzioni $f(x) = xe^{-3x^2}$ e $g(x) = xe^{-6x^2}$, tracciane i corrispondenti grafici e determina l'area racchiusa dalle due curve. Traccia per il punto M di massimo relativo di g una retta che intersecando i semiassi positivi cartesiani formi con essi un triangolo di area minima.

$$\left[\text{area} = \frac{1}{6};\ M\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{e}}\right),\ m = -\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$$

3 Studia la funzione γ di equazione $y = x^4 - 2x^2 + 2x + 1$ e tracciane il grafico; considerata poi la parabola $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1$:

a. verifica che nel punto di ascissa nulla le due curve sono tangenti e scrivi l'equazione della tangente comune t;

b. verifica che le due funzioni hanno tangenti parallele, oltre che nei punti estremanti, in altri due punti dei quali si chiede l'ascissa;

c. calcola l'area della regione di piano compresa fra la retta t e la curva γ.

Successivamente, considerata una retta r che passa per il punto $A(0,\ 1)$, sia B l'ulteriore intersezione di r con la parabola; costruisci la funzione che esprime la misura del segmento AB al variare del coefficiente angolare m della retta r e rappresentane il grafico.

$$\left[\mathbf{a}.\ y = 2x+1;\ \mathbf{b}.\ x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2};\ \mathbf{c}.\ \frac{16\sqrt{2}}{15};\ \overline{AB} = 2|m-2|\sqrt{m^2+1}\right]$$

4 Sia A un punto della parabola di equazione $y = \dfrac{1}{4}x^2 - 2x$ e sia A' la sua proiezione sull'asse x; siano poi B' il simmetrico di A' rispetto all'origine e B il punto della parabola avente la stessa ascissa di B'. Dimostra che:

a. le rette tangenti alla parabola condotte per A e per B si incontrano in un punto C che appartiene all'asse y e determina le sue coordinate;

b. è costante il rapporto tra le aree delle due superfici delimitate rispettivamente dalla corda AB e dalla parabola, dalle due rette tangenti e dalla parabola e calcolane il valore.

$$\left[\text{indicata con } a \text{ l'ascissa del punto } A:\ \mathbf{a}.\ C\left(0,\ -\frac{1}{4}a^2\right);\ \mathbf{b}.\ \text{rapporto} = 2\right]$$

5 Studia le funzioni $f(x) = \dfrac{1+x}{e^x}$ e $g(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x + 1)^2}$ e costruiscine il grafico; successivamente:

a. dimostra che è finita l'area della parte di piano delimitata da ciascuna delle due curve e dall'asse delle ascisse nel semipiano $x \geq 1$ e calcola quindi il valore dell'area della regione delimitata dalle due curve in tale semipiano;

b. sfruttando i due grafici precedenti e applicando uno dei metodi di risoluzione approssimata, trova le radici dell'equazione $f(x) + g(x) = 0$ con due cifre decimali esatte.

[**a**. area $= 3e^{-1} + 1$; ci sono due radici: $x = 1{,}14$ e $x = 5{,}62$]

6 Studia la funzione $f(x) = \dfrac{e^{\arctan x}}{x^2+1}$ determinando, in particolare, i suoi punti estremanti e i suoi punti di flesso e tracciane il grafico; successivamente:

a. verifica che l'area della parte di piano da essa delimitata con l'asse x è finita e calcolane il valore;

b. a partire dal grafico di $f(x)$ costruisci quello di $g(x) = f(|x|)$;

c. determina infine il rapporto fra le aree sottese dalle funzioni f e g nel semipiano positivo delle ordinate.

$\left[\mathbf{a}.\ \dfrac{e^{\pi}-1}{e^{\frac{\pi}{2}}};\ \mathbf{c}.\ \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2e^{\frac{\pi}{2}}}\right]$

7 E' data la funzione $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x^2+1} & 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{a}{x(1+\ln x)} & x > 1 \end{cases}$; determina per quale valore del parametro reale a la funzione è continua e, in corrispondenza di tale valore, traccia il suo grafico. Considerato il tratto di curva compreso fra l'origine O e il punto A di massimo assoluto, trova il volume del solido che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse x la regione di piano compresa fra l'arco OA e la retta $y = 0$.

$\left[a = \sqrt{2};\ A\left(1, \sqrt{2}\right);\ V = \dfrac{8}{15}\pi\right]$

8 In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy è data la famiglia di curve di equazioni $y = f(x)$ essendo $f(x) = ke^{\frac{x^2}{2}} - x$ con $k \in R$.

a. Determina per quale valore di k la funzione presenta un punto estremante in $x = 2$ e stabilisci se si tratta di un minimo o un massimo.

b. Verificato che la precedente condizione si ottiene per $k = \dfrac{1}{2e^2}$, trova, in corrispondenza di tale valore di k, i valori approssimati, con almeno due cifre decimali esatte, degli zeri della funzione.

c. Considerata la funzione $g(x) = f'(x)$, trova l'equazione della tangente t nel suo punto di flesso.

d. Determina infine l'area della parte di piano delimitata da $g(x)$ e dalla retta t nell'intervallo $[0, 2]$.

$\left[\mathbf{b}.\ \text{radici}: 0{,}06 \text{ e } 2{,}71;\ \mathbf{c}.\ y = \dfrac{1}{2e^2}x - 1;\ \mathbf{d}.\ \text{area} = \dfrac{e^2-3}{2e^2}\right]$

9 Considerata la funzione $f_k(x) = \dfrac{x^2+1}{|x+k| - 2k}$ con k parametro reale:

a. trova il suo insieme di definizione e studiane la continuità e la derivabilità;

b. posto $k = -1$, studia la funzione $f_{-1}(x)$ e rappresentala in un sistema cartesiano studiando in particolare i punti di non derivabilità e determinandone gli asintoti;

c. calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva grafico di $f_{-1}(x)$, dai suoi asintoti e dalle rette $x = -2$ e $x = 2$.

[**a**. $k \geq 0$: dominio $x \neq -3k \wedge x \neq k$, continua, non derivabile in $x = -k$; $k < 0$: dominio R, continua, non derivabile in $x = -k$
b. $f_{-1}(x)$: non derivabile in $x = 1$; asintoti: $y = -x - 3$ sinistro e $y = x - 1$ destro; **c**. area $= 2\ln\dfrac{9375}{64} - 4$]

10 In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy è data la famiglia di curve di equazioni $y = \dfrac{x^3}{x^2 - k}$ con $k \in R$.

a. Dimostra che tutte passano per uno stesso punto A, di cui si chiedono le coordinate, e verifica che A è anche il centro di simmetria delle curve della famiglia.
b. Determina per quali valori di k esistono un punto di massimo e uno di minimo relativi.
c. Calcola, in funzione di $k > 0$, l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva, dagli assi cartesiani e dalle rette $x - \dfrac{\sqrt{k}}{2} = 0$ e $x + \dfrac{\sqrt{k}}{2} = 0$, stabilendo per quale valore di k tale area è uguale a $\dfrac{1}{4}$.

$\left[\textbf{a}.\ \text{centro di simmetria: l'origine; } \textbf{b}.\ k > 0;\ \textbf{c}.\ k = -\dfrac{1}{1 + 4 \ln \dfrac{3}{4}}\right]$

11 Considerate le parabole $\gamma : y = x^2 - 4x$ e $\gamma' : y = -\dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{9}{2}$, sia B il loro punto di intersezione di ascissa positiva; considerato il fascio di rette di origine B, sia C l'ulteriore punto di intersezione della retta del fascio con γ e D l'ulteriore punto di intersezione con γ'.

a. Costruisci la funzione $y = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ in funzione del coefficiente angolare m della retta del fascio e rappresentala graficamente.
b. Interpreta dal punto di vista geometrico la situazione in corrispondenza del punto di minimo e fornisci la spiegazione del perché la funzione non è superiormente limitata.
c. Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva nell'intervallo $[-2, 6]$.

$\left[\textbf{a}.\ y = \dfrac{|m-2|}{2|m+4|};\ \textbf{b}.\ \text{minimo per } m = 2 : \overline{BC} = 0, \text{ per } m \to -4 : \overline{BD} \to 0;\ \textbf{c}.\ \text{area} = 3 \ln \dfrac{9}{5}\right]$

12 Del triangolo ABC rettangolo in A si sa che $\overline{AC} = 3a$ e che $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{3}{5}$; considerata una retta r passante per A che non interseca il triangolo, sia x l'angolo che r forma con il cateto AB. Esprimi, in funzione di x, la superficie totale $S(x)$ del solido che si ottiene facendo ruotare il triangolo di una rotazione completa attorno a r; studia e rappresenta graficamente la funzione ottenuta indipendentemente dall'intervallo individuato dal problema. Trova infine l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva e dall'asse x nell'intervallo $[0, k]$ essendo k l'ascissa del primo punto in cui la curva interseca l'asse delle ascisse nella sua parte positiva.

$\left[S(x) = 12a^2\pi(2 \cos x + 3 \sin x);\ \text{area} = 12\pi a^2\left(\sqrt{13} + 3\right)\right]$

13 In una circonferenza di centro O e raggio unitario è data una corda $\overline{AB} = 2x$; esprimi in funzione di x il rapporto fra AB e la sua distanza dal centro e studia la curva Γ ottenuta tenendo conto dei limiti imposti dal problema. Successivamente:

a. verifica che è finita l'area della regione illimitata di piano delimitata da Γ, dal suo asintoto verticale e dall'asse x;
b. considerato un punto A di Γ di ascissa k, con $k \in [0, 1]$, calcola il volume V del solido che si ottiene facendo ruotare, di una rotazione completa attorno all'asse x, la regione di piano delimitata dalla curva Γ, dall'asse x e dalla retta $x = k$ ed esprimi tale volume in funzione di k;
c. studia la funzione $V(k)$ così ottenuta e verifica che per $k \to 1$ il volume del solido non è finito.

$\left[y = \dfrac{2x}{\sqrt{1 - x^2}};\ \textbf{a}.\ \text{area} = 2;\ \textbf{b}.\ V(k) = -2\pi \ln\left|\dfrac{1-k}{1+k}\right| - 4\pi k\right]$

14 E' dato un triangolo equilatero ABC di lato $\overline{AB} = 2$; tracciando la perpendicolare al piano del triangolo passante per A e prendendo su di essa un punto V in modo che sia $\overline{VA} = 6$, si ottiene una piramide $VABC$ avente per base il triangolo e per altezza il segmento VA. Un piano parallelo al piano di ABC taglia la piramide formando il triangolo PQR con $P \in VA$. Posto $\overline{VP} = x$, esprimi in funzione di x il volume V_1 del solido avente per vertici i punti P, R, C, B, Q; successivamente:

a. studia la funzione di equazione $y = V_1(x)$ e rappresentala graficamente indipendentemente dalle limitazioni imposte dal problema;

b. considerato un piano α parallelo alla faccia VBC della piramide $VABC$ e supposto che P sia il punto medio del segmento VA, trova il volume V_2 della piramide di vertice P che ha come base il triangolo individuato dal piano α; esprimi tale volume in funzione del segmento $\overline{AD} = x$, essendo D il vertice del triangolo di base che appartiene al lato AB;

c. trova a quale distanza dal punto P deve essere condotto il piano α in modo che V_2 sia uguale a $\frac{9}{32}\sqrt{3}$.

$\left[\mathbf{a.}\ V_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{108}x(36 - x^2);\ \mathbf{b.}\ V_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2(x-1);\ \mathbf{c.}\ \text{distanza} = \frac{3\sqrt{13}}{26}\right]$

15 E' data la funzione $f(x) = \begin{cases} ae^x & x \leq 0 \\ \ln(x+1) + 2 & 0 < x < 2 \\ bx^2 + x & x \geq 2 \end{cases}$. Determina:

a. per quali valori dei parametri reali a e b la funzione è continua;

b. per i valori di a e b individuati al punto precedente, studia la sua derivabilità classificando gli eventuali punti di non derivabilità;

c. traccia il grafico di $f(x)$ e stabilisci se è finita l'area della regione di piano delimitata dalla curva e dall'asse delle ascisse per $x \leq 0$ e in tal caso determinane il valore;

d. calcola l'area della regione di piano delimitata dalla curva e dall'asse delle ascisse per $x \leq 3$.

$\left[\mathbf{a.}\ a = 2,\ b = \frac{\ln 3}{4};\ \mathbf{b.}\ x = 0 \text{ e } x = 2 \text{ punti angolosi};\ \mathbf{c.}\ \text{area} = 2;\ \text{area} = \frac{13}{2} + \frac{55}{12}\ln 3\right]$

16 Studia la funzione $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{4-t}}\,dt$ e costruiscine il grafico G; successivamente:

a. dimostra che nell'intervallo $[-2, 2]$ $f(x)$ è invertibile, scrivi l'equazione della funzione inversa f^{-1} e costruiscine il grafico G';

b. calcola l'area della regione finita di piano R compresa fra G e G';

c. calcola il volume del solido generato da una rotazione completa di R attorno all'asse delle ascisse.

$\left[\mathbf{a.}\ f(x) = 4 - 2\sqrt{4-x};\ f^{-1}(x) \text{ se } x < 4 : y = \frac{x(8-x)}{4};\ \mathbf{b.}\ \text{area} = \frac{16}{3};\ \mathbf{c.}\ V = \frac{352}{15}\pi\right]$

17 Studia la funzione $f(x) = x^3 + 2|x| - 1$ e costruisci il suo grafico G; determina poi il dominio della funzione derivata $f'(x)$ e costruiscine il grafico G' a partire da G. Servendoti poi di un metodo a tua scelta, trova un valore approssimato dell'ascissa x_0 del punto di intersezione di G e G' che si trova nel secondo quadrante e calcola poi un valore approssimato dell'area della regione finita di piano delimitata dai due grafici nell'intervallo $[x_0, 0]$. $[x_0 \approx -0{,}83;\ \text{area} = 0{,}8285]$

18 In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono date la circonferenza con centro nell'origine e raggio unitario e la parabola di vertice $V(0, -1)$ che determina insieme all'asse delle ascisse una regione di area $\frac{4}{3}$. Dopo aver trovato l'equazione delle due curve:

a. calcola l'area di ciascuna delle due parti in cui la circonferenza viene suddivisa dalla parabola nel semipiano positivo delle ascisse;

b. trova il volume del solido che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse y la regione di superficie minore individuata al punto precedente;

c. detto V il vertice della parabola e A il punto di ascissa positiva nel quale essa interseca l'asse x, sia P un punto dell'arco VA di ascissa a; condotta da P la retta t tangente alla parabola, sia

$f(a)$ la funzione che esprime la distanza dell'origine dalla retta t; determina la posizione del punto P in modo che tale distanza sia minima oppure massima.

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1,\ y=x^2-1;\ \textbf{a}.\ \frac{\pi}{4}-\frac{2}{3},\ \frac{\pi}{4}+\frac{2}{3};\ \textbf{b}.\ V=\frac{1}{6}\pi; \\ \textbf{c}.\ f(a)=\frac{a^2+1}{\sqrt{4a^2+1}},\ \text{minimo per } a=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{massimo per } a=0 \end{array}\right]$$

19 Data la famiglia di curve di equazione $y=\dfrac{a}{x^2+b}$, determina quella che ha come asintoto verticale l'asse y e che passa per il punto di intersezione delle rette $x-y+7=0$ e $5x-2y+11=0$. Detta f tale funzione:

a. verifica che è finita l'area della regione illimitata di piano da essa delimitata insieme al suo asintoto orizzontale per $x \geq k$, essendo k un numero reale positivo;

b. considerato il fascio di rette di equazione $y=mx$, determina m in modo che l'area della regione di piano delimitata dalla retta, dalla curva e dall'asse x nel semipiano positivo delle ascisse sia uguale a $6\sqrt[3]{3}$;

c. considerata la funzione f' il cui grafico è simmetrico di f rispetto all'asse delle ascisse, siano P e P' due punti di f e di f' aventi la stessa ascissa; considera il cilindro che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse y il rettangolo avente come vertici P, P' e le loro proiezioni sull'asse y e verifica che il suo volume è costante.

$$\left[y=\frac{8}{x^2};\ \textbf{a}.\ \text{area}=\frac{8}{k};\ \textbf{b}.\ m=3;\ \textbf{c}.\ V=16\pi\right]$$

20 Nel piano cartesiano Oxy ad assi ortogonali monometrici, è data la semicirconferenza Γ definita dal sistema $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ y\geq 0\end{cases}$. Considerato il triangolo OAM, dove O è l'origine degli assi cartesiani, A è l'estremo del diametro di Γ di ascissa positiva, M è un generico punto appartenente alla semicirconferenza, sia P il punto d'intersezione del segmento AM con la bisettrice dell'angolo $\widehat{AOM}$.

a. Determina il luogo descritto dal punto P al variare di M su Γ.

b. Dopo aver verificato che l'equazione del luogo è $y=|x|\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$, studia l'andamento della funzione indipendentemente dalle limitazioni del problema geometrico.

c. Calcola il volume del solido che si ottiene mediante una rotazione completa attorno all'asse x della regione finita di piano compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse.

$$\left[V=16\pi\left(\ln 2-\frac{2}{3}\right)\right]$$

21 Data la trasformazione lineare T che associa i punti $O(0,\,0)$, $A(0,\,1)$, $B(2,\,0)$ del piano rispettivamente ai punti $O'(2,\,0)$, $A'(3,\,2)$, $B'(0,\,0)$:

a. scrivi l'equazione della trasformazione, individua gli elementi uniti e classificala;

b. determina il rapporto tra le aree dei triangoli OAB e $O'A'B'$;

c. date le due parabole $p: y=2x^2-2x$ e $q: y=1-x^2$, trova le equazioni delle curve p' e q' trasformate di p e q mediante la T;

d. calcola l'area della regione di piano compresa tra p' e q'.

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{a}.\ \begin{cases}x'=-x+y+2\\ y'=2y\end{cases},\ \text{elementi uniti}: (1,0),\ y=0,\ y=3x-3;\ \textbf{b}.\ \frac{1}{2}; \\ \textbf{c}.\ 4x^2-4xy+y^2-12x+5y+8=0;\ 4x^2-4xy+y^2-16x+10y+12=0;\ \textbf{d}.\ \frac{64}{27} \end{array}\right]$$

22 Considera le trasformazioni definite dalle seguenti equazioni:

$$\tau_1 : \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases} \qquad \tau_2 : \begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = -x' \end{cases} \qquad \tau_3 : \begin{cases} x''' = x'' + 1 \\ y''' = y'' - 1 \end{cases}$$

a. Individua le caratteristiche di ciascuna di esse e trova le equazioni della trasformazione $\tau = \tau_3 \circ (\tau_2 \circ \tau_1)$ che si ottiene applicando in successione τ_1, τ_2, τ_3.

b. Considerata poi la funzione $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$, applica ad essa la trasformazione τ e determina l'equazione della sua corrispondente $g(x)$.

c. Traccia, in uno stesso sistema di assi cartesiani ortogonali, i grafici di $f(x)$ e della sua trasformata $g(x)$.

d. Calcola l'area della regione finita di piano racchiusa dalle due curve nell'intervallo [3, 4].

$$\left[\mathbf{a}.\ \tau : \begin{cases} x''' = 1 - 2y \\ y''' = -2x - 1 \end{cases} ;\ \mathbf{b}.\ g(x) = \frac{7-5x}{1+x};\ \mathbf{d}.\ \text{area} = 6 - 3\ln\frac{625}{512} \right]$$

23 Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, scrivi l'equazione del luogo L dei punti del piano che sono equidistanti dal punto $A(0, 1)$ e dalla retta $x = -1$. Considerata poi la trasformazione τ che si ottiene componendo la simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante con l'omotetia che ha centro nell'origine del sistema di riferimento e rapporto 2, applica tale trasformazione al luogo L ottenendo la curva L'. I grafici di L e L', intersecandosi, individuano due regioni finite di piano; calcola l'area di ciascuna di esse.

$$\left[L : x = \frac{1}{2}y^2 - y;\ \tau : \begin{cases} x' = 2y \\ y' = 2x \end{cases} ;\ L' : y = \frac{1}{4}x^2 - x;\ R_1 : \frac{34}{3} - 8\sqrt{2};\ R_2 : \frac{34}{3} + 8\sqrt{2} \right]$$

24 Discuti il seguente sistema lineare al variare dei parametri a e b :

$$\begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax - y + 3z = b \\ ax + by + (b+3)z = 1 \end{cases}$$

a. Interpretando a e b come coordinate di un punto del piano riferito a un sistema di assi coordinati cartesiani ortogonali monometrici Oab, determina il luogo dei punti del piano soddisfacenti la condizione $x_0 + y_0 = -(z_0 + 1)^2$, dove (x_0, y_0, z_0) è la soluzione del sistema nel caso essa sia unica.

b. Opera poi la sostituzione $a = XY$ e $b = X$ e traccia, in un piano riferito ad un sistema di assi ortogonali OXY la curva C rappresentata dall'equazione a cui si perviene.

[sistema determinato se $a \neq 0 \wedge b \neq -1$, impossibile se $a = 0 \ \wedge \ b \neq -1$,
indeterminato con ∞^1 soluzioni se $b = -1$;
a. $a = -\dfrac{b^2+1}{2}$; **b**. $Y = -\dfrac{X^2+1}{2X}$]

25 Discuti il seguente sistema lineare al variare dei parametri reali h e k :

$$\begin{cases} hx + y + z = 4 \\ x + ky + z = 3 \\ x + 2ky + z = 4 \end{cases}$$

a. Interpretando h e k come coordinate di un punto del piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali monometrici Ohk, determina il luogo L_1 dei punti del piano soddisfacenti la condizione $y_0 = h$, dove (x_0, y_0, z_0) è la soluzione del sistema nel caso essa sia unica.

b. Opera la sostituzione $h = x \;\wedge\; k = y$ e determina l'area della regione di piano compresa fra la curva L_1, l'asse delle ascisse e le rette di equazioni $x = 1$ e $x = 2$. Nell'intervallo considerato applica il teorema della media relativo al calcolo integrale, e determina l'ascissa c del punto in cui la funzione assume il valore medio.

c. Verifica che la curva L_1 è il luogo descritto dai vertici del fascio di parabole $y = \frac{1}{t^3}x^2 + \frac{2}{t^2}x$ al variare del parametro reale t.

d. La retta $y = x$ interseca una generica parabola del fascio in un punto P_0, distinto dall'origine del sistema di riferimento. Detta P_1 la proiezione di P_0 sull'asse della parabola, determina il luogo L_2 descritto dai punti P_1 al variare di t. Studia il luogo L_2 considerato, disegnane il grafico sullo stesso piano di L_1 e verifica che le due curve sono tangenti in due punti.

e. Calcola l'area della regione finita di piano limitata dalle due curve e dalla retta di equazione $x = 3$.

[sistema determinato se $k \neq 0 \;\wedge\; h \neq 1$,
impossibile se $h = 1 \;\wedge \left(k \neq \frac{1}{2} \;\vee\; k = 0\right)$, indeterminato con ∞^1 soluzioni se $h = 1 \;\wedge\; k = \frac{1}{2}$;
a. $L_1 : hk = 1$; **b**. $c = \frac{1}{\ln 2}$; **d**. $L_2 : y = -x^3 + 2x$; **e**. area $= \ln 3 + 12$]

26 Siano z e u due numeri complessi, $|z|$ il modulo di z, $\mathrm{Re}(z)$ la parte reale di z, $\mathrm{Im}(z)$ la parte immaginaria di z e $\arg(z)$ l'anomalia o argomento di z e $\bar{z}$ il coniugato di z.

a. Dimostra che $|z+u|^2 + |z-u|^2 = 2|z|^2 + 2|u|^2$.

b. Siano $z = x + iy$ e $u = 1 + i$. Rappresenta nel piano complesso di Gauss l'insieme dei punti $A \cap B$ con $A = \left\{z \in C \mid |z-u| \leq \sqrt{2}\right\}$ e $B = \left\{z \in C \mid 0 < \arg(z-u) \leq \frac{\pi}{6}\right\}$ e calcola l'area della regione di piano delimitata da tale insieme.

c. Studia la funzione di equazione $y = f(x)$ ottenuta esplicitando la variabile y dall'equazione $z \cdot \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 \cdot [\mathrm{Im}(z) - 1] + 2\,\mathrm{Im}(z^2) + [\mathrm{Im}(z)]^2 + 4\,\mathrm{Im}(z)$.

[area $= \frac{\pi}{3}$; $y = \frac{2x^2}{(x+2)^2}$]

27 E' data la funzione reale di variabile reale $f(x) = (x-2)e^x$.

a. Studia in modo completo la funzione e tracciane il grafico.

b. Calcola le coordinate del punto di intersezione di $f(x)$ con l'asse delle ascisse e scrivi l'equazione della retta ad essa tangente in tale punto.

c. Verifica che $f(x)$ ammette una primitiva della forma $g(x) = (x+p)e^x$ e deduci il valore del numero reale p.

d. Calcola l'area della regione illimitata di piano delimitata dal grafico di $f(x)$, dall'asse delle ascisse e dall'asse delle ordinate.

[**b**. $y = e^2(x-2)$; **c**. $p = -3$; **d**. area $= e^2$]

28 Considerato un quadrato $ABCD$ di lato 3ℓ, siano E e F i punti del lato AB tali che sia $\overline{AF} = \overline{FE} = \overline{EB}$; tracciati i segmenti DE e CF che si incontrano in O, siano M e N i loro rispettivi punti medi.

a. Dimostra che il quadrilatero $MNEF$ è un rettangolo e calcola il suo perimetro.

b. Fissato un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale, scrivi:
- l'equazione della parabola che ha vertice in O e passa per il punto F
- l'equazione della circonferenza circoscritta al rettangolo $MNEF$.

c. Calcola l'area di ciascuna delle due parti in cui la parabola divide la circonferenza.

[**a**. $2p = 5\ell$; **b**. scegliendo O come origine, l'asse x parallelo al lato AB l'asse y orientato da D verso A e $u = \ell : y = 3x^2$, $16x^2 + 16y^2 = 13$; **c**. area$_1 = \frac{8+13\pi}{64} - \frac{13}{16}\arctan\frac{1}{5}$; area$_2 = \frac{39\pi - 8}{64} + \frac{13}{16}\arctan\frac{1}{5}$]

29 Di un trapezio $ABCD$, rettangolo in A e in D e di base maggiore AB, si sa che $\overline{AD} = 4u$ e che ha area $8(1+\sqrt{3})u^2$; una parabola avente vertice in A e passante per C divide il trapezio in due regioni tali che l'area del triangolo mistilineo ACD è uguale a $\frac{16}{3}u^2$. Dopo aver riferito la figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali:

a. trova l'equazione della parabola e le coordinate dei vertici del trapezio

b. scrivi l'equazione della circonferenza di diametro AC

c. calcola le aree delle tre regioni finite di piano delimitate dalla circonferenza e dalla parabola.

[**a**. origine in A, asse y coincidente con la retta AD : $y = x^2$; $A(0, 0)$, $B(2+4\sqrt{3}, 0)$, $C(2, 4)$, $D(0, 4)$; **b**. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$; **c**. $\frac{5}{3} - 5 \arctan\frac{1}{3}$, $\frac{15\pi - 8}{6}$, $\frac{15\pi + 8}{6}$]

30 E' data una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2$; sia M un punto della retta t tangente alla circonferenza in A; traccia da M l'ulteriore tangente alla circonferenza che incontra la retta del diametro in C.

a. Esprimi la lunghezza del segmento AC in funzione di $\overline{AM} = x$ e rappresenta graficamente la funzione $f(x) = \overline{AC}$ ottenuta (distingui i casi in cui AM è maggiore o minore del raggio).

b. Siano P il punto della curva di ascissa 2 e Q il punto di ordinata 2. Verifica che l'area della regione di piano R delimitata da $f(x)$, dalla corda PQ e dall'asintoto orizzontale della funzione è finita e calcolane la misura.

c. Mantenendo fisso Q, sia P un punto variabile di ascissa k appartenente alla curva (con $k > 1$); esprimi il valore dell'area R in funzione di k e studiane l'andamento.

[**a**. se $\overline{AM} < 1 : y = \frac{2x^2}{1-x^2}$; se $\overline{AM} > 1 : y = \frac{2x^2}{x^2-1}$; **b**. area $= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} + \ln 3$; **c**. $A(k) = \frac{\sqrt{2}k - 1}{\sqrt{2}(k^2-1)} + \ln\frac{k+1}{k-1}$]

31 Una sfera di centro O e raggio unitario è divisa da un piano α in due segmenti sferici; il cono avente per base il cerchio sezione e inscritto nel maggiore di essi e il segmento minore formano un solido. Posto $\overline{OH} = x$, essendo H il piede della perpendicolare condotta da O ad α:

a. esprimi il volume V di tale solido in funzione di x, studia la funzione $y = V(x)$ così ottenuta e rappresentala graficamente indipendentemente dai limiti imposti dal problema; determina quindi l'area complessiva della regione finita di piano da essa delimitata insieme all'asse x;

b. esprimi il rapporto R fra il volume del cono e quello del segmento sferico e studia la funzione $y = R(x)$.

[**a**. $V(x) = \frac{\pi}{3}(3 - 2x - x^2)$; area $= \frac{32}{9}\pi$; **b**. $R(x) = \frac{(1+x)^2}{(1-x)(2+x)}$]

32 Si sono rilevati gli spazi di frenata di due autovetture secondo diverse velocità. I dati sono riportati nella seguente tabella:

Velocità (km/h)	40	50	60	70	80	90	100	110
Spazio di arresto (m)	8	11	15	20	26	34,5	46	62,5

a. Interpola con il metodo dei minimi quadrati i dati della tabella.

b. Determina l'intensità della correlazione, formulando le tue considerazioni sul legame tra le variabili.

c. Dopo aver calcolato l'angolo tra le rette di regressione, evidenzia il legame tra le variabili attraverso lo studio dello stesso.

d. Calcola la velocità nello spazio di arresto di 40m e quella nello spazio di arresto di 120m.

e. Con i dati assegnati scrivi una procedura che calcoli l'indice di correlazione lineare.

[**a**. $y_1 = 0{,}74x - 27{,}57$; $y_2 = 0{,}8x - 32{,}104$; **b**. $r = 0{,}96$; **c**. $\alpha \approx 0{,}038$rad; **d**. 91,31km/h; 199,42km/h]

33 Traccia il grafico della funzione di equazione $y = \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} + \sqrt{x^3 + 4x^2 + 4x}$ studiando, in particolare, la derivabilità della funzione. Successivamente calcola:

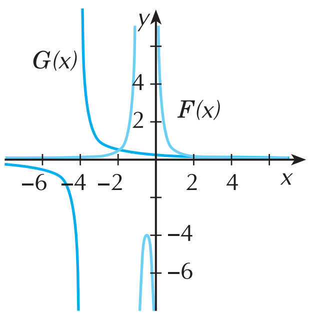
a. l'area della regione R di piano delimitata dalla curva, dalla sua tangente nell'origine e dalla retta $y = 3$;

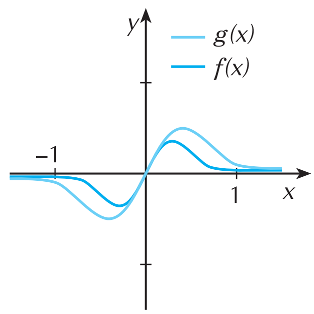
b. il volume V_1 del solido che si ottiene facendo ruotare R attorno all'asse y;

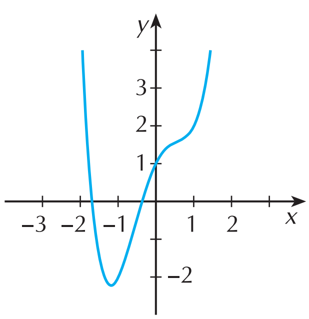
c. il volume V_2 del solido che si ottiene facendo ruotare R attorno all'asse x.

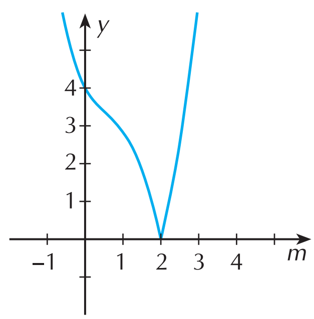
$\left[(1,\ 3)\right.$ punto angoloso; non derivabile nell'origine; **a.** 1; **b.** $\frac{3}{5}\pi$; **c.** $\left.\frac{9}{2}\pi\right]$

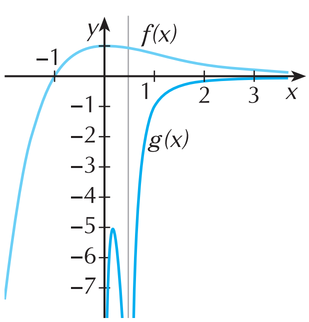
Risultati di alcuni esercizi.

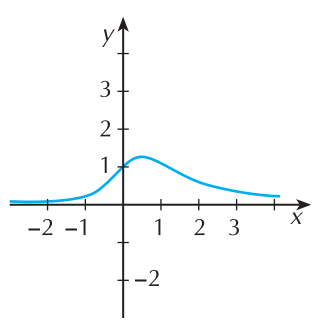
1.


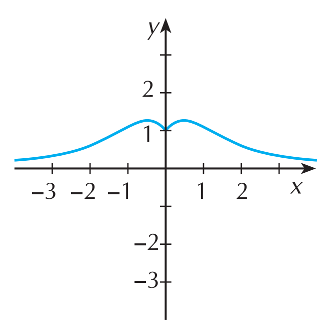
2.


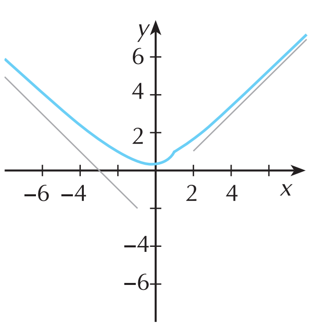
3.


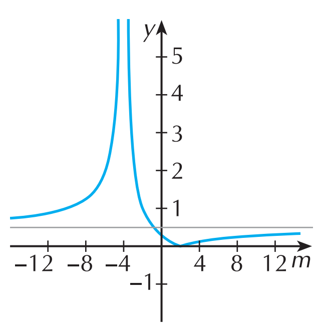


5.


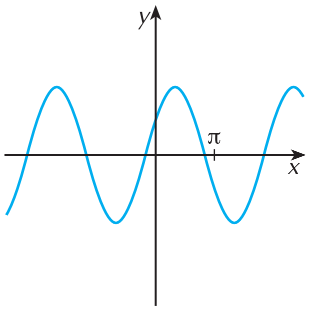
6.




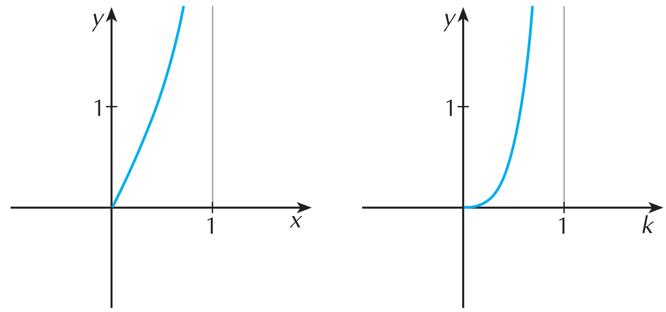
9.


11.


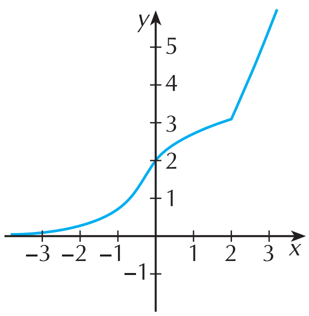
12.



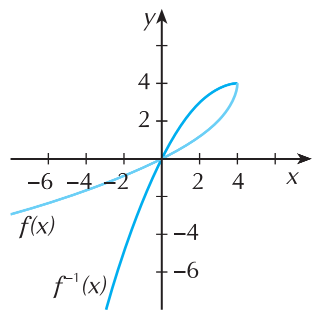
13.



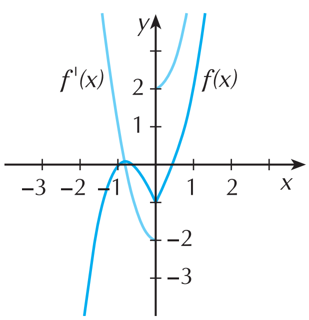
15.



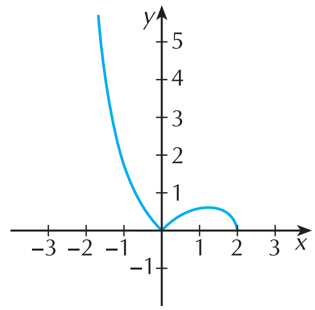
16.



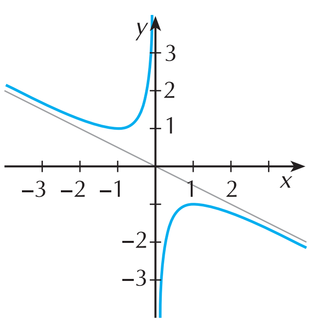
17.



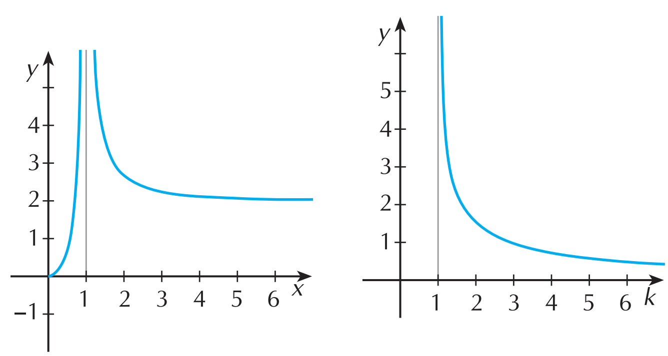
20.



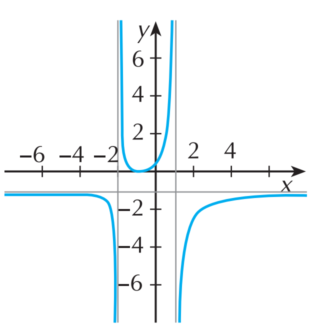
24.



30.



31.



33.