Sistemi di più equazioni

Il metodo di risoluzione di un sistema di secondo grado con più di due equazioni e due incognite dipende dalla forma stessa del sistema; in genere è conveniente ricavare una delle incognite da un'equazione (il più delle volte da quelle di primo grado) e sostituire l'espressione ottenuta nelle altre, che contengono in questo modo un'incognita di meno.
Ripetendo il procedimento si arriva ad esprimere una delle equazioni in funzione di una sola incognita; risolta questa equazione, si procede poi a ritroso nelle sostituzioni determinando in questo modo la soluzione del sistema.
Osserva gli esempi.

I esempio.

Risolviamo il sistema: $\begin{cases} x(y-x)+z-5x=0 \\ 4x+3y-2z=1 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$

Ricaviamo l'espressione di z dalla terza equazione e sostituiamola nelle altre

$$\begin{cases} x(y-x)+(x+2y)-5x=0 \\ 4x+3y-2(x+2y)=1 \\ z=x+2y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} xy-x^2-4x+2y=0 \\ 2x-y=1 \\ z=x+2y \end{cases}$$

Le prime due equazioni non contengono più la variabile z; fissiamo la nostra attenzione su queste, lasciando invariata l'espressione già calcolata di z. Ricaviamo dunque l'espressione di y dalla seconda equazione e sostituiamola nella prima:

$$\begin{cases} x(2x-1)-x^2-4x+2(2x-1)=0 \\ y=2x-1 \\ z=x+2y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ y=2x-1 \\ z=x+2y \end{cases}$$

La prima equazione contiene soltanto la variabile x; risolvendola otteniamo $x=-1 \ \vee \ x=2$.
Sostituendo ora ad x i valori trovati, possiamo calcolare quelli corrispondenti di y, e successivamente quelli di z.

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \\ z=-1-6=-7 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=2+6=8 \end{cases}$$

Dunque, indicando le soluzioni come una terna ordinata (x, y, z), $\quad S=\{(-1, -3, -7); (2, 3, 8)\}$.

II esempio.

Risolviamo il sistema: $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{2}z=y-1 \\ -\dfrac{2}{3}(1-x)=z-y+1 \\ y(x+z)=0 \end{cases}$

Applicando la legge di annullamento del prodotto alla terza equazione, il sistema dato è equivalente ai seguenti:

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{3}{2}z=y-1 \\ -\frac{2}{3}(1-x)=z-y+1 \\ y=0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{3}{2}z=y-1 \\ -\frac{2}{3}(1-x)=z-y+1 \\ x+z=0 \end{cases}$$

Risolviamo separatamente i due sistemi.

I sistema.

Sostituiamo 0 al posto di y: $\begin{cases} x+3z=-2 \\ -2+2x=3z+3 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+3z=-2 \\ 2x-3z=5 \\ y=0 \end{cases}$

Applicando il principio di riduzione alle prime due equazioni otteniamo $\begin{cases} 3x=3 \\ x+3z=-2 \\ y=0 \end{cases}$

Da cui, ricavando il valore x dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda, otteniamo $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$

II sistema.

Ricaviamo l'espressione di x dalla terza equazione e sostituiamo

$$\begin{cases} -z+3z=2y-2 \\ -2(1+z)=3z-3y+3 \\ x=-z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=y-1 \\ 5z-3y+5=0 \\ x=-z \end{cases}$$

Sostituendo l'espressione di z della prima equazione nella seconda e sviluppando i calcoli otteniamo

$$\begin{cases} z=y-1 \\ 5(y-1)-3y+5=0 \\ x=-z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=y-1 \\ y=0 \\ x=-z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$$

I due sistemi hanno dunque la stessa soluzione e perciò $S=\{(1,0,-1)\}$.

ATTENZIONE AGLI ERRORI

Quando si risolve un sistema si deve sempre ricavare una sola variabile alla volta, altrimenti l'operazione di sostituzione non serve allo scopo.

Nel sistema $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 3x+y+5z=1 \\ x^2-xz+y^2=0 \end{cases}$

non è conveniente operare così $\begin{cases} x=3+y-2z \\ y=1-3x-5z \\ (3+y-2z)^2-(3+y-2z)z+(1-3x-5z)^2=0 \end{cases}$

perché la terza equazione contiene ancora tutte le variabili e, oltre ad essere più complessa, non consente di determinare né il valore di x, né quelli di y e di z.

Risolvi in R i seguenti sistemi di secondo grado con più di due incognite.

1 ESERCIZIO GUIDATO

$$\begin{cases} x+y+z=31 \\ x-y-z=-21 \\ xy-x^2=35 \end{cases}$$

Sommiamo membro a membro le prime due equazioni ottenendo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x=10 \\ x+y+z=31 \\ xy-x^2=35 \end{cases}$$

Ricaviamo il valore di x dalla prima equazione e sostituiamo nelle altre:

$$\begin{cases} x=5 \\ 5+y+z=31 \\ 5y-25=35 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y+z=26 \\ 5y=60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=12 \\ z=14 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad S=\{(5,\ 12,\ 14)\}.$$

2 $\begin{cases} x+z=3 \\ x-y+z=-3 \\ xz+yz-xy=8 \end{cases}$ $[S=\{(-10,\ 6,\ 13);\ (1,\ 6,\ 2)\}]$

3 $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}+z=1 \\ 2x+y-\dfrac{3}{x}=\dfrac{3}{2} \\ x+y+z=-3 \end{cases}$ $\left[S=\left\{(6,\ -10,\ 1);\ \left(-\dfrac{3}{7},\ -\dfrac{65}{14},\ \dfrac{29}{14}\right)\right\}\right]$

4 $\begin{cases} xy-x^2-z=1 \\ y+z=-2 \\ x+y=z-1 \end{cases}$ $\left[S=\left\{(-1,\ -1,\ -1);\ \left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)\right\}\right]$

5 $\begin{cases} y+z^2-x=0 \\ x-y=0 \\ 3y-3x+z=0 \end{cases}$ [indeterminato]

6 $\begin{cases} (x-z)^2-z^2+y=15 \\ x+y+z=6 \\ 2x+y-z=9 \end{cases}$ $[S=\{(5,\ 0,\ 1)\}]$

7 $\begin{cases} 3x-2y=20 \\ y+x=5 \\ xy+1=z \end{cases}$ $[S=\{(6,\ -1,\ -5)\}]$

8 $\begin{cases} x-y+z=10 \\ (x+z)^2=4 \\ 3z-2y=5 \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\dfrac{13}{3},\ -12,\ -\dfrac{19}{3}\right);\ \left(\dfrac{17}{3},\ -8,\ -\dfrac{11}{3}\right)\right\}\right]$

9 $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 0 \\ 3z - y - 1 = x \\ (z-1)(y-x) = \dfrac{y^2 + 9x^2}{9} \end{cases}$ $\left[S = \left\{(2, -3, 0); \left(\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)\right\}\right]$

10 $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{3}z = 2 \\ 4x^2 - y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$ $\left[S = \left\{(1, 2, 3); \left(\frac{3}{2}, \frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right)\right\}\right]$

11 $\begin{cases} x - z = 1 \\ 2y + 3z = 4 \\ (x-y)^2 + 2xy - 2z^2 = 2 \end{cases}$ $\left[S = \left\{(3, -1, 2); \left(\frac{11}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{5}\right)\right\}\right]$

12 $\begin{cases} x - y = z + 2 \\ 2y + 3x + 4z = 1 \\ 2x^2 - y^2 = z^2 + 4 \end{cases}$ $[S = \varnothing]$

13 $\begin{cases} 2x + 2y = -9 \\ x + z = -1 \\ \dfrac{x^2}{5} - z^2 = -11 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(-5, \frac{1}{2}, 4\right); \left(\frac{5}{2}, -7, -\frac{7}{2}\right)\right\}\right]$

14 $\begin{cases} y + z = \dfrac{9x - 2z}{5} \\ \dfrac{y + x - 1}{2} = 3z \\ \dfrac{(6z - 2x)^2}{4} = \dfrac{(12 - 3y)^2}{9} \end{cases}$ $[S = \{(3, 4, 1)\}]$

15 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 1 \\ x + z = 5 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ $[S = \{(10 - 5\sqrt{2}, -1, -5 + 5\sqrt{2}); (10 + 5\sqrt{2}, -1, -5 - 5\sqrt{2})\}]$

16 $\begin{cases} 16y + 2z = x \\ 3y + xz + z^2 = 10 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 3\right); \left(-\frac{2}{57}, \frac{7}{19}, -\frac{169}{57}\right)\right\}\right]$

17 $\begin{cases} 2(x+y) - \dfrac{z}{3} = \dfrac{5}{3} \\ x + y + z = \dfrac{25}{2} \\ \left(\dfrac{z}{5} - y\right)^2 + x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left[S = \left\{\left(-\frac{1}{2}, 3, 10\right); \left(\frac{1}{2}, 2, 10\right)\right\}\right]$

18 $\begin{cases} \dfrac{x+5}{4} + \dfrac{y+6}{2} = z \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = z - 4 \\ x^2 - 4y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$ $\left[S = \left\{(3, -2, 4); \left(3, \frac{10}{3}, \frac{20}{3}\right)\right\}\right]$

19 $\begin{cases} 2(y-2)(y+2) = \sqrt{5}y + 2z \\ x + 1 = \sqrt{5}y \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$ $\left[S = \left\{(9, 2\sqrt{5}, 11); \left(-\frac{7}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{3}{2}\right)\right\}\right]$

20 $\begin{cases} 16(x+z)+13y-106=0 \\ \dfrac{y}{2}=x+z-4 \\ (x-y)(x+y)=z^2-9 \end{cases}$ $[S=\{(2,\ 2,\ 3)\}]$

21 $\begin{cases} y+3z+2=0 \\ 2x-3y=2+z \\ \left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2-\dfrac{z^2}{2}=\dfrac{3}{4} \end{cases}$ $\left[S=\left\{(2,\ 1,\ -1);\ \left(-\dfrac{26}{23},\ -\dfrac{31}{23},\ -\dfrac{5}{23}\right)\right\}\right]$

22 $\begin{cases} x+y+z=2 \\ \dfrac{y}{2x}=2 \\ 4x^2-2y+z=-7 \end{cases}$ $\left[S=\left\{(1,\ 4,\ -3);\ \left(\dfrac{9}{4},\ 9,\ -\dfrac{37}{4}\right)\right\}\right]$

23 $\begin{cases} (x-y)(x-z)+2x+y^2=-25 \\ 2x+y-z=4 \\ 4x-y-3z=2 \end{cases}$ $[S=\{(-5,\ 5,\ -9);\ (11,\ -3,\ 15)\}]$

24 $\begin{cases} x+y-z=\dfrac{1}{2} \\ x+y+\dfrac{1}{2}z=-1 \\ xz-x^2=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(-\dfrac{3}{2},\ 1,\ -1\right);\ \left(\dfrac{1}{2},\ -1,\ -1\right)\right\}\right]$

25 $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y+z=-2 \\ 4x^2-2y+z^2=4 \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\dfrac{\sqrt{6}-1}{5},\ -1,\ -\dfrac{\sqrt{6}+4}{5}\right);\ \left(-\dfrac{\sqrt{6}+1}{5},\ -1,\ \dfrac{\sqrt{6}-4}{5}\right)\right\}\right]$

26 $\begin{cases} z+2y=0 \\ \dfrac{1}{16}z+\dfrac{1}{4}y^2+x=\dfrac{3}{2} \\ x-2y+\dfrac{z}{2}=0 \end{cases}$ $\left[S=\left\{(-36,\ -12,\ 24);\ \left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2},\ -1\right)\right\}\right]$

27 $\begin{cases} (x-1)^2+y=z+1 \\ x-1=y+2z-8 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ $[S=\{(-1,\ 0,\ 3);\ (8,\ -27,\ 21)\}]$