APPROFONDIMENTO

Il piano cartesiano e il grafico di una funzione

Abbiamo visto che l'insieme dei numeri reali si può rappresentare su una retta orientata e che, fissato il punto che corrisponde allo zero e un segmento che rappresenta l'unità, ad ogni numero reale corrisponde un punto e, viceversa, ad ogni punto corrisponde un numero reale.
Prendiamo adesso due rette orientate tra loro perpendicolari (le due rette definiscono un piano) che chiamiamo rispettivamente **asse delle ascisse** e **asse delle ordinate**; fissiamo poi come zero il loro punto di intersezione e un dato segmento come unità su entrambe le rette. Consideriamo poi il punto P_x associato al numero x sull'asse delle ascisse e il punto P_y associato al numero y sull'asse delle ordinate; tracciando da P_x la perpendicolare all'asse x e da P_y la perpendicolare all'asse y si viene a individuare un punto P del piano a cui possiamo associare la coppia ordinata di numeri reali (x, y) (***figura 1***).
Viceversa, se prendiamo un punto P nel piano e da esso tracciamo le perpendicolari ai due assi, troviamo i punti P_x sull'asse delle ascisse e P_y sull'asse delle ordinate che sono associati ai numeri x e y.
Esiste quindi corrispondenza biunivoca tra i punti P del piano e le coppie ordinate (x, y) di numeri reali. Il piano così definito si chiama **piano cartesiano**, i due assi delle ascisse e delle ordinate si chiamano anche **asse *x*** e **asse *y*** e il loro punto di intersezione si dice **origine**. Della coppia (x, y) associata al punto P si dice che rappresenta le **coordinate** del punto P; per indicare che il punto P ha coordinate (x, y) si scrive $P(x, y)$.
In ***figura 2*** abbiamo rappresentato qualche punto a titolo di esempio.

Figura 1

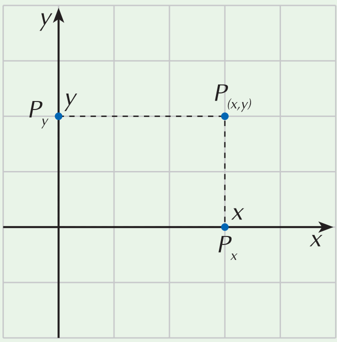
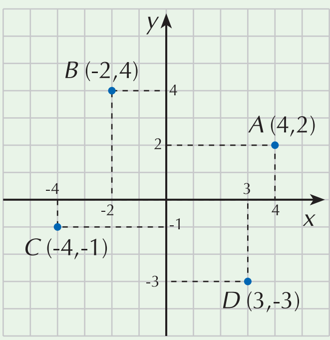


Figura 2



Il piano cartesiano ci dà il modo di rappresentare graficamente una funzione data in forma matematica andando a rappresentare tutte le coppie (x, y) che, sostituite nell'espressione che la rappresenta, la rendono un'uguaglianza vera. Considerata per esempio la funzione

$$y = 2x$$

possiamo dire che:

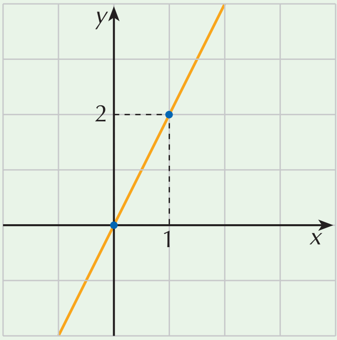
- poiché $f(0) = 0$, il punto di coordinate $(0, 0)$ è un punto della funzione
- poiché $f(1) = 2$, il punto di coordinate $(1, 2)$ è un punto della funzione.

In questo modo, ad ogni valore reale di x viene associato un valore y e il punto corrispondente di $P(x, y)$ così ottenuto si può rappresentare nel piano cartesiano.
L'insieme di tutti i possibili punti P costituisce il **grafico** della funzione.
E' però evidente che non è possibile costruire un grafico nel modo che abbiamo descritto perché i punti che dovremmo rappresentare sono in numero infinito; tuttavia, se potessimo associare alla forma matematica della funzione una corrispondente forma del grafico, anche pochi punti potrebbero bastare.
Questo è possibile per alcuni tipi di funzioni, come avremo modo di vedere in modo più approfondito il prossimo anno scolastico; per ora ci limitiamo a tre funzioni particolari che si incontrano spesso nell'analisi dei fenomeni in Fisica.

La funzione di proporzionalità diretta: la forma matematica di questa funzione è del tipo $y = kx$ dove k è un numero reale non nullo; delle grandezze rappresentate dalle variabili x e y si dice che sono direttamente proporzionali e la loro caratteristica è che il rapporto $\frac{y}{x}$ si mantiene costante e sempre uguale a k.

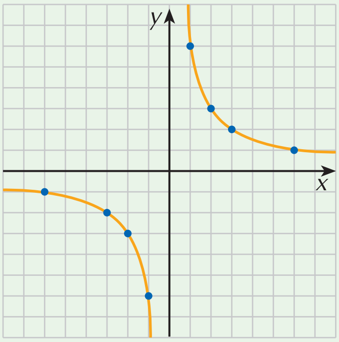
Il grafico di questa funzione è rappresentato da una retta passante per l'origine degli assi cartesiani.
Poiché per disegnare una retta sono sufficienti due punti e, in questo caso, uno è l'origine, basta trovare le coordinate di un solo punto della funzione. Per esempio, la funzione $y = 2x$ precedente passa per il punto di coordinate $(1, 2)$ e il suo grafico è in ***figura 3***.

Figura 3



La funzione di proporzionalità inversa: la forma matematica di questa funzione è del tipo $y = \frac{k}{x}$ dove k è un numero reale non nullo e deve essere $x \neq 0$ altrimenti la divisione $\frac{k}{x}$ non ha significato; delle grandezze rappresentate dalle variabili x e y si dice che sono inversamente proporzionali e la loro caratteristica è che il prodotto xy si mantiene costante e sempre uguale a k.
Anche questa funzione ha un grafico di forma particolare (viene chiamato **iperbole equilatera**) e per costruirlo è necessario determinare le coordinate di alcuni punti; a questo scopo, è comodo utilizzare una tabella a due righe (oppure a due colonne), una per i valori attribuiti a x, l'altra per i valori calcolati di y.
Costruiamo, per esempio, il grafico della funzione $y = \frac{6}{x}$ attribuendo a x i valori indicati nella tabella (prima riga) e calcolando per sostituzione quelli di y (seconda riga); basta poi tracciare la curva avente la forma indicata che passa per i punti trovati (***figura 4***).

Figura 4



x	± 1	± 2	± 3	± 6
y	± 6	± 3	± 2	± 1

Osserviamo che il grafico ottenuto è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

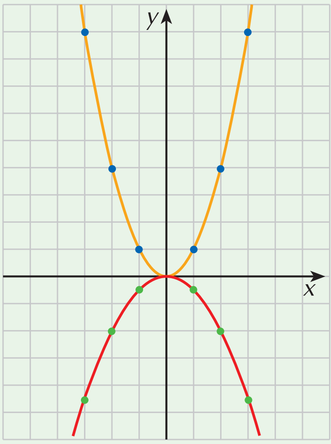
La funzione di proporzionalità quadratica: la forma matematica di questa funzione è del tipo $y = kx^2$ dove k è un numero reale non nullo; le grandezze x e y hanno la caratteristica che il rapporto $\frac{y}{x^2}$ è costante ed è sempre uguale a k.

Il grafico di questa funzione è una curva particolare che prende il nome di **parabola**; per trovare le coordinate di qualche suo punto utilizziamo una tabella analoga a quella precedente. In ***figura 5*** abbiamo costruito il grafico di $y = x^2$ (in giallo) e di $y = -\frac{1}{2}x^2$ (in rosso).

x	0	± 1	± 2	± 3
$y = x^2$	0	1	4	9
$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x^2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$

Osserviamo che la curva ottenuta è simmetrica rispetto all'asse y e che passa per l'origine degli assi; questo punto viene detto *vertice* della parabola.

Figura 5



ESERCIZI

Applicazione

Costruisci i grafici delle seguenti funzioni di proporzionalità diretta.

1 $y = \frac{1}{2}x$ $\quad y = x$ $\quad y = -x$ $\quad y = -2x$

2 $y = \frac{3}{4}x$ $\quad y = -\frac{2}{3}x$ $\quad y = \frac{1}{6}x$ $\quad y = -\frac{5}{2}x$

Costruisci i grafici delle seguenti funzioni di proporzionalità inversa.

3 $y = \frac{2}{x}$ $\quad y = -\frac{5}{x}$ $\quad y = \frac{1}{x}$ $\quad y = -\frac{1}{x}$

4 $y = \frac{12}{x}$ $\quad y = \frac{30}{x}$ $\quad y = -\frac{20}{x}$ $\quad y = \frac{8}{3x}$

Costruisci i grafici delle seguenti funzioni di proporzionalità quadratica.

5 $y = 2x^2$ $\quad y = \frac{1}{2}x^2$ $\quad y = -x^2$ $\quad y = \frac{3}{4}x^2$

6 $y = \frac{5}{2}x^2$ $\quad y = -\frac{1}{4}x^2$ $\quad y = \frac{7}{8}x^2$ $\quad y = -\frac{1}{9}x^2$

7 Tra le grandezze x e y sussiste la relazione $2y - 3x = 0$; essa rappresenta:
a. una proporzionalità inversa
b. una proporzionalità diretta
c. una proporzionalità quadratica
d. non è una relazione di proporzionalità. [**b.**]

8 A quale delle seguenti equazioni appartengono i punti le cui coordinate sono indicate in tabella?

x	y
1	-3
2	-12
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

a. $y = -3x^2$ $\quad$ **b.** $y = 3x^2$ $\quad$ **c.** $y = -2x^2$ $\quad$ **d.** $y = -\frac{1}{3}x^2$ [**a.**]

9 Quale delle seguenti equazioni rappresenta la proporzionalità diretta rappresentata in figura?

a. $y = x$ $\quad$ **b.** $y = 2x$

c. $y = \frac{1}{2}x$ $\quad$ **d.** $y = \frac{2}{3}x$ [**c.**]