

Sistemi di più equazioni

Il metodo di risoluzione di un sistema di secondo grado con più di due equazioni e due incognite dipende dalla forma stessa del sistema; in genere è conveniente ricavare una delle incognite da un'equazione (il più delle volte da quelle di primo grado) e sostituire l'espressione ottenuta nelle altre, che contengono in questo modo un'incognita di meno.

Ripetendo il procedimento si arriva ad esprimere una delle equazioni in funzione di una sola incognita; risolta questa equazione, si procede poi a ritroso nelle sostituzioni determinando in questo modo la soluzione del sistema.

Osserva gli esempi.

I esempio.

Risolvi il sistema:
$$\begin{cases} x(y-x) + z - 5x = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo l'espressione di z dalla terza equazione e sostituiamola nelle altre

$$\begin{cases} x(y-x) + (x+2y) - 5x = 0 \\ 4x + 3y - 2(x+2y) = 1 \\ z = x + 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy - x^2 - 4x + 2y = 0 \\ 2x - y = 1 \\ z = x + 2y \end{cases}$$

Le prime due equazioni non contengono più la variabile z ; fissiamo la nostra attenzione su queste, lasciando invariata l'espressione già calcolata di z . Ricaviamo dunque l'espressione di y dalla seconda equazione e sostituiamola nella prima:

$$\begin{cases} x(2x-1) - x^2 - 4x + 2(2x-1) = 0 \\ y = 2x - 1 \\ z = x + 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 2x - 1 \\ z = x + 2y \end{cases}$$

La prima equazione contiene soltanto la variabile x ; risolvendola otteniamo $x = -1 \vee x = 2$.

Sostituendo ora ad x i valori trovati, possiamo calcolare quelli corrispondenti di y , e successivamente quelli di z .

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = -1 - 6 = -7 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 2 + 6 = 8 \end{cases}$$

Dunque, indicando le soluzioni come una terna ordinata (x, y, z) , $S = \{(-1, -3, -7); (2, 3, 8)\}$.

II esempio.

Risolvi il sistema:
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{3}{2}z = y - 1 \\ -\frac{2}{3}(1-x) = z - y + 1 \\ y(x+z) = 0 \end{cases}$$

Applicando la legge di annullamento del prodotto alla terza equazione, il sistema dato è equivalente ai seguenti:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{3}{2}z = y - 1 \\ -\frac{2}{3}(1-x) = z - y + 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{3}{2}z = y - 1 \\ -\frac{2}{3}(1-x) = z - y + 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Risolviamo separatamente i due sistemi.

I sistema.

Sostituiamo 0 al posto di y : $\begin{cases} x + 3z = -2 \\ -2 + 2x = 3z + 3 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3z = -2 \\ 2x - 3z = 5 \\ y = 0 \end{cases}$

Applicando il principio di riduzione alle prime due equazioni otteniamo $\begin{cases} 3x = 3 \\ x + 3z = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

Da cui, ricavando il valore x dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda, otteniamo $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$

II sistema.

Ricaviamo l'espressione di x dalla terza equazione e sostituiamo

$$\begin{cases} -z + 3z = 2y - 2 \\ -2(1+z) = 3z - 3y + 3 \\ x = -z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = y - 1 \\ 5z - 3y + 5 = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

Sostituendo l'espressione di z della prima equazione nella seconda e sviluppando i calcoli otteniamo

$$\begin{cases} z = y - 1 \\ 5(y - 1) - 3y + 5 = 0 \\ x = -z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = y - 1 \\ y = 0 \\ x = -z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

I due sistemi hanno dunque la stessa soluzione e perciò $S = \{(1, 0, -1)\}$.

ATTENZIONE AGLI ERRORI

Quando si risolve un sistema si deve sempre ricavare una sola variabile alla volta, altrimenti l'operazione di sostituzione non serve allo scopo.

Nel sistema $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 3x + y + 5z = 1 \\ x^2 - xz + y^2 = 0 \end{cases}$

non è conveniente operare così $\begin{cases} x = 3 + y - 2z \\ y = 1 - 3x - 5z \\ (3 + y - 2z)^2 - (3 + y - 2z)z + (1 - 3x - 5z)^2 = 0 \end{cases}$

perché la terza equazione contiene ancora tutte le variabili e, oltre ad essere più complessa, non consente di determinare né il valore di x , né quelli di y e di z .

ESERCIZI

Risolvi in R i seguenti sistemi di secondo grado con più di due incognite.

1 ESERCIZIO GUIDATO

$$\begin{cases} x + y + z = 31 \\ x - y - z = -21 \\ xy - x^2 = 35 \end{cases}$$

Sommiamo membro a membro le prime due equazioni ottenendo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x = 10 \\ x + y + z = 31 \\ xy - x^2 = 35 \end{cases}$$

Ricaviamo il valore di x dalla prima equazione e sostituiamo nelle altre:

$$\begin{cases} x = 5 \\ 5 + y + z = 31 \\ 5y - 25 = 35 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y + z = 26 \\ 5y = 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \\ z = 14 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad S = \{(5, 12, 14)\}.$$

$$2 \quad \begin{cases} x + z = 3 \\ x - y + z = -3 \\ xz + yz - xy = 8 \end{cases}$$

$$[S = \{(-10, 6, 13); (1, 6, 2)\}]$$

$$3 \quad \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + z = 1 \\ 2x + y - \frac{3}{x} = \frac{3}{2} \\ x + y + z = -3 \end{cases}$$

$$[S = \left\{ (6, -10, 1); \left(-\frac{3}{7}, -\frac{65}{14}, \frac{29}{14}\right) \right\}]$$

$$4 \quad \begin{cases} xy - x^2 - z = 1 \\ y + z = -2 \\ x + y = z - 1 \end{cases}$$

$$[S = \left\{ (-1, -1, -1); \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) \right\}]$$

$$5 \quad \begin{cases} y + z^2 - x = 0 \\ x - y = 0 \\ 3y - 3x + z = 0 \end{cases}$$

[indeterminato]

$$6 \quad \begin{cases} (x - z)^2 - z^2 + y = 15 \\ x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 9 \end{cases}$$

$$[S = \{(5, 0, 1)\}]$$

$$7 \quad \begin{cases} 3x - 2y = 20 \\ y + x = 5 \\ xy + 1 = z \end{cases}$$

$$[S = \{(6, -1, -5)\}]$$

$$8 \quad \begin{cases} x - y + z = 10 \\ (x + z)^2 = 4 \\ 3z - 2y = 5 \end{cases}$$

$$[S = \left\{ \left(\frac{13}{3}, -12, -\frac{19}{3}\right); \left(\frac{17}{3}, -8, -\frac{11}{3}\right) \right\}]$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{9} \quad \begin{cases} 3x + 2y - 5z = 0 \\ 3z - y - 1 = x \\ (z - 1)(y - x) = \frac{y^2 + 9x^2}{9} \end{cases} \quad \left[S = \left\{ (2, -3, 0); \left(\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2} \right) \right\} \right] \\
 \\
 \mathbf{10} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 2 \\ 4x^2 - y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \quad \left[S = \left\{ (1, 2, 3); \left(\frac{3}{2}, \frac{12}{5}, \frac{12}{5} \right) \right\} \right] \\
 \\
 \mathbf{11} \quad \begin{cases} x - z = 1 \\ 2y + 3z = 4 \\ (x - y)^2 + 2xy - 2z^2 = 2 \end{cases} \quad \left[S = \left\{ (3, -1, 2); \left(\frac{11}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{5} \right) \right\} \right] \\
 \\
 \mathbf{12} \quad \begin{cases} x - y = z + 2 \\ 2y + 3x + 4z = 1 \\ 2x^2 - y^2 = z^2 + 4 \end{cases} \quad [S = \emptyset] \\
 \\
 \mathbf{13} \quad \begin{cases} 2x + 2y = -9 \\ x + z = -1 \\ \frac{x^2}{5} - z^2 = -11 \end{cases} \quad \left[S = \left\{ \left(-5, \frac{1}{2}, 4 \right); \left(\frac{5}{2}, -7, -\frac{7}{2} \right) \right\} \right] \\
 \\
 \mathbf{14} \quad \begin{cases} y + z = \frac{9x - 2z}{5} \\ \frac{y + x - 1}{2} = 3z \\ \frac{(6z - 2x)^2}{4} = \frac{(12 - 3y)^2}{9} \end{cases} \quad [S = \{(3, 4, 1)\}] \\
 \\
 \mathbf{15} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 1 \\ x + z = 5 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad [S = \{(10 - 5\sqrt{2}, -1, -5 + 5\sqrt{2}); (10 + 5\sqrt{2}, -1, -5 - 5\sqrt{2})\}] \\
 \\
 \mathbf{16} \quad \begin{cases} 16y + 2z = x \\ 3y + xz + z^2 = 10 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases} \quad \left[S = \left\{ \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 3 \right); \left(-\frac{2}{57}, \frac{7}{19}, -\frac{169}{57} \right) \right\} \right] \\
 \\
 \mathbf{17} \quad \begin{cases} 2(x + y) - \frac{z}{3} = \frac{5}{3} \\ x + y + z = \frac{25}{2} \\ \left(\frac{z}{5} - y \right)^2 + x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \left[S = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, 3, 10 \right); \left(\frac{1}{2}, 2, 10 \right) \right\} \right] \\
 \\
 \mathbf{18} \quad \begin{cases} \frac{x+5}{4} + \frac{y+6}{2} = z \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = z - 4 \\ x^2 - 4y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \quad \left[S = \left\{ (3, -2, 4); \left(3, \frac{10}{3}, \frac{20}{3} \right) \right\} \right] \\
 \\
 \mathbf{19} \quad \begin{cases} 2(y - 2)(y + 2) = \sqrt{5}y + 2z \\ x + 1 = \sqrt{5}y \\ x - z + 2 = 0 \end{cases} \quad \left[S = \left\{ (9, 2\sqrt{5}, 11); \left(-\frac{7}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{3}{2} \right) \right\} \right]
 \end{array}$$

$$20 \quad \begin{cases} 16(x+z) + 13y - 106 = 0 \\ \frac{y}{2} = x + z - 4 \\ (x-y)(x+y) = z^2 - 9 \end{cases} \quad [S = \{(2, 2, 3)\}]$$

$$21 \quad \begin{cases} y + 3z + 2 = 0 \\ 2x - 3y = 2 + z \\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{2} = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \left[S = \left\{ (2, 1, -1); \left(-\frac{26}{23}, -\frac{31}{23}, -\frac{5}{23}\right) \right\} \right]$$

$$22 \quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ \frac{y}{2x} = 2 \\ 4x^2 - 2y + z = -7 \end{cases} \quad \left[S = \left\{ (1, 4, -3); \left(\frac{9}{4}, 9, -\frac{37}{4}\right) \right\} \right]$$

$$23 \quad \begin{cases} (x-y)(x-z) + 2x + y^2 = -25 \\ 2x + y - z = 4 \\ 4x - y - 3z = 2 \end{cases} \quad [S = \{(-5, 5, -9); (11, -3, 15)\}]$$

$$24 \quad \begin{cases} x + y - z = \frac{1}{2} \\ x + y + \frac{1}{2}z = -1 \\ xz - x^2 = -\frac{3}{4} \end{cases} \quad \left[S = \left\{ \left(-\frac{3}{2}, 1, -1\right); \left(\frac{1}{2}, -1, -1\right) \right\} \right]$$

$$25 \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = -2 \\ 4x^2 - 2y + z^2 = 4 \end{cases} \quad \left[S = \left\{ \left(\frac{\sqrt{6}-1}{5}, -1, -\frac{\sqrt{6}+4}{5}\right); \left(-\frac{\sqrt{6}+1}{5}, -1, \frac{\sqrt{6}-4}{5}\right) \right\} \right]$$

$$26 \quad \begin{cases} z + 2y = 0 \\ \frac{1}{16}z + \frac{1}{4}y^2 + x = \frac{3}{2} \\ x - 2y + \frac{z}{2} = 0 \end{cases} \quad \left[S = \left\{ (-36, -12, 24); \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \right\} \right]$$

$$27 \quad \begin{cases} (x-1)^2 + y = z + 1 \\ x - 1 = y + 2z - 8 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad [S = \{(-1, 0, 3); (8, -27, 21)\}]$$

28 ESERCIZIO GUIDATO

$$\begin{cases} -4x + 5y = z - 10t \\ -2t - x + y = 0 \\ (x+1)^2 - z = 3 \\ z - 10t = 1 \end{cases}$$

Ricaviamo z dall'ultima equazione e sostituiamo nelle altre:

$$\begin{cases} -4x + 5y - \cancel{10t} - 1 + \cancel{10t} = 0 \\ -x + y - 2t = 0 \\ x^2 + \cancel{1} + 2x - 10t - \cancel{1} = 3 \\ z = 10t + 1 \end{cases}$$

Fissiamo la nostra attenzione sulle prime tre equazioni e ripetiamo il procedimento, ricavando y dalla seconda equazione e sostituendo la sua espressione nelle altre due.

$$\begin{cases} -4x + 5(2t + x) - 1 = 0 \\ y = 2t + x \\ x^2 + 2x - 10t = 3 \\ z = 10t + 1 \end{cases}$$

Adesso consideriamo la prima e la terza equazione, che contengono le due sole variabili x e t ; ripetiamo ancora il procedimento, ricavando x dalla prima e sostituendo l'espressione ottenuta nell'altra.

$$\begin{cases} x = 1 - 10t \\ y = 2t + x \\ (1 - 10t)^2 + 2(1 - 10t) - 10t = 3 \\ z = 10t + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 10t \\ y = 2t + x \\ 100t^2 - 50t = 0 \\ z = 10t + 1 \end{cases}$$

Ora possiamo calcolare le soluzioni dell'equazione di secondo grado in t , che sono $t = 0 \vee t = \frac{1}{2}$ e, risostituendole, ottenere le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ t = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \\ z = 6 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è pertanto $S = \left\{ (1, 1, 1, 0); \left(-4, -3, 6, \frac{1}{2}\right) \right\}$.

$$29 \quad \begin{cases} xy + zt = \frac{y^2}{2} \\ x - y + z = -1 \\ 2x - y + t = 3 \\ \frac{1}{2}y + 3t = 0 \end{cases} \quad \left[S = \left\{ \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{5}{2}, 0\right); (-79, -138, -60, 23) \right\} \right]$$

$$30 \quad \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 3x - y - 2z + t = 0 \\ x - 2y + 3t = 3 \\ x^2 + y^2 - zt = 2 \end{cases} \quad \left[S = \left\{ (1, -1, 2, 0); \left(-\frac{11}{31}, -\frac{43}{31}, \frac{8}{31}, \frac{6}{31}\right) \right\} \right]$$

$$31 \quad \begin{cases} x + 3y + 2z - 1 = 0 \\ x^2 + xz + 80t = -32 \\ 2z - y - 3t = 0 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases} \quad \left[S = \left\{ (8, -1, -2, -1); \left(\frac{38}{5}, -\frac{33}{35}, -\frac{66}{35}, -\frac{33}{35}\right) \right\} \right]$$

$$32 \quad \begin{cases} x + y + z^2 + t = 1 + x^2 \\ 3(x - y) + 2(z + t) = 0 \\ x - y + z + t = 0 \\ 2x + z = 3 \end{cases} \quad \left[S = \left\{ (1, 1, 1, -1); \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\} \right]$$

$$33 \quad \begin{cases} 2(x+z) = y+t-8 \\ x-2y = z \\ 3y-t = 4(z+2) \\ (x-y)^2 = (z+t)^2 \end{cases}$$

$$[S = \{(0, 1, -2, 3); (-2, 0, -2, 0)\}]$$

$$34 \quad \begin{cases} x+y+z+t = 1 \\ y^2+z^2+yz = \frac{1}{4} \\ 2x+z-2t = -1 \\ y+z-t = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$[S = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1 \right); \left(\frac{39}{62}, -\frac{11}{62}, -\frac{12}{31}, \frac{29}{31} \right) \right\}]$$

CORREGGI GLI ERRORI

I passaggi eseguiti nei seguenti esercizi sono algebricamente corretti, ma non servono a risolvere il sistema; spiega perché ed esegui il passaggio corretto.

$$35 \quad \begin{cases} x+2y = 1-z \\ x-y = 3+2z \\ x+y^2 = z^2-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1-2y-z \\ y = x-2z-3 \\ (1-2y-z) + (x-2z-3)^2 = z^2-1 \end{cases}$$

$$36 \quad \begin{cases} z^2+x^2 = y-1 \\ x+y = z \\ 3x-2y = z+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = z^2+x^2+1 \\ x+z^2+x^2+1 = z \\ 3x-2(z^2+x^2+1) = z+1 \end{cases}$$

$$37 \quad \begin{cases} x^2+x = y-1 \\ x+1 = z \\ y-3z = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+1 = y-x^2 \\ y-x^2 = z \\ y-3z = x \end{cases}$$