Il rimborso dei prestiti

Obiettivi

- individuare le caratteristiche dei diversi tipi di rimborso
- saper stendere un piano di ammortamento
- saper calcolare la rata di un ammortamento
- comprendere le caratteristiche di un contratto di leasing

1. Le caratteristiche di un prestito

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 24

Si definisce **prestito** o **mutuo** qualunque capitale che viene concesso da un soggetto *A* a un soggetto *B*, il quale si impegna a restituire il capitale e a pagare gli interessi nei tempi convenuti.

Il soggetto *A*, che può essere un Istituto di Credito o una Società, è il **creditore** o **mutuante**; il soggetto *B* è il **debitore** o **mutuatario**.
Gli altri fattori importanti nella gestione dei mutui sono ovviamente il tasso di interesse a cui il prestito viene concesso, che in questo caso prende anche il nome di **tasso di remunerazione**, e la durata del prestito.

CLASSIFICAZIONE IN BASE ALLA DURATA

Per quanto riguarda la durata, possiamo distinguere in:

- **prestiti a breve scadenza**, se la restituzione avviene prima di un anno dalla data di accensione del prestito
- **prestiti a media scadenza**, se la restituzione avviene in un periodo compreso tra 1 e 5 anni
- **prestiti a lunga scadenza**, se la restituzione avviene dopo 5 anni.

Per i prestiti a breve scadenza normalmente il regime finanziario è quello dell'interesse semplice, per gli altri è quello dell'interesse composto.

CLASSIFICAZIONE IN BASE AL NUMERO DI CREDITORI

Un'altra distinzione necessaria è quella che riguarda il numero dei creditori e/o dei debitori.
In molte situazioni si ha un solo creditore, per esempio la banca che ha concesso il prestito, e un solo debitore, il Sig. Rossi che deve ristrutturare la casa; si parla in questi casi di **prestito indiviso**.
Capita però a volte che un soggetto abbia bisogno di somme così ingenti di denaro, anche qualche miliardo di euro, che nessuna banca o altro ente di credito

possa concedere da solo; si ha per esempio una situazione di questo tipo quando lo Stato emana Titoli che le varie persone o società acquistano. Il prestito viene cioè suddiviso in tante quote in modo che ci siano soggetti che possano finanziarle; si parla in questi casi di **prestito diviso** in titoli e tali titoli prendono il nome di **obbligazioni**.

CLASSIFICAZIONE IN BASE ALLA RESTITUZIONE

Un prestito deve essere, prima o poi, restituito con i dovuti interessi; le modalità di restituzione possono essere diverse, ma le più significative sono le seguenti:

- il **rimborso globale**, che prevede la restituzione di capitale e interessi in un'unica soluzione alla scadenza
- il **rimborso globale del capitale con pagamento periodico degli interessi**
- il **rimborso graduale** o **ammortamento**, che prevede una rateizzazione sia del capitale che degli interessi.

Qualunque sia la forma scelta per il rimborso di un prestito, deve comunque valere il principio dell'equivalenza finanziaria:

> il capitale avuto in prestito deve essere finanziariamente equivalente alla somma dei pagamenti fatti dal debitore concordemente con il contratto stipulato.

La seguente tabella riassume quanto detto.

DURATA	breve scadenza (regime di interesse semplice)	media scadenza (regime di interesse composto)	lunga scadenza (regime di interesse composto)
NUMERO CREDITORI	indiviso	diviso in titoli	
RESTITUZIONE	globale	globale con rateizzazione degli interessi	graduale

LA VALUTAZIONE DI UN PRESTITO

A volte capita che il debitore chieda di poter estinguere anticipatamente il suo debito oppure che il creditore ceda il prestito ad un'altra persona; in questi casi è necessario procedere alla valutazione del prestito.

> Il valore di un prestito, detto anche **valore di riscatto**, è il valore attuale di tutte le somme che il debitore deve ancora versare al creditore

Il calcolo del valore attuale viene fatto ad un tasso $\bar{i}$ che chiameremo **tasso di valutazione** e avviene in modo diverso a seconda della forma di restituzione concordata; nei prossimi paragrafi vedremo come procedere caso per caso.
In questa valutazione viene spesso richiesta anche una suddivisione tra le somme che costituiscono il capitale prestato e gli interessi corrisposti.

> Si chiama **nuda proprietà** il valore attuale delle quote di capitale che devono essere ancora pagate; si chiama **usufrutto** il valore attuale delle quote di interesse che devono essere ancora versate.

Il valore del prestito è quindi la somma tra la nuda proprietà e l'usufrutto; indicando con V_k il valore di riscatto al tempo k, con P_k la nuda proprietà e con U_k l'usufrutto, si ha che: $V_k = P_k + U_k$.

Vediamo una situazione concreta. Prestiamo € 10000 con l'accordo che questo capitale ci venga restituito dopo tre anni ma che gli interessi ci vengano corrisposti alla fine di ogni anno; il nostro debitore, però, ci chiede di estinguere il debito dopo due anni. Allora, tenendo presente che è $k = 2$:

- la nuda proprietà P_2 è il valore attuale di € 10000 al tempo 2 (del capitale non è ancora stata restituita alcuna parte)
- l'usufrutto U_2 è il valore attuale degli interessi dell'ultimo anno (gli interessi dei primi due anni sono già stati pagati)
- il valore del prestito è la somma dei due precedenti valori $V_2 = P_2 + U_2$.

2. Il rimborso globale

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 25

Rimborso totale alla scadenza

Supponiamo di aver ricevuto in prestito € 20000 e di dover rimborsare la somma ad un interesse composto del 6% annuo dopo 2 anni.
Si tratta sostanzialmente di un problema di calcolo del montante che sappiamo risolvere; alla scadenza, dopo 2 anni dovremo restituire una somma

$$M = 20000 \cdot (1 + 0{,}06)^2 \qquad \text{cioè} \qquad € \ 22472$$

Ricorda di uniformare sempre il tempo relativo alla durata e quello relativo al tasso.

In caso di restituzione alla scadenza si deve quindi calcolare il montante della somma A avuta in prestito con le seguenti regole:

- per prestiti a breve scadenza, quindi in regime di interesse semplice: $M = A \cdot (1 + it)$
- per prestiti a media e lunga scadenza, quindi in regime di interesse composto: $M = A \cdot (1 + i)^t$

Il valore di riscatto

A distanza di un anno e sei mesi dal prestito di € 20000 che ci avevano fatto, un improvviso lascito ci mette in grado di restituire il debito anticipatamente; ci chiediamo quale somma dobbiamo restituire.
Ad una prima analisi saremmo tentati di dire che il valore del montante M che avremmo dovuto restituire alla scadenza deve essere scontato di 6 mesi allo stesso tasso, oppure, che è la stessa cosa, che la somma che dobbiamo pagare è il montante di € 20000 per un tempo di 1 anno e 6 mesi anziché due anni.
Questo ragionamento però non è del tutto corretto perché di solito i tassi di interesse correnti sono più bassi dei tassi di remunerazione e la situazione prospettata diventerebbe sfavorevole al creditore che, di conseguenza, non accetterebbe il pagamento anticipato. Calcoliamo:

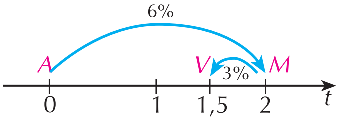
- il valore del prestito al tempo 1,5 e al tasso del 6% annuo è:
  $20000 \cdot (1 + 0{,}06)^{1{,}5} = 21826{,}74(€)$
- il creditore dovrebbe investire la somma restituita per i restanti 6 mesi al tasso corrente, diciamo del 3%:
  $21826{,}74 \cdot (1 + 0{,}03)^{0{,}5} = 22151{,}72(€)$

La differenza con il valore che avrebbe ricavato dalla restituzione del prestito alla scadenza, cioè € 22472, è evidente:
$22472 - 22151{,}72 = 320{,}28(€)$.

Per un principio di equivalenza, si rende allora necessario scontare al tasso corrente il valore del debito alla scadenza; nel nostro caso, anticipando di 6 mesi il pagamento, al tasso corrente del 3%, dovremmo pagare (***figura 1***):

$$22472 \cdot (1 + 0{,}03)^{-0{,}5} = 22142{,}32(€)$$

Figura 1



Il tasso applicato in caso di valutazione anticipata del debito è il tasso di valutazione $\bar{i}$ di cui abbiamo già parlato nel paragrafo precedente; la somma da pagare anticipatamente è il valore di riscatto del debito.
Normalmente il tasso di valutazione coincide con il tasso corrente, ma può anche essere concordato tra le due parti; è comunque di solito più basso del tasso di remunerazione.

In definitiva, se C è il capitale prestato, i è il tasso di remunerazione, $\bar{i}$ è il tasso di valutazione e k è il tempo di anticipazione rispetto alla scadenza naturale n, il valore di riscatto V_k si calcola con la seguente formula:

$$V_k = \underbrace{A \cdot (1+i)^n}_{\text{montante alla scadenza}} \cdot \underbrace{(1+\bar{i})^{-(n-k)}}_{\text{attualizzazione al tempo } n-k}$$

La nuda proprietà è il valore A del prestito, l'usufrutto è la differenza tra V_k e A.

ESEMPI

1. Davide ha chiesto in prestito € 1500 per far fronte ad un imprevisto. Gli viene concesso alle seguenti condizioni: tasso di interesse 3,4% annuo nominale convertibile semestralmente, restituzione del capitale e degli interessi in un'unica soluzione tra 6 mesi. Quale somma dovrà restituire Davide al suo creditore?

Abbiamo che: $A = 1500$ $\quad t = 6$ mesi $\quad j_2 = 0{,}034$

Dobbiamo calcolare il montante M in regime di interesse semplice trattandosi di un prestito a breve scadenza.

Uniformiamo i tempi trasformando il tasso in tasso semestrale e il tempo in semestri:

$i_2 = \dfrac{j_2}{2} = \dfrac{0{,}034}{2} = 0{,}017 \qquad t = 1$ semestre

Possiamo adesso calcolare il montante: $M = C(1+it) = 1500 \cdot (1+0{,}017 \cdot 1) = 1525{,}50(€)$

2. Elena chiede un finanziamento di € 14000 ad una banca che glielo concede ad un tasso di interesse composto trimestrale dell'1,5% con la restituzione del debito dopo 2 anni e 6 mesi. Quale somma dovrebbe restituire Elena? Dopo un anno e mezzo la ragazza, avendo avuto un considerevole aumento di stipendio, è in grado di restuire l'intero prestito e la banca accetta concordando un tasso di valutazione annuo del 4,8%; quale somma deve restituire Elena?

I dati del problema sono: $A = 14000$ $\quad i_4 = 0{,}015$ tasso trimestrale $\quad t = 2a\ 6m$

Dobbiamo calcolare M.

Uniformiamo il tempo della durata al tasso: 2 anni e 6 mesi = 10 trimestri

Calcoliamo il montante: $M = 14000 \cdot (1+0{,}015)^{10} = 16247{,}57(€)$

In alternativa avemmo potuto trasformare il tasso trimestrale in tasso annuo con la formula dei tassi equivalenti:

$i = (1+0{,}015)^4 - 1 = 0{,}06136355063 \quad \rightarrow \quad M = 14000 \cdot (1+0{,}06136355063)^{2{,}5} = 16247{,}57(€)$

Calcoliamo adesso il valore di riscatto del prestito tenendo presente che è:

$\bar{i} = 0{,}048$ $\quad k = 1$ anno (1 anno prima della scadenza) $\quad$ quindi $n-k = 1$

$$V_k = 16247{,}57 \cdot (1+0{,}048)^{-1} = 15503{,}41(€)$$

Elena deve quindi restituire € 15503,41 dei quali € 14000 costituiscono la nuda proprietà e € 1503,41 rappresentano l'usufrutto.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Antonio ha avuto un prestito di € 5000 dalla sua banca ad un tasso annuo del 6% con l'obbligo di restituzione dopo quattro anni.

a. La somma che deve restituire alla scadenza, arrotondata all'euro, è pari a:

① 6312 ② 5121 ③ 6143

b. Se, d'accordo con la banca, anticipa il pagamento di 18 mesi al tasso di riscatto del 4,5%, deve restituire in euro circa:

① 6041 ② 5909 ③ 5824

2. Tempo fa hai prestato € 10000 al tasso di remunerazione del 5,8% composto e oggi ti vengono restituiti € 11513,68. Quanto tempo fa è avvenuta l'operazione?

a. 3 anni e 2 mesi **b.** 1 anno e 8 mesi **c.** 2 anni e 6 mesi **d.** 2 anni

3. IL RIMBORSO GLOBALE CON PAGAMENTO PERIODICO DEGLI INTERESSI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 27

Applicazione informatica *on line*

Abbiamo questo tipo di rimborso quando creditore e debitore si accordano per la restituzione del prestito, in modo che il capitale venga restituito per intero alla scadenza e gli interessi vengano pagati periodicamente. In pratica, il debitore riceve in prestito la somma A, periodicamente paga gli interessi su A e alla scadenza restituirà A.
Osserviamo che il calcolo degli interessi, proprio perché vengono pagati sempre sulla stessa somma alla fine di ogni anno, o semestre o altro, va fatto in regime di interesse semplice. Questo significa che, alla fine di ogni periodo, il debitore pagherà una somma pari a

$\boldsymbol{I = Ai}$ se il periodo è l'anno $\qquad$ $\boldsymbol{I = A \cdot \frac{i}{k}}$ se il periodo è $\frac{1}{k}$ di anno

In questo tipo di rimborso il creditore può richiedere il pagamento anticipato degli interessi, vale a dire che, alla concessione del prestito, trattiene la quota di interessi relativa al primo periodo. Il debitore pagherà all'inizio di ogni periodo tale quota di interessi e alla scadenza restituirà il capitale avuto in prestito.
Tornando all'esempio del paragrafo precedente, se ci viene concesso un prestito di € 20000 con questa modalità di rimborso, ad un tasso annuo del 6%, dovremo pagare:

- un interesse $I = 20000 \cdot 0{,}06 = 1200(€)$ ogni anno
- l'intero capitale di € 20000 alla scadenza dopo due anni.

Pagheremo cioè:

- **se l'interesse è anticipato**

  € 1200 alla stipula del contratto, cioè all'inizio del primo anno, e questo equivale in pratica a ricevere $20000 - 1200 = 18800(€)$

  € 1200 all'inizio del secondo anno e € 20000 alla scadenza, cioè alla fine del secondo anno

- **se l'interesse è posticipato**

  € 1200 alla fine del primo anno

€ 21200 alla fine del secondo anno, quota comprensiva del capitale e degli interessi.

L'ammortamento americano o a due tassi

In un contratto di prestito con rimborso globale del capitale si può prevedere una clausola a tutela del creditore in base alla quale il debitore deve provvedere a costituire il capitale mediante versamenti periodici in una banca; questo al fine di evitare che alla scadenza ci sia il rischio di un mancato rimborso.

Si parla di **ammortamento americano** quando la costituzione del capitale avviene mediante una rendita vincolata a favore del creditore.

In questa operazione finanziaria il tasso di remunerazione e il tasso di costituzione, cioè il tasso della rendita, sono diversi e il primo è in genere maggiore del secondo; per questo motivo questo tipo di rimborso viene anche detto **ammortamento a due tassi**.
Dal punto di vista del creditore si tratta sempre di un rimborso globale perché solo alla scadenza egli potrà ritirare il capitale prestato; dal punto di vista del debitore si tratta di un rimborso graduale che studieremo meglio nel prossimo paragrafo analizzando le diverse possibilità.

Per comprendere il funzionamento di questo tipo di rimborso vediamo un esempio. Il Sig. Rossi, che ha avuto un prestito di € 40000 da rimborsare dopo 8 anni anni con pagamento annuo degli interessi al tasso annuo del 5%, conviene con il suo creditore una restituzione con ammortamento americano. La costituzione del capitale avviene mediante il deposito in una banca di una rata annua costante al tasso di interesse del 2%. Determiniamo quale somma deve pagare ogni anno il Sig. Rossi.

Una quota di questa somma è costituita dagli interessi annui:

$$I = 40000 \cdot 0{,}05 = 2000(€)$$

Ad essa va aggiunto l'importo da accantonare ogni anno per la costituzione del capitale; per determinarlo dobbiamo calcolare la rata di una rendita annua posticipata formata da 8 rate costanti al tasso annuo di interesse del 2% che ha un montante di € 40000.

Impostiamo l'equazione: $40000 = R \cdot \dfrac{(1+0{,}02)^8 - 1}{0{,}02}$

da cui ricaviamo che $R = 40000 \cdot \dfrac{0{,}02}{1{,}02^8 - 1} = 4660{,}40(€)$

Il montante di una rendita posticipata si calcola con la formula

$$M = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Complessivamente, alla fine di ogni anno, il Sig. Rossi dovrà quindi pagare $2000 + 4660{,}40 = 6660{,}40(€)$.

Questi ragionamenti valgono in generale e ci permettono di concludere che in un ammortamento americano il debitore deve versare periodicamente due importi:

- l'interesse sul debito da calcolarsi con la formula $I = A \cdot i$ o $I = A \cdot \dfrac{i}{k}$ se la rata è periodale
- una rata di costituzione del capitale al tasso i' (minore di i) da calcolarsi con la formula $R = \dfrac{A \cdot i'}{(1+i')^n - 1}$.

ESEMPI

Esempi sul rimborso globale del capitale e rateizzazione degli interessi

1. Un debito contratto al tasso di remunerazione del 3,3% annuo prevede il pagamento degli interessi quadrimestrali di € 77 alla fine di ogni periodo. Qual è il capitale richiesto in prestito?

I dati a nostra disposizione sono: $I = 77$ quadrimestrali

$i = 0{,}033$ interesse annuo, non conforme al periodo di pagamento degli interessi

Dobbiamo calcolare il capitale A.

Uniformiamo il tasso trasformandolo in tasso quadrimestrale in regime di interesse semplice:

$$i_3 = \frac{i}{3} = \frac{0{,}033}{3} = 0{,}011$$

Utilizziamo la formula che esprime l'interesse dal quale possiamo ricavare il capitale A :

$$I = A \cdot i_3 \qquad \rightarrow \qquad A = \frac{I}{i_3} = \frac{77}{0{,}011} = 7000(€)$$

2. Elena ha contratto un debito di € 50.000 convenendo il pagamento semestrale posticipato degli interessi al tasso semestrale del 2,5% e la restituzione del capitale dopo 8 anni. Calcoliamo:

a. quanto Elena dovrà pagare ogni 6 mesi
b. quanto dovrà restituire alla scadenza
c. il valore totale della somma restituita
d. quanto avrebbe dovuto restituire alla scadenza con un rimborso globale del capitale e degli interessi.

I dati sono tutti omogenei rispetto al tempo; possiamo quindi rispondere subito alle richieste.

a. Calcoliamo l'interesse semestrale: $I = 50000 \cdot 0{,}025 = 1250(€)$

b. Alla fine dell'ottavo anno Elena restituirà una somma: $S = 50000 + 1250 = 51250(€)$

c. Per rispondere a questa domanda dobbiamo considerare che il pagamento semestrale degli interessi costituisce una rendita di rata $R = 1250$ con un numero di rate pari a 16; è necessario quindi calcolare il montante di questa rendita posticipata:

$$M = R \cdot s_{\overline{16}|0,25} \qquad \rightarrow \qquad M = 1250 \cdot \frac{(1+0{,}025)^{16} - 1}{0{,}025} = 24225{,}28(€)$$

Ad essa va aggiunto il capitale iniziale da restituire di € 50000; il valore complessivo dell'operazione è quindi di $50000 + 24225{,}28 = 74225{,}28(€)$.

d. In caso di rimborso globale, la somma da restituire è il montante di € 50000 calcolato in regime di interesse composto per un periodo di 8 anni, cioè 16 semestri:

$S = 50000 \cdot (1 + 0{,}025)^{16} = 74225{,}28(€)$

Come si vede, complessivamente il costo dell'operazione è lo stesso, perché sostanzialmente cambia solo la modalità di pagamento degli interessi.

Esempi sull'ammortamento americano

3. Calcoliamo la rata di costituzione al tasso annuo dell'1,5% che deve servire al rimborso di un capitale di € 30000 concesso al tasso annuo del 6% e rimborsabile dopo 5 anni con pagamento annuo posticipato degli interessi; troviamo poi la somma che deve essere pagata ogni anno dal debitore per far fronte agli impegni presi.

La rata di costituzione del capitale si ricava dall'equazione: $30000 = R \cdot \dfrac{(1+0{,}015)^5 - 1}{0{,}015}$
la cui soluzione è $R = 5822{,}68(€)$

La quota annua degli interessi è: $I = 30000 \cdot 0{,}06 = 1800(€)$

Complessivamente il debitore deve pagare annualmente $5822{,}68 + 1800 = 7622{,}68(€)$.

4. Per estinguere un debito contratto con ammortamento americano, Mario deve versare in banca € 395,20 al mese al tasso annuo nominale convertibile mensilmente del 3,6% per un periodo di tre anni. Calcoliamo l'ammontare del prestito e gli interessi che egli deve pagare ogni anno se il prestito è stato concesso al tasso annuo del 5,4%.

Questa volta conosciamo l'importo della rata e dobbiamo calcolare il montante della rendita tenendo presente che il numero delle rate è 36 e che $i'_{12} = \dfrac{j'_{12}}{12} = \dfrac{0{,}036}{12} = 0{,}003$

$$M = 395{,}20 \cdot s_{\overline{36}|0{,}003} \qquad \rightarrow \qquad M = 395{,}20 \cdot \frac{(1+0{,}003)^{36} - 1}{0{,}003} = 15000(€)$$

Gli interessi da pagare ogni anno sono quindi: $I = 15000 \cdot 0{,}054 = 810(€)$

Il valore di riscatto

In questa forma di rimborso il capitale prestato A viene restituito alla scadenza, gli interessi vengono pagati ad ogni periodo; il valore di riscatto ad un tempo k anteriore alla scadenza comprende quindi:

- la nuda proprietà, che è il valore attuale di A al tempo k, cioè pagabile dopo $(n-k)$ anni, al tasso di valutazione $\bar{i}$:

$$P_k = A(1+\bar{i})^{-(n-k)}$$

- l'usufrutto, che è il valore attuale delle $n-k$ quote di interesse di importo Ai ancora da pagare; poiché tali quote costituiscono una rendita, si ha che:

$$U_k = Ai \cdot a_{\overline{n-k}|\bar{i}} = Ai \cdot \frac{1-(1+\bar{i})^{-(n-k)}}{\bar{i}}$$

Quindi $$V_k = A(1+\bar{i})^{-(n-k)} + Ai \cdot \frac{1-(1+\bar{i})^{-(n-k)}}{\bar{i}}$$

Consideriamo per esempio un prestito di € 12000 che deve essere restituito dopo 6 anni al tasso del 5%; la restituzione avviene però dopo 4 anni e la valutazione viene fatta al tasso $\bar{i}$ del 2,8%. In questo caso:

- la nuda proprietà è il valore attuale di € 12000 al tempo 4 ($n = 6$ e $k = 4$):

$$P_4 = 12000 \cdot (1+0{,}028)^{-2} = 11355{,}21(€)$$

- l'usufrutto è il valore attuale di due quote di interesse $(n-k=2)$:

$$U_4 = \underbrace{12000 \cdot 0{,}05}_{\text{interesse}} \cdot \frac{1-(1+0{,}028)^{-2}}{0{,}028} = 1151{,}42$$

Il valore di riscatto è quindi: $V_4 = 11355{,}21 + 1151{,}42 = 12506{,}63(€)$.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Valentina ha avuto in prestito € 5000 da restituire dopo 4 anni. Si concorda il pagamento posticipato annuo degli interessi al tasso annuo del 4,6%. Valentina alla scadenza dovrà pagare euro:

a. 5000 **b.** 5230 **c.** 4770 **d.** 5460

2. Giovanni ha avuto in prestito € 5800 al tasso annuo del 5% che restituirà dopo 3 anni con ammortamento americano. Il tasso fatto dalla banca è del 2% annuo:

a. la quota interesse è in euro: ① 300 ② 290 ③ 116

b. la rata da depositare annualmente in banca è in euro: ① 2011,17 ② 1895,17 ③ 1858,01

3. Federico ha avuto in prestito € 10000 al 3,5% annuo da restituire fra 6 anni con ammortamento americano; se il tasso praticato dalla banca per la costituzione del capitale è dell'1,8% annuo:

a. la quota di interesse è di euro: ① 250 ② 300 ③ 350

b. la rata annua da versare è di euro: ① 1438,26 ② 1634,15 ③ 1593,23

4. IL RIMBORSO GRADUALE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 32

4.1 Le caratteristiche di un ammortamento

I due precedenti rimborsi sono molto onerosi quando il prestito è di importo elevato; si preferisce allora suddividere il capitale da rimborsare in più quote e si parla quindi di **rimborso graduale** o anche di **ammortamento**.
In questo caso, il debitore versa periodicamente delle rate, dette **rate di ammortamento**, che sono formate da:

- una **quota interesse** I
- una **quota capitale** C.

È importante evidenziare i seguenti aspetti:

- il debito si estingue solo con il pagamento delle quote capitale, cioè la somma di tutte le quote capitale deve essere uguale al prestito
- il debito estinto al tempo k è la somma delle sole quote capitale delle prime k rate
- il debito residuo è la differenza tra l'intero capitale prestato e il debito già estinto.

Una osservazione particolare va fatta poi sulla quota interesse:

- nella prima rata gli interessi vengono calcolati sull'intero capitale prestato
- nella seconda e in quelle successive, gli interessi si calcolano sul debito residuo.

E' quindi evidente che la quota interesse diminuisce al crescere del numero di rate pagate.

Come al solito deve poi valere il principio di equivalenza finanziaria che in questo caso prevede che:

il valore attuale delle rate pagate dal debitore deve essere finanziariamente equivalente alla somma prestata dal creditore.

Per comprendere il significato di un ammortamento vediamo un esempio introduttivo semplice.
Supponiamo di aver ricevuto un prestito di € 10000 che conveniamo di estinguere in 4 anni, suddividendolo in quattro quote capitale al tasso concordato del 5% annuo:

$$C_1 = 2000€ \qquad C_2 = 3000€ \qquad C_3 = 2500€ \qquad C_4 = 2500€$$

Per il calcolo delle rate prepariamo una tabella nella quale indicare: la quota capitale, la quota interesse, la rata annua, il debito estinto e il debito residuo.

periodo k	quota capitale C_k	quota interessi I_k	rata annua R_k	debito estinto E_k	debito residuo D_k
0	——	——	——	——	10000
1	2000	500	2500	2000	8000
2	3000	400	3400	5000	5000
3	2500	250	2750	7500	2500
4	2500	125	2625	10000	——

Spieghiamo come è stato costruito il piano di ammortamento.

Tempo 0. Alla concessione del prestito, nessuna rata è stata pagata e il debito residuo è di € 10000.

Tempo 1. Dopo un anno, la prima rata è formata dalla quota capitale di € 2000 e dalla quota interesse calcolata su € 10000:
$I = 10000 \cdot 0{,}05 = 500(€)$
Dunque $R = 2500(€)$, il debito estinto è di € 2000, il debito residuo è di € 8000.

Tempo 2. Dopo due anni, la seconda rata è formata dalla quota capitale di € 3000 e dalla quota interesse calcolata su € 8000:
$I = 8000 \cdot 0{,}05 = 400(€)$
$R = 3400(€)$, il debito estinto è di € 5000, il debito residuo è di € 5000.

Tempo 3. Dopo tre anni, la terza rata è formata dalla quota capitale di € 2500 e dalla quota interesse calcolata su € 5000:
$I = 5000 \cdot 0{,}05 = 250(€)$
$R = 2750(€)$, il debito estinto è di € 7500, il debito residuo è di € 2500.

Tempo 4. Dopo quattro anni, l'ultima rata è formata dalla quota capitale di € 2500 e dalla quota interesse calcolata su € 2500:
$I = 2500 \cdot 0{,}05 = 125(€)$
$R = 2625(€)$, il debito estinto è di € 10000, il debito residuo è di € 0.

Il piano è finanziariamente equo in quanto:

$$2500(1+0{,}05)^{-1}+3400(1+0{,}05)^{-2}+2750(1+0{,}05)^{-3}+2625(1+0{,}05)^{-4}= 10000$$

LE PRINCIPALI FORME DI AMMORTAMENTO

Esistono diversi tipi di ammortamento che dipendono da come viene calcolata la rata; i due più importanti sono:

- l'**ammortamento progressivo** o **francese**
- l'**ammortamento uniforme** o **italiano**.

4.2 L'ammortamento progressivo

Si parla di **ammortamento progressivo** quando un debito viene rimborsato in modo graduale con il pagamento periodico di ***n* rate costanti** ognuna delle quali contiene una **quota capitale** e una **quota interessi.**

Applicazione informatica *on line*

Questo tipo di ammortamento è noto anche come *ammortamento francese*.
E' questo il tipo di ammortamento che viene fatto quando si accede a un mutuo presso una banca, ad esempio per l'acquisto di una casa, o si paga a rate un'auto. Il debitore sa esattamente quante rate deve pagare e qual è il loro importo fisso.
In tali rate, che supporremo sempre posticipate visto che gli interessi si pagano alla fine del periodo di competenza, è sempre specificato inoltre il valore delle quote capitale e delle quote interesse; queste ultime sono, con varie modalità, oneri deducibili nella dichiarazione dei redditi.

Vediamo un esempio. Otteniamo da una banca un mutuo di € 20000 al tasso del 4% annuo da rimborsare con ammortamento progressivo in 5 anni. Quale sarà la rata costante annua che dovremo pagare?
In base all'equivalenza finanziaria € 20000 sono il valore attuale di una rendita formata dalle rate che verseremo; possiamo quindi dire che

$$20000 = R \cdot a_{\overline{5}|0,04}$$

da cui ricaviamo che il valore della rata è

$$R = \frac{20000}{a_{\overline{5}|0,04}} = 4\,492,54\,(€)$$

Potremo estinguere quindi il debito versando per 5 anni € 4492,54 all'anno.
In generale:

in un ammortamento progressivo di un capitale A, costituito da n rate costanti al tasso i, l'importo R della rata si calcola con la formula

$$R = A \cdot \alpha_{\overline{n}|i} \qquad \text{dove abbiamo posto} \qquad \alpha_{\overline{n}|i} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

Il simbolo $\alpha_{\overline{n}|i}$ rappresenta la rata annua posticipata necessaria ad estinguere un debito di € 1 in n anni.

Scrivendo per esteso la formula: $\boxed{R = A \cdot \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}}$

Per stendere il piano di ammortamento dobbiamo costruire una tabella analoga a quella dell'esempio introduttivo; per farlo osserviamo che:

- la prima quota interesse è calcolata sull'intero debito e quindi avremo che $I_1 = 20000 \cdot 0,04 = 800\,(€)$;
- di conseguenza la prima quota capitale è $C_1 = R - I_1 = 4\,492,54 - 800 = 3\,692,54\,(€)$;
- dopo aver pagato la prima rata il debito residuo è $D_1 = S - C_1 = 20000 - 3\,692,54 = 16\,307,46\,(€)$;

- la seconda quota interesse sarà dunque calcolata su questa somma ed è $I_2 = 16\,307{,}46 \cdot 0{,}04 = 652{,}30\,(€)$.

Continuando in questo modo, possiamo stendere il piano di ammortamento come nella seguente tabella:

anni (n)	rata (R)	quota interessi (I_k)	quota capitale (C_k)	debito estinto (E_k)	dedito residuo (D_k)
0	———	———	———	———	20000
1	4492,54	800	3692,54	3692,54	16307,46
2	4492,54	652,30	3840,24	7532,78	12467,22
3	4492,54	498,69	3993,85	11526,63	8473,37
4	4492,54	338,93	4153,61	15680,24	4319,76
5	4492,54	172,79	4319,75	19999,99	0

Nell'istogramma di ***figura 2*** viene mostrato l'andamento delle quote capitale e delle quote interesse.
Sia dalla tabella che dalla rappresentazione grafica si evidenzia che le quote capitale sono crescenti, mentre diminuiscono le quote interesse.
In particolare si dimostra che:

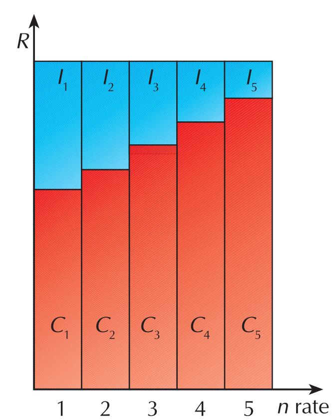
> le quote capitale crescono secondo una progressione geometrica di ragione $(1 + i)$.

Una successione di numeri è in progressione geometrica di ragione q se il rapporto fra un termine e il precedente è uguale a q.

Lo possiamo verificare anche dal piano di ammortamento dell'esempio: il rapporto tra due quote capitale successive è costante e vale proprio 1,04:

$$\frac{4319{,}75}{4153{,}61} = 1{,}04 \qquad \frac{4153{,}61}{3993{,}85} = 1{,}04 \qquad \text{e così via}$$

Figura 2



Il nome di ammortamento progressivo dato a questo metodo deriva proprio da questa proprietà.

La composizione della k-esima rata si determina sfruttando la proprietà evidenziata; questa la procedura:

- si trova la rata costante $\quad R = A \cdot \alpha_{\overline{n|}i}$
- si trova la prima quota interesse $\quad I_1 = A \cdot i$
- si trova la prima quota capitale come differenza tra la rata e la quota interesse
  $C_1 = R - I_1$
- si trova la k-esima quota capitale sfruttando le progressioni
  $C_k = C_1 \cdot (1 + i)^{k-1}$
- si trova la k-esima quota interesse per differenza $\quad I_k = R - C_k$
- si trova il debito residuo dopo il pagamento della k-esima rata come valore attuale delle restanti rate
  $D_k = R \cdot a_{\overline{n-k|}i}$
- si trova il debito estinto per differenza $\quad E_k = A - D_k$

In una progressione geometrica di ragione q

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$$

ESEMPI

1. Un debito di € 15000 è rimborsabile in 10 anni con ammortamento progressivo al 5% annuo. Troviamo la composizione della quinta rata e la situazione del debito dopo il pagamento della settima rata.

Non è necessario stendere il piano di ammortamento; basta seguire le indicazioni date ed applicare le relazioni appropriate:

- calcoliamo la rata costante $R = 15000 \cdot \alpha_{\overline{10}|0,05} = 1942,57\,(€)$
- la prima quota interesse è $I_1 = 15000 \cdot 0,05 = 750\,(€)$
- di conseguenza la prima quota capitale è $C_1 = 1942,57 - 750 = 1192,57\,(€)$
- la quinta quota capitale è $C_5 = 1192,57(1+0,05)^4 = 1449,58\,(€)$
- ed allora $I_5 = 1942,57 - 1449,58 = 492,99\,(€)$

Allora la composizione della quinta rata è:

anno	rata	quota capitale	quota interesse
5	1942,57	1449,58	492,99

Calcoliamo il debito residuo al tempo 7 come valore attuale delle restanti 3 rate:

$$D_7 = 1942,57 \cdot a_{\overline{3}|0,05} = 5290,10\,(€)$$

Il debito estinto è quindi $E_7 = 15000 - 5290,10 = 9709,90\,(€)$.

Il valore di riscatto

Il valore del prestito al tempo k è il valore attuale delle restanti $n-k$ rate costanti al tasso $\bar{i}$:

$$V_k = R \cdot a_{\overline{n-k}|\bar{i}}$$

e poiché $R = A \cdot \alpha_{\overline{n}|i}$, otteniamo che:

$$V_k = A \cdot \alpha_{\overline{n}|i} \cdot a_{\overline{n-k}|\bar{i}}$$

LA FORMULA DI ACHARD-MAKEHAM

Per calcolare la nuda proprietà e l'usufrutto si usa una comoda relazione che prende il nome di *formula di Achard-Makeham* che lega tra loro il debito residuo, la nuda proprietà e l'usufrutto di un dato periodo k :

$$\boxed{D_k = U_k \cdot \frac{\bar{i}}{i} + P_k}$$

La nuda proprietà è il valore attuale delle rimanenti quote capitale; utilizzando questa formula si dimostra che:

$$P_k = R \cdot \frac{(1+i)^{-(n-k)} - (1+\bar{i})^{-(n-k)}}{\bar{i} - i}$$

L'usufrutto è la differenza, quindi: $U_k = V_k - P_k$.

Calcoliamo per esempio il valore di riscatto di un capitale $A = 10000(€)$ al tasso annuo $\bar{i}$ del 3% essendo noti i seguenti dati:

$i = 6\%$ tasso annuo $\quad n = 8$ rate annue $\quad$ tempo di riscatto $k = 5$

Calcoliamo prima di tutto l'importo della rata:

$$R = 10000 \cdot \frac{0{,}06}{1-(1+0{,}06)^{-8}} = 1610{,}36\,(€)$$

Applichiamo adesso le formule precedenti:

$$V_5 = R \cdot a_{\overline{n-k|}\bar{i}} = 1610{,}36 \cdot \frac{1-(1+0{,}03)^{-3}}{0{,}03} = 4555{,}08\,(€)$$

$$P_5 = 1610{,}36 \cdot \frac{(1+0{,}06)^{-3}-(1+0{,}03)^{-3}}{0{,}03-0{,}06} = 4053{,}94\,(€)$$

$$U_5 = 4555{,}08 - 4053{,}94 = 501{,}14\,(€)$$

4.3 L'ammortamento uniforme

Si parla di **ammortamento uniforme** quando un prestito viene rimborsato in modo graduale con il pagamento periodico di n rate in cui la quota capitale rimane costante.

Applicazione informatica *on line*

Questo tipo di ammortamento è noto anche come *ammortamento italiano*.
Anche in questo vediamo dapprima un esempio di come costruire il piano di ammortamento.

Dobbiamo rimborsare un prestito di € 12000 al tasso annuo del 5% in 6 rate annue posticipate.
Per avere la quota capitale basta dividere l'importo del prestito in 6 parti uguali:

$$C = \frac{12000}{6} = 2000(€)$$

Le quote interesse devono essere calcolate sul debito residuo:

- prima rata, I viene calcolata sull'ammontare dell'intero prestito:
  $I = 12000 \cdot 0{,}05 = 600(€)$
- seconda rata, I viene calcolata sul primo debito residuo, cioè € 10000:
  $I = 10000 \cdot 0{,}05 = 500(€)$
- terza rata, I viene calcolata sul secondo debito residuo, cioè € 8000:
  $I = 8000 \cdot 0{,}05 = 400(€)$
- quarta rata, I viene calcolata sul terzo debito residuo, cioè € 6000:
  $I = 6000 \cdot 0{,}05 = 300(€)$

e così via per le rimanenti rate.

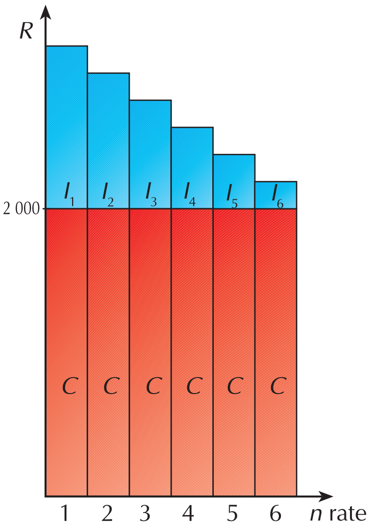
Nella tabella che segue abbiamo rappresentato il piano di ammortamento per esteso.

anni	quota capitale	quota interesse	rata	debito estinto	debito residuo
0	———	———	———	———	12000
1	2000	600	2600	2000	10000
2	2000	500	2500	4000	8000
3	2000	400	2400	6000	6000
4	2000	300	2300	8000	4000
5	2000	200	2200	10000	2000
6	2000	100	2100	12000	———

Nell'istogramma di ***figura 3*** viene mostrato l'andamento delle quote capitale, che sono costanti, e delle quote interesse che invece diminuiscono nel tempo.
In particolare, le quote interesse diminuiscono sempre della stessa quantità perché ad ogni rata successiva vengono calcolate su una somma che diminuisce in modo costante; nel caso del nostro esempio diminuiscono sempre di 100 euro e formano quindi una progressione aritmetica di ragione -100 :

$$600 \qquad 500 \qquad 400 \qquad 300 \qquad 200 \qquad 100$$

Figura 3



In una progressione aritmetica di ragione d:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Ripetendo gli stessi ragionamenti nel caso generale troviamo che, indicando con A l'ammontare del prestito, con i il tasso di interesse e con n il numero delle rate:

- la quota capitale è: $C = \dfrac{A}{n}$
- la prima quota interesse è $A \cdot i$ e le successive formano una progressione aritmetica di ragione $-C \cdot i$
- il debito estinto è in progressione aritmetica di ragione C
- il debito residuo è in progressione aritmetica di ragione $-C$.

Per trovare la k–esima quota interesse basta quindi applicare le regole delle progressioni aritmetiche e determinare l'elemento di posto k a partire da quello di posto 1 :

$$I_k = I_1 + (k-1) \cdot (-Ci) \qquad \rightarrow \qquad I_k = I_1 - (k-1)Ci$$

Sostituendo a I_1 e a C le rispettive espressioni troviamo infine che:

$$I_k = A \cdot i - (k-1) \cdot \frac{A}{n} \cdot i \qquad \rightarrow \qquad I_k = Ai\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

cioè $I_k = Ai \cdot \dfrac{n-k+1}{n}$

In definitiva

in un ammortamento uniforme:

- la quota capitale è costante ed è: $C = \dfrac{A}{n}$
- la quota interesse è variabile ed è: $I_k = Ai \cdot \dfrac{n-k+1}{n}$
- la rata è variabile ed è: $R_k = \dfrac{A}{n} + Ai \cdot \dfrac{n-k+1}{n}$

ESEMPI

1. Determiniamo la variazione costante della quota interesse in un ammortamento uniforme di un prestito di € 32000 in 4 anni al tasso del 4,4%. Costruiamo poi il piano di ammortamento.

La quota capitale di ogni rata è: $C = \dfrac{32000}{4} = 8000(€)$

La prima quota interesse è: $I_1 = 32000 \cdot 0{,}044 = 1408(€)$

Le successive quote diminuiscono di $C \cdot i$, cioè di: $8000 \cdot 0{,}044 = 352(€)$

Possiamo adesso stendere il piano di ammortamento:

n	*C*	*I*	*R*	*E*	*D*
0	-	-	-	-	32000
1	8000	1408	9408	8000	24000
2	8000	1056	9056	16000	16000
3	8000	704	8704	24000	8000
4	8000	352	8352	32000	

2. Calcoliamo la composizione della sesta rata di un debito di € 50000 contratto al tasso annuo del 4,5% e restituibile con ammortamento uniforme in 10 rate.

La quota capitale costante è di € 5000

Calcoliamo la sesta quota interessi $I_6 = 50000 \cdot 0{,}045 \cdot \left(\dfrac{10-6+1}{10}\right) = 1125(€)$

quindi la sesta rata è $R_6 = C + I_6 = 5000 + 1125 = 6125(€)$.

Il valore di riscatto

Nell'ammortamento uniforme, essendo le quote capitale costanti, è semplice trovare la nuda proprietà:

$$P_k = C \cdot a_{\overline{n-k}|\,i}$$

Anche in questo caso, per il calcolo dell'usufrutto possiamo ricorrere alla formula di Achard-Makeham:

$$U_k = C \cdot \frac{\bar{i}}{i} \cdot \left(n - k - a_{\overline{n-k}|\,\bar{i}}\right)$$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Considera le seguenti proposizioni relative ad un ammortamento graduale:
① le quote capitale sono costanti ② le quote interesse sono costanti ③ le rate sono costanti

Di esse si può dire che:

a. nell'ammortamento francese sono tutte vere V F

b. nell'ammortamento francese è vera solo la ③ V F

c. nell'ammortamento italiano è vera solo la ② V F

d. nell'ammortamento italiano è vera solo la ① V F

2. Barra vero o falso.

a. Nell'ammortamento progressivo le quote capitale costituiscono una progressione aritmetica. V F

b. Nell'ammortamento uniforme le quote interesse formano una progressione aritmetica. V F

c. In un ammortamento, se la rata è costante, la quota capitale e la quota interesse non lo sono mai. V F

d. In un ammortamento, se la quota capitale è costante, la rata è costante. V F

5. IL LEASING

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 37

Uno dei problemi delle aziende è quello di poter disporre di macchinari il più possibile moderni per poter produrre beni tecnologicamente avanzati e competitivi; spesso è poi necessario aumentare gli spazi costruendo capannoni più grandi e più moderni; molte aziende hanno poi bisogno di mezzi di trasporto per le merci o di auto di rappresentanza. Tutto questo costa e in molti casi un'azienda non ha tutto il denaro che le serve per poter far fronte alle diverse necessità.
Si ricorre allora ad una forma di finanziamento particolare chiamata **leasing**, termine anglosassone che possiamo tradurre con *locazione finanziaria*. Nella giurisprudenza esistono diverse forme di leasing, quello di cui ci occupiamo noi in questa sede è il *leasing finanziario*. Per spiegarne il funzionamento vediamo dapprima un esempio.

Supponiamo che un'azienda abbia la necessità di acquistare una macchina per eseguire delle lavorazioni; si rivolge a una società finanziaria la quale acquista il bene che le interessa e ne diventa la proprietaria. La macchina viene poi messa a disposizione dell'azienda dietro il pagamento periodico di un canone. Alla scadenza del contratto il bene può essere riscattato (cioè acquistato) dall'azienda che ne diventa la proprietaria, può essere restituito alla società finanziaria, oppure ancora si può stipulare un altro contratto di leasing analogo a quello scaduto.
A differenza di un contratto di prestito, quindi, in cui è un Istituto di Credito che presta denaro all'azienda per l'acquisto del bene, che diventa quindi proprietà dell'azienda stessa, in un contratto di leasing l'azienda **non è** proprietaria del bene e quindi non ha né i benefici né gli oneri che derivano dall'essere proprietario. Per esempio, se la macchina si guasta è la società di leasing che provvede alla riparazione, se viene rubata la società di leasing deve sostituirla, ma se l'azienda usa impropriamente la macchina e la danneggia ne deve rispondere al proprietario; nel leasing di un'autovettura bollo, assicurazione sono a carico dell'azienda ma riparazione di eventuali guasti sono a carico della Società di leasing.

Formalizziamo quello di cui abbiamo parlato nell'esempio.

Le parole chiave di un contratto di lesing:
- locatario
- locatore
- canone
- riscatto

In un contratto di leasing intervengono due parti:

- un soggetto A che ha bisogno di disporre di un certo bene e che chiamiamo **locatario**
- un soggetto B, che chiamiamo **locatore**, che acquista il bene e che lo mette a disposizione di A.

La disponibiltà del bene avviene dietro il pagamento periodico di una somma R che chiamiamo **canone di locazione**.

Al termine del contratto il bene può diventare di proprietà del locatario A dietro il pagamento di una somma prestabilita detta **valore di riscatto**.
Il contratto di leasing stabilisce poi:

- la durata
  In genere un leasing dura da 3 a 5 anni, salvo per i beni immobili per i quali la durata varia da 25 a 30 anni o più; la durata del contratto rappresenta normalmente il periodo di vita utile del bene.
- l'importo dei canoni di locazione
  Il canone è di solito mensile e di importo costante, ma si possono avere leasing con canoni di periodicità diversa e di importo variabile.
- un eventuale acconto
  L'acconto comporta il pagamento anticipato di un certo numero di canoni e per questo viene di solito detto *maxicanone*.
- il valore di riscatto del bene alla scadenza del contratto
  Deve poi sempre valere il principio di equivalenza finanziaria in base al quale

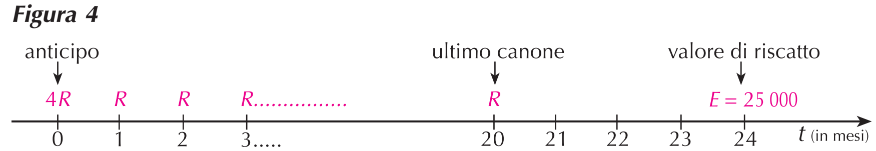
> il valore del bene dato in locazione, al tasso stabilito dalle parti, deve essere uguale al valore attuale di tutte le somme di denaro che la società locataria si impegna a pagare.

Vediamo un esempio. Un imprenditore necessita di un macchinario del costo di € 300000 e stipula per questo un contratto di leasing che prevede:

- il pagamento di 24 canoni mensili al tasso mensile dello 0,5% di cui 4 da versare come acconto
- possibilità di riscattare il bene alla scadenza del contratto dietro un pagamento di € 25000.

La situazione è rappresentata sulla retta dei tempi in ***figura 4***, dove con E abbiamo indicato il valore di riscatto:

Figura 4



- al tempo 0, momento della stipula del contratto, l'imprenditore deve pagare 4 canoni, cioè $4R$, come acconto; ne rimangono quindi ancora 20 da pagare
- alla fine di ogni mese successivo deve pagare un canone R
- al tempo 20 paga il ventiquattresimo e ultimo canone
- il contratto scade al tempo 24, per i restanti mesi non viene quindi più pagato alcun canone, ma il riscatto del bene potrà avvenire solo al tempo 24 dietro il pagamento di € 25000.

IL CALCOLO DEL CANONE

Il canone di locazione, che di solito è posticipato visto che vi è sempre un acconto che si paga alla stipula del contratto, viene calcolato in base al principio dell'equivalenza finanziaria al tempo di stipula del contratto, cioè al tempo zero:

valore del bene = **canoni anticipati + valore attuale dei rimanenti canoni + valore attuale del riscatto**

Nel nostro caso: $\quad 300000 = 4R + R \cdot a_{\overline{20|}0{,}005} + 25000 \cdot (1+0{,}005)^{-24}$

e da questa equazione ricaviamo che è $R = 12085{,}76(€)$.

Questo significa che l'imprenditore deve pagare:

- € 48343,04 come anticipo
- € 12085,76 alla fine di ogni mese per venti mesi
- € 25000 allo scadere del contratto

Complessivamente la macchina viene a costare € 315058,24.

Osserviamo che il canone R varia anche in funzione del valore di riscatto: maggiore è questo valore, minore è l'importo della rata. Prova a variare questo valore nell'equazione precedente per verificarlo.

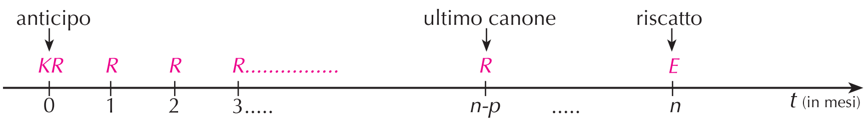
Generalizziamo le osservazioni fatte (***figura 5***):

indicando con C il costo del bene, con p il numero di canoni di acconto, con n il numero totale dei canoni, con E il valore di riscatto, l'equazione che permette di calcolare l'importo R del canone è la seguente:

$$C = p \cdot R + R \cdot a_{\overline{n-p|}i_k} + E(1+i_k)^{-n}$$

Le grandezze coinvolte in questa equazione sono C, n, p, E, R, nonché il tasso periodale i_k; da essa si può ricavare il valore di una qualsiasi di esse se sono noti i valori delle altre. L'equazione permette quindi di risolvere qualsiasi problema di valutazione in un contratto di leasing.

Figura 5



In alcuni contratti l'anticipo iniziale viene a volte calcolato non sui canoni ma su una percentuale del costo del bene; nel caso dell'esempio precedente l'acconto potrebbe essere pari al 10% di € 300000, cioè € 30000.
In questi casi basta sostituire il primo termine al secondo membro dell'equazione con il valore A dell'acconto e considerare che i canoni sono esattamente n:

$$C = \underbrace{A}_{\text{acconto}} + R \cdot a_{\overline{n|}i_k} + E(1+i_k)^{-n}$$

ESEMPI

1. La ditta Rossi fa un contratto di leasing per un automezzo del valore di € 40000, con un contratto che prevede il pagamento del 10% del suo valore all'atto della stipula, il pagamento di canoni trimestrali al tasso dell'1,5% trimestrale, il riscatto dopo 4 anni con la somma di € 1000. Qual è il valore del canone trimestrale?

In questo contratto dobbiamo trovare R sapendo che:

$C = 40000 \qquad A = 10\%$ di $C \qquad i_4 = 0{,}015 \qquad n = 16$ (4 trimestri per 4 anni) $\qquad E = 1000$

Calcoliamo l'anticipo: $A = 40000 \cdot 0{,}1 = 4000$

Impostiamo l'equazione: $40000 = 4000 + R \cdot a_{\overline{16}|0{,}015} + 1000 \cdot (1 + 0{,}015)^{-16}$

cioè: $36000 = R \cdot \dfrac{1 - 1{,}015^{-16}}{0{,}015} + 1000 \cdot 1{,}015^{-16}$

da cui ricaviamo che $R = 2491{,}78(€)$.

2. Un contratto di leasing della durata di quattro anni per l'acquisto di un'autovettura prevede il pagamento di 48 canoni mensili di importo € 1021,28, tre dei quali costituiscono il maxicanone iniziale, al tasso annuo nominale convertibile mensilmente del 4,8% e un valore di riscatto di € 6000. Qual è il costo del bene?

Dobbiamo calcolare C conoscendo i valori di tutti gli altri parametri; trasformiamo dapprima il tasso in tasso mensile:

$$i_{12} = \frac{j_{12}}{12} = \frac{0{,}048}{12} = 0{,}004$$

Applichiamo la formula arrotondando il risultato all'euro più vicino:

$$C = 3 \cdot 1021{,}28 + 1021{,}28 \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}004)^{-45}}{0{,}004} + 6000 \cdot (1 + 0{,}004)^{-48} = 50000(€)$$

La ricerca del tasso

Il problema della ricerca del tasso incontra le stesse difficoltà degli analoghi problemi di matematica finanziaria in quanto ci si trova di fronte alla risoluzione di equazioni di grado molto elevato che devono essere risolte per via approssimata.
Supponiamo per esempio che un contratto di leasing preveda le seguenti condizioni:

- costo del bene € 45000
- acconto iniziale € 4000
- 20 canoni mensili posticipati di € 2100 ciascuno
- valore di riscatto € 1000.

Ci chiediamo a quale tasso mensile è stato stipulato questo contratto.
Impostiamo l'equazione

$$45000 = 4000 + 2100 \cdot \frac{1 - (1 + i_{12})^{-20}}{i_{12}} + 1000 \cdot (1 + i_{12})^{-20}$$

Per risolverla, troviamo due tassi particolari, uno approssimato per difetto e uno per eccesso del tasso soluzione e usiamo poi l'interpolazione lineare.

- Poniamo $i_{12} = 0{,}005$ e sostituiamo questo valore nel secondo membro dell'equazione; otteniamo 44778,64 che è minore del primo membro.
  Abbiamo così trovato un valore approssimato per eccesso della soluzione (ricorda che il valore attuale è una funzione decrescente del tasso)
- Poniamo $i_{12} = 0{,}004$; sostituendo troviamo 45209,84 che è maggiore del primo membro. Abbiamo trovato il valore approssimato per difetto.

- Costruiamo la tabella dei punti per effettuare l'interpolazione:

	i_{12}	C
punto A	0,004	45209,84
punto B	0,005	44778,64
y	x	45000

- Scriviamo l'equazione della retta che passa per i punti A e B:

$$\frac{x - 0{,}004}{0{,}005 - 0{,}004} = \frac{y - 45209{,}84}{44778{,}64 - 45209{,}84}$$

- Sostituiamo 45000 al posto di y e troviamo il valore incognito del tasso:

$$\frac{x - 0{,}004}{0{,}005 - 0{,}004} = \frac{45000 - 45209{,}84}{44778{,}64 - 45209{,}84} \qquad \rightarrow \qquad x = 0{,}004487$$

Il contratto di leasing è stato stipulato al tasso mensile dello 0,45%.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. In un contratto di leasing:

a. il costo del bene è sempre inferiore al totale delle somme pagate dal locatario V F
b. il locatario ha l'obbligo di riscatto del bene V F
c. il maxicanone è sempre uguale a un certo numero p di canoni V F
d. l'importo delle rate aumenta se diminuisce il valore di riscatto V F
e. l'importo dei canoni è sempre maggiore del costo del bene ripartito sui canoni stessi. V F

I concetti e le regole

Il prestito

Un **prestito** o **mutuo** è la concessione di un capitale da parte di un soggetto A, il creditore, a un soggetto B, il debitore, il quale si impegna a restituire il capitale e a pagare gli interessi nei tempi convenuti. In genere si opera in regime di interesse semplice nel caso in cui la durata del prestito è inferiore all'anno, in regime di interesse composto negli altri casi.
Il valore attuale delle quote di capitale che devono essere ancora pagate prende il nome di *nuda proprietà*; il valore attuale delle quote di interesse che devono essere ancora versate si chiama *usufrutto*.
Ogni prestito deve essere rimborsato e, a seconda delle regole su cui si basa il rimborso, si può avere un rimborso globale oppure graduale.

Il rimborso globale

Si parla di rimborso globale quando il capitale viene restituito interamente alla scadenza del periodo convenuto. Si può avere:

- il rimborso globale sia del capitale che degli interessi; per determinare l'importo che deve essere restituito si deve calcolare il montante del capitale prestato:
  $M = C(1 + it)$ in capitalizzazione semplice $\qquad$ $M = C(1 + i)^t$ in capitalizzazione composta
- il rimborso globale del capitale e periodico degli interessi; l'ammontare degli interessi si calcola con la formula:
  $I = C \cdot i$ se il tasso è annuo $\qquad$ $I = C \cdot \dfrac{i}{k}$ se il tasso è periodale
- l'ammortamento americano in base al quale il debitore è tenuto a versare due importi:
  - l'interesse sul debito che si calcola con la formula $I = C \cdot i$ se la rata è annua oppure $I = C \cdot \dfrac{i}{k}$ se la rata è periodale
  - la rata di costituzione del capitale al tasso i' (minore di i) che si calcola con la formula $R = \dfrac{C \cdot i'}{(1 + i')^n - 1}$

Il rimborso graduale o ammortamento

In questo tipo di rimborso, il capitale e gli interessi vengono ripartiti in una serie di rate periodali fino all'estinzione del debito; ciascuna rata è composta da una quota capitale e da una quota interesse.
Le principali forme di ammortamento sono le seguenti.

- **Ammortamento progressivo o francese**
  È un ammortamento a rate costanti in cui sia la quota capitale che la quota interesse sono variabili.
  Per calcolare la rata R si applica la formula: $R = \dfrac{A}{a_{\overline{n}|i}} = A \cdot \dfrac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$
  Inoltre:
  la prima quota interesse è: $I_1 = A \cdot i$
  la prima quota capitale è: $C_1 = R - I_1$
  la k-esima quota capitale è: $C_k = C_1(1 + i)^{k-1}$
  la k-esima quota interesse è: $I_k = R - C_k$

- **Ammortamento uniforme o italiano**
  È un ammortamento a rate variabili in cui:
  la quota capitale è costante ed è: $C = \dfrac{A}{n}$
  la quota interesse è variabile ed è: $I_k = Ai\left(\dfrac{n - k + 1}{n}\right)$
  la rata è variabile ed è: $R_k = C + I_k = \dfrac{A}{n} + Ai\left(\dfrac{n - k + 1}{n}\right)$

Il leasing

In un contratto di leasing una società, detta *locatrice*, acquista un bene per conto di un soggetto o ente, detto *locatario*, concedendolo in uso dietro il pagamento di un canone di locazione.
Un contratto di leasing prevede il pagamento di:

- un acconto iniziale all'atto della stipula del contratto (il maxicanone)
- un certo numero di rate periodiche (i canoni)
- una somma stabilita E quale riscatto del bene.

Questo tipo di contratto ha come modello l'equazione

$C = p \cdot R + R \cdot a_{\overline{n-p|}\, i_k} + E(1 + i_k)^{-n}$ nel caso in cui il maxicanone è composto da p canoni di importo R

$C = A + R \cdot a_{\overline{n|}\, i_k} + E(1 + i_k)^{-n}$ nel caso in cui l'acconto iniziale non dipende dall'importo del canone.

Il rimborso dei prestiti

LE CARATTERISTICHE DI UN PRESTITO

la teoria è a pag. 1

Comprensione

1 Barra vero o falso.

a. Un prestito è a breve scadenza solo se il rimborso avviene entro il mese di accensione del prestito. V F

b. In un prestito a breve scadenza il calcolo degli interessi viene fatto in regime di interesse semplice. V F

c. Se un prestito è a media scadenza il calcolo degli interessi viene fatto in regime di interesse semplice. V F

d. I prestiti a lunga scadenza vengono valutati in regime di interesse composto. V F

2 Barra vero o falso.

a. Un prestito è indiviso se il rimborso avviene in un'unica soluzione. V F

b. Un prestito è diviso in titoli se il rimborso avviene in più rate. V F

c. In un rimborso globale, il capitale prestato viene sempre restituito in un'unica soluzione. V F

d. In un rimborso globale, gli interessi possono anche essere pagati in forma rateale. V F

3 Scegli la frase corretta. Nel rimborso di un prestito:

a. il valore di riscatto è la somma del capitale da restituire con gli interessi
b. il tasso di valutazione è il tasso applicato nel calcolo degli interessi da pagare
c. il tasso di valutazione si chiama anche tasso di remunerazione
d. la parola *ammortamento* implica una rateizzazione sia del capitale da restituire che degli interessi.

4 Il simbolo V_k riferito ad un prestito indica:

a. il valore di riscatto oggi
b. il valore di riscatto al tempo k
c. la somma da restituire alla scadenza.

5 In un rimborso, la nuda proprietà rappresenta:

a. il valore attuale delle quote di interesse che devono essere ancora versate
b. il valore attuale delle quote di capitale che devono essere ancora pagate
c. il valore attuale delle rate ancora da pagare
d. il montante delle quote capitale che devono essere ancora pagate.

6 In un rimborso, l'usufrutto rappresenta:

a. il valore attuale delle quote di interesse che devono essere ancora versate
b. il valore attuale delle quote di interesse che sono già state versate
c. il valore attuale delle rate che devono essere ancora versate
d. il montante delle quote di interesse che sono già state versate.

7 La somma tra la nuda proprietà e l'usufrutto calcolati ad una data epoca danno:
a. il valore del prestito alla stessa epoca
b. il valore del prestito ad un'epoca qualunque
c. gli interessi che complessivamente si devono pagare.

IL RIMBORSO GLOBALE

la teoria è a pag. 3

RICORDA

In un rimborso globale sia il capitale prestato A che gli interessi vengono restituiti in un'unica soluzione. Per il calcolo del montante si applica:

- il regime di interesse semplice per i prestiti a breve scadenza: $M = A(1 + it)$
- il regime di interesse composto per i prestiti a media e lunga scadenza: $M = A(1 + i)^t$

Comprensione

8 Un capitale di € 4000 viene restituito dopo sei mesi ad un tasso di interesse del 7% annuo; la somma restituita è di euro:
a. 4140 **b.** 4137,63 **c.** 4280 **d.** 4230,68

9 Un capitale di € 6000 viene restituito dopo due anni e sei mesi ad un tasso annuo dell'8%; alla scadenza si deve pagare una somma arrotondata all'euro più vicino di:
a. € 7284 **b.** € 6998 **c.** € 7273 **d.** € 7200

10 Un capitale A dovrebbe essere restituito dopo due anni al tasso di remunerazione del 6,5%; viene però concordato un anticipo di 8 mesi del rimborso al tasso di valutazione del 2,5%. Il debitore deve pagare una somma uguale a:
a. il montante di A calcolato per 1 anno e 4 mesi al tasso del 2,5%
b. il montante di A calcolato per 1 anno e 4 mesi al tasso del 6,5%
c. il valore attuale del montante di A calcolato per due anni al tasso del 2,5%, scontato poi per 8 mesi al tasso del 6,5%
d. il valore attuale del montante di A calcolato per due anni al tasso del 6,5%, scontato poi per 8 mesi al tasso del 2,5%.

11 Un prestito di € 5000 al tasso di remunerazione del 5,5% composto restituisce una somma pari a € 5871,21 dopo un tempo t. La durata del prestito è di:
a. 2 anni **b.** 3 anni **c.** 2 anni e 6 mesi **d.** 4 anni

Applicazione

Risolvi i seguenti problemi relativi ad un rimborso totale.

12 Hai chiesto un prestito di € 50000 da restituire con rimborso globale. Determina quale somma devi restituire applicando le leggi del regime di interesse semplice nei seguenti casi:
a. durata 6 mesi, tasso annuo del 4% [€ 51000]
b. durata 9 mesi, tasso trimestrale del 2% [€ 53000]
c. durata 3 mesi, tasso annuo del 5% [€ 50625]
d. durata 8 mesi, tasso semestrale del 3%. [€ 52000]

13 Luca ha avuto € 25000 in prestito da restituire con rimborso globale. Quale somma dovrà restituire applicando le leggi del regime di sconto composto nei seguenti casi:

a. durata 6 anni, tasso mensile dello 0,5% [€ 35801,11]

b. durata 1 anno e 9 mesi, tasso annuo del 3,6% [€ 26596,20]

c. durata 3 anni, tasso semestrale del 2,5% [€ 28992,34]

d. durata 1 anno, 8 mesi e 15 giorni, tasso annuo del 3%. [€ 26294,82]

14 Alessandra riceve in prestito la somma di € 3000 che deve rimborsare fra 3 anni unitamente agli interessi calcolati al tasso annuo del 7,2%. Determina quale somma Alessandra paga alla scadenza. [€ 3695,78]

15 Un prestito di € 8000 viene estinto dopo 10 mesi. Sapendo che l'interesse è del 2% annuo, determina il capitale da restituire alla scadenza. In quale regime di capitalizzazione ritieni più opportuno lavorare? Motiva la tua scelta. [€ 8133,33]

16 Giorgio riceve in prestito la somma di € 4500 che si impegna a rimborsare fra 6 anni unitamente agli interessi al tasso del 4% semestrale. Determina la somma che deve pagare Giorgio alla scadenza. [€ 7204,64]

17 **ESERCIZIO GUIDA**

Sergio 7 anni fa ha dato in prestito € 9000 convenendo un rimborso globale del capitale e degli interessi; oggi riceve € 12663,90. A quale tasso annuo è stata fatta questa operazione finanziaria?

Poiché si tratta di un periodo di 7 anni, la legge da applicare è $M = C(1+i)^t$:

$$12663{,}90 = 9000(1+i)^7$$

Dall'equazione ottenuta ricaviamo: $(1+i)^7 = \dfrac{12663{,}90}{9000}$

cioè: $i = \sqrt[7]{\dfrac{12663{,}90}{9000}} - 1 \qquad \rightarrow \qquad i = 0{,}05$

Il tasso applicato è del 5% annuo.

18 Sei anni fa Giovanni ha chiesto in prestito € 15000 concordando il rimborso globale; oggi paga al suo creditore € 17910,78. Calcola il tasso annuo a cui viene fatta l'operazione finanziaria. [3%]

19 Calcola il tasso di interesse nelle seguenti situazioni:

a. capitale prestato € 32000, restituzione dopo 4 anni di € 37435,47 [4%]

b. capitale prestato € 26000, restituzione dopo 8 anni di € 33451,14. [3,2%]

20 **ESERCIZIO GUIDA**

Dal pagamento di un prestito di € 40000 fatto al tasso del 5% annuo con rimborso globale, si ottengono € 51051,26. Quanto tempo fa è stato concesso il prestito?

La somma restituita indica un tempo superiore all'anno, quindi dobbiamo operare in regime di interesse composto. Scriviamo l'equazione del montante in cui l'incognita questa volta è il tempo t :

$$51051{,}26 = 40000 \cdot 1{,}05^t$$

Risolviamo l'equazione:

$$1{,}05^t = \frac{51051{,}26}{40000} \qquad \rightarrow \qquad \log 1{,}05^t = \log \frac{51051{,}26}{40000} \qquad \rightarrow$$

$$t \log 1{,}05 = \log \frac{51051{,}26}{40000} \quad \rightarrow \quad t = \frac{\log 51051{,}26 - \log 40000}{\log 1{,}05} \quad \rightarrow \quad t = 5$$

Poiché il tasso applicato è annuo, il tempo è misurato in anni; il prestito è stato quindi concesso 5 anni fa.

21 Calcola quanto tempo fa è stato concesso un prestito di € 22000 che, oggi, al tasso di remunerazione del 2,3%, dà un rimborso globale di € 25504,35. [6 anni e 6 mesi]

22 Calcola la durata del prestito nei seguenti casi:

a. capitale prestato € 18000, tasso di remunerazione annuo 6,4%, somma restituita € 21681,90 [3 anni]

b. capitale prestato € 24500, tasso di remunerazione annuo 7,2%, somma restituita € 32355,28 [4 anni]

c. capitale prestato € 15000, tasso di remunerazione annuo 6%, somma restituita € 18393,39. [3 anni 6 mesi]

23 **ESERCIZIO GUIDA**

Piero ha ottenuto un prestito di € 6700 al tasso del 6,5% che dovrà restituire insieme agli interessi fra 9 anni; oggi, trascorsi 7 anni ed avendo ereditato una certa somma, ottiene di riscattare il debito al tasso corrente del 3% annuo. Calcola il valore di riscatto oggi ed il tasso effettivo del prestito.

Calcoliamo il valore del riscatto al tempo 7, utilizzando la formula:

$$V_2 = 6700(1 + 0{,}065)^9 \cdot (1 + 0{,}03)^{-(9-7)} = 11131{,}32\,(€)$$

Per calcolare il tasso effettivo del prestito occorre impostare la seguente uguaglianza:

$6700(1 + i)^7 = 11131{,}32$ da cui si ottiene un tasso del 7,52%.

24 Un prestito è rimborsabile fra 6 anni al tasso del 5%. Il suo valore dopo 4 anni, valutato al tasso annuo del 6%, è di € 19082,89. Calcola l'ammontare del debito. [€ 16000]

25 Donata ha avuto in prestito € 18000 al tasso di remunerazione del 3,8% che dovrà restituire, assieme agli interessi, fra 6 anni. Oggi, trascorsi 4 anni e 6 mesi, è in grado di restituire la somma al tasso di valutazione del 4,5%. Calcola il valore di riscatto oggi. [€ 21075,71]

IL RIMBORSO GLOBALE CON PAGAMENTO PERIODICO DEGLI INTERESSI

la teoria è a pag. 5

RICORDA

- In un rimborso globale con pagamento periodico degli interessi, il capitale prestato viene resituito alla scadenza, gli interessi si pagano ad ogni periodo.
  Il calcolo degli interessi viene sempre fatto in regime di interesse semplice ed è:
  - $I = A \cdot i$ se il periodo è l'anno
  - $I = A \cdot \frac{i}{k}$ se il periodo è $\frac{1}{k}$ di anno

- In caso di ammortamento americano, la costituzione del capitale avviene mediante una rendita vincolata a favore del creditore. L'importo della rata di costituzione si ottiene con la formula:

$R = \dfrac{A \cdot i'}{(1+i')^n - 1}$ essendo i' il tasso di costituzione del capitale

- La nuda proprietà e l'usufrutto del valore di riscatto si calcolano con le formule:
  - $P_k = A(1+\bar{i})^{-(n-k)}$ essendo $\bar{i}$ il tasso di valutazione
  - $U_k = Ai \cdot a_{\overline{n-k}|\bar{i}} = Ai \cdot \dfrac{1-(1+\bar{i})^{-(n-k)}}{\bar{i}}$

Comprensione

26 Hai avuto in prestito una somma A convenendo un rimborso globale con pagamento bimestrale degli interessi al tasso annuo i. Per calcolare gli interessi devi usare la formula:

a. $I = A \cdot i_2$ **b.** $I = A \cdot \dfrac{i}{2}$ **c.** $I = A \cdot \dfrac{i}{6}$ **d.** $I = A \cdot i_6$

27 Il rimborso globale con pagamento periodico anticipato degli interessi I di una somma A, comporta:
a. ricevere A, pagare I alla scadenza di ogni periodo, pagare A alla scadenza del contratto
b. ricevere $A - I$, pagare I all'inizio di ogni periodo successivo, pagare A alla scadenza del contratto
c. ricevere A, pagare I all'inizio di ogni periodo successivo, pagare A alla scadenza del contratto
d. ricevere $A - I$, pagare I all'inizio di ogni periodo successivo, pagare $A - I$ alla scadenza del contratto.

28 Il rimborso globale con pagamento periodico posticipato degli interessi I di una somma A, comporta:
a. ricevere A, pagare I alla scadenza di ogni periodo, pagare $A + I$ alla scadenza del contratto
b. ricevere $A - I$, pagare I alla fine di ogni periodo successivo, pagare A alla scadenza del contratto
c. ricevere A, pagare I alla scadenza di ogni periodo, pagare A alla scadenza del contratto
d. ricevere A, pagare I all'inizio di ogni periodo, pagare $A + I$ alla scadenza del contratto.

29 Nell'ammortamento americano il creditore:
a. riceverà alla scadenza in un'unica soluzione sia il capitale avuto in prestito che gli interessi maturati sul capitale
b. riceverà alla scadenza l'intero capitale avuto in prestito e periodicamente gli interessi
c. riceverà periodicamente parte del capitale e parte degli interessi
d. riceverà alla scadenza in un'unica soluzione tutti gli interessi e periodicamente parte del capitale.

30 Nell'ammortamento americano, il debitore:
a. paga al creditore in un'unica soluzione e alla scadenza sia il capitale avuto in prestito che gli interessi
b. paga al creditore gli interessi periodici e alla scadenza il capitale
c. paga al creditore gli interessi periodici e accantona una rata periodica per la costituzione del capitale
d. paga al creditore sia gli interessi periodici sia la rata di costituzione del capitale.

Applicazione

Risolvi i seguenti problemi relativi ad un rimborso globale con pagamento periodico degli interessi.

31 **ESERCIZIO GUIDA**

Dobbiamo restituire un debito di € 5000 contratto 4 anni fa al tasso annuo del 5%; la modalità di rimborso è stata fissata in rimborso globale con pagamento annuo posticipato degli interessi. Calcoliamo:
a. gli interessi da pagare ogni anno
b. l'importo della somma da pagare alla scadenza.

a. L'interesse annuo è: $I = A \cdot i = 5000 \cdot 0{,}05 = 250(€)$

b. Alla scadenza dobbiamo pagare gli interessi dell'ultimo anno e il capitale: $5000 + 250 = 5250(€)$

32 Calcola quanto si deve pagare alla fine di ogni anno per il rimborso di un prestito nelle seguenti situazioni:

a. capitale prestato: € 15000, durata: 5 anni, tasso annuo di remunerazione: 3,8% [I: € 570; ultimo anno: € 15570]

b. capitale prestato: € 32000, durata: 8 anni, tasso annuo di remunerazione: 4%. [I: € 1280; ultimo anno: € 33280]

33 Giorgia 2 anni fa ha contratto un debito di € 6000 che deve restituire alla scadenza con la modalità di rimborso globale del capitale e periodico degli interessi al tasso semestrale del 3%. Calcola gli interessi pagati da Giorgia ogni 6 mesi e quanto restituisce alla scandenza. [$I = 180(€)$, $M = 6180(€)$]

34 **ESERCIZIO GUIDA**

Un prestito di € 7000 viene estinto in 4 anni con rimborso globale e pagamento annuo degli interessi al tasso annuo del 6%. Verificare che il rimborso globale totale è ad esso equivalente.

Si deve verificare che il pagamento in un'unica soluzione è finanziariamente equivalente al pagamento periodico degli interessi.

Pagamento in un'unica soluzione: $M = 7000(1 + 0{,}06)^4 = 8837{,}34(€)$

Interesse periodico: $I = 7000 \cdot 0{,}06 = 420(€)$

Valutazione alla scadenza delle quote di interesse: $420 \cdot \dfrac{(1 + 0{,}06)^4 - 1}{0{,}06} = 1837{,}34(€)$

Valutazione del capitale restituito: $7000 + 1837{,}34 = 8837{,}34(€)$

Avendo ottenuto lo stesso valore, le due forme di rimborso sono equivalenti.

35 Milena deve restituire un debito di € 12000 contratto 5 anni fa al tasso annuo del 4,6%; la modalità di rimborso è stata fissata in rimborso globale con pagamento annuo posticipato degli interessi. Calcola i pagamenti che Milena dovrà effettuare e verifica anche che il rimborso in un'unica soluzione coincide con quello precedente. [$I = 552(€)$; $M = 15025{,}87(€)$]

36 Giovanni ottiene un prestito di € 5000 per un anno al tasso del 6,5% annuo. Calcola il rimborso nei seguenti casi:

a. rimborso del capitale e degli interessi in unica soluzione [€ 5325]

b. rimborso del capitale alla scadenza e pagamento posticipato trimestrale degli interessi. [$I = 81{,}25(€)$; $M = 5325(€)$]

37 Un prestito di € 4200 viene estinto mediante rimborso globale con pagamento periodico degli interessi. Sapendo che gli interessi annui ammontano a € 378, calcola il tasso annuo applicato. [9%]

38 Valeria concede in prestito la somma di € 5600 per 4 anni al tasso annuo del 5,7%. A mano a mano che riscuote gli interessi che il debitore le paga annualmente in via anticipata, li versa presso una banca al tasso annuo del 2,5%. Determina di quale somma Valeria dispone complessivamente alla scadenza del prestito. [€ 6958,62]

39 Alessia ottiene un prestito di € 4000 al tasso del 7% annuo e si impegna restituire tale somma dopo 5 anni pagando annualmente gli interessi. Trascorsi 4 anni, Alessia vuole estinguere però il suo debito, anticipando così di un anno il pagamento; le viene concesso di farlo ad un tasso di valutazione dell'8%. Calcola il valore di riscatto. [€ 3962,96]

Risolvi il seguenti problemi sulla determinazione della nuda proprietà e dell'usufrutto.

40 Maria contrae un debito di € 7000 al tasso del 6% annuo convenendo il rimborso della somma dopo 5 anni ed il pagamento annuo degli interessi. Calcola la nuda proprietà e l'usufrutto dopo 3 anni, al tasso di valutazione del 4%. [€ 6471,89 ; € 792,15]

41 Luca ha contratto un debito di € 30000 impegnandosi a pagare gli interessi ogni quattro mesi al tasso quadrimestrale del 6% e a restituire dopo 6 anni il capitale; egli decide però di rimborsare anticipatamente il debito. Calcola il valore del debito in caso di rimborso anticipato di 2 anni, al tasso del 12% annuo convertibile quadrimestralmente, nonché l'usufrutto e la nuda proprietà. [€ 33145,29; € 9435,85; € 23709,44]

42 Annamaria ha contratto un debito che decide di estinguere anticipatamente dopo 4 anni dalla sua accensione e per questa operazione viene fissato un tasso di valutazione del 7% annuo. A tale epoca la nuda proprietà ha l'importo di € 3814,48. A quanto ammonta il debito? [€ 5000]

43 Sonia contrae un debito di € 10000 impegnandosi a restituirlo dopo 6 anni. Se decidesse di pagarlo invece dopo 3 anni ad un tasso di valutazione del 10% annuo, l'usufrutto sarebbe di € 2362,51. A quale tasso è stato contratto il debito? [9,5%]

L'ammortamento americano

44 Calcola la rata complessiva annua dei seguenti ammortamenti americani considerando che i tassi sono annui.

a. Prestito € 20000, tasso di interesse sul prestito 4%, tasso applicato dalla banca 2%, durata del prestito 6 anni. [€ 3970,52]

b. Prestito € 8000, tasso di interesse sul prestito 3,4%, tasso applicato dalla banca 1,2%, durata del prestito 7 anni. [€ 1374,37]

c. Prestito € 12000, tasso di interesse sul prestito 5%, tasso applicato dalla banca 2,2%, durata del prestito 10 anni. [€ 1685,94]

d. Prestito € 15000, tasso di interesse sul prestito 2,8%, tasso applicato dalla banca 2,5%, durata del prestito 8 anni. [€ 2137,01]

45 Agnese deve rimborsare un capitale di € 3000 fra 6 anni. Paga annualmente gli interessi del 5% e provvede inoltre alla costituzione del capitale da rimborsare mediante versamenti annui di importo costante presso una banca che applica il tasso annuo del 4%. Determina la somma che complessivamente Agnese versa ogni mese. [€ 602,29]

46 Un debito di € 7000, contratto al 4% annuo, viene ammortizzato in 8 anni col metodo americano. Il tasso annuo applicato dalla banca è del 2% annuo. Determina:

a. la quota degli interessi [€ 280]

b. la quota di costituzione del capitale [€ 815,56]

c. la rata annua complessiva. [€ 1095,56]

47 Un debito di € 15000, contratto all'8% annuo, viene ammortizzato in 10 anni con metodo americano. Il tasso applicato dalla banca per la costituzione del capitale è del 5% annuo. Determina la rata complessiva annua e il tasso annuo effettivo per il debitore.
(Suggerimento: per il secondo quesito ricorda che il valore attuale delle rate complessive deve essere uguale a .....) [€ 2392,57; 9,53%]

48 Bruno ha contratto con un rivenditore di auto un debito di € 5000; il contratto stabilisce un ammortamento di tale debito in 4 anni con metodo americano. Egli paga alla fine di ogni mese gli interessi al 5% annuo nominale convertibile mensilmente ed inoltre versa in una banca che capitalizza al tasso del 2% effettivo annuo delle quote costanti per la costituzione del capitale. Determina:

a. l'ammontare degli interessi mensili [€ 20,83]

b. la quota mensile di costituzione del capitale [€ 100,17]

c. la rata mensile complessiva che deve pagare per rimborsare il prestito. [€ 121]

49 Un prestito di € 25000 è rimborsabile con ammortamento americano in 5 anni. Il tasso bancario è del 2,1%, la rata complessiva versata dal debitore è di € 5 419,36. Calcola il tasso annuo a cui viene fatto il prestito. [2,5%]

50 Un prestito di € 100000 è rimborsabile con ammortamento americano in 8 anni. Il tasso bancario è dell'1,8%, la rata complessiva versata dal debitore è di € 14 933,57. Calcola il tasso annuo a cui viene fatto il prestito. [3,2%]

51 **ESERCIZIO GUIDA**

Giulio aveva un debito di € 6000, concordato ad un tasso annuo dell'8%, ammortizzabile in 8 anni con metodo americano; la banca di appoggio pratica il tasso annuo del 2%. Pagata la quarta rata, la banca aumenta il tasso di un quarto di punto percentuale. Determina le rate da pagare per estinguere il debito prima e dopo la variazione del tasso.

Calcoliamo innanzi tutto l'interesse annuo: $I = 6000 \cdot 0{,}08 = 480\,(€)$

Calcoliamo la rata di costituzione: $R = \dfrac{6000 \cdot 0{,}02}{(1+0{,}02)^8 - 1} = 699{,}05\,(€)$

Allora la rata annua complessiva per i primi 4 versamenti ammonta a:

$$480 + 699{,}05 = 1179{,}05\,(€)$$

Dopo il versamento della quarta rata c'è una variazione; calcoliamo allora il fondo costituito dopo il quarto versamento cioè il montante di una rendita formata da 4 rate di importo R:

$$F_4 = 699{,}05\; s_{\overline{4}|0{,}02} = 2881{,}21\,(€)$$

Capitalizziamo il fondo al nuovo tasso per 4 anni cioè alla scadenza del prestito:

$$M = 2881{,}21 \cdot (1+0{,}025)^4 = 3180{,}31\,(€)$$

A Giulio rimane da costituire una somma pari a:

$$6000 - 3180{,}31 = 2819{,}69\,(€)$$

Calcoliamo la nuova rata per gli ultimi 4 versamenti al nuovo tasso del 2,5%:

$$R = \frac{2819{,}69 \cdot 0{,}025}{(1+0{,}025)^4 - 1} = 679{,}03\,(€)$$

Gli ultimi 4 versamenti ammontano quindi a: $R_1 = 480 + 679{,}03 = 1159{,}03\,(€)$.

52 Rosa ha un debito di € 5000 contratto al 9% annuo da ammortizzare in 5 anni con metodo americano; il tasso applicato dalla banca è del 3% annuo. Pagata la terza rata, la banca diminuisce il tasso di mezzo punto percentuale. Determina il fondo costituito dopo il pagamento della terza rata e le rate da pagare per estinguere il debito, prima e dopo la variazione. [€ 2910,91; € 1391,77; € 1408,88]

53 Un prestito di € 16000 è ammortizzabile in 9 anni con metodo americano. La rata annua di costituzione del capitale è di € 1543,13. Determina il tasso di interesse annuo. [3,5%]
(Suggerimento: usa l'interpolazione lineare)

54 Un debito di € 18000 è ammortizzabile con il metodo americano in 8 anni. Gli interessi sono corrisposti ogni sei mesi al tasso del 5% semestrale e, sempre ogni sei mesi, si depositano in banca, al tasso del 2% effettivo annuo, quote costanti per la costituzione del capitale. Determina l'importo della rata complessiva. [€ 1943,40]

Ricorda

- Nell'ammortamento progressivo le rate sono costanti e si calcolano con la formula
$R = A \cdot \alpha_{\overline{n}|i} = A \cdot \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$.
- Nell'ammortamento uniforme la quota capitale è costante e si calcola con la formula $C = \dfrac{A}{n}$.

Comprensione

55 In un ammortamento:
a. gli interessi si calcolano sempre sulla somma avuta in prestito V F
b. il debito si estingue attraverso il pagamento delle rate periodiche V F
c. ogni rata è formata da una quota interesse e da una quota capitale V F
d. in ogni rata la quota interesse è decrescente. V F

56 In un ammortamento progressivo la rata è:
a. crescente **b.** costante **c.** decrescente

57 In un ammortamento progressivo il debito residuo dopo il pagamento della k-esima rata si ottiene:
a. sommando tutte le rate posteriori alla k-esima
b. calcolando il valore attuale delle restanti rate
c. sommando le quote capitali versate fino al tempo k
d. calcolando il valore attuale delle rate già pagate.

58 In un ammortamento progressivo la k-esima quota capitale C_k si calcola con la formula:
a. $C_k = C(1+i)^k$ **b.** $C_k = R - E_k$ **c.** $C_k = C_1(1+i)^{k-1}$ **d.** $C_k = k \cdot C_1$

59 In un ammortamento uniforme la rata è:
a. crescente **b.** costante **c.** descrescente

60 In un ammortamento uniforme la $k-$esima quota interesse I_k si calcola con la formula:
a. $I_k = Aik$ **b.** $I_k = Ai \cdot \dfrac{n-k+1}{n}$ **c.** $I_k = Ai \cdot \dfrac{n-k+1}{k}$ **d.** $I_k = Ai \cdot \dfrac{n+k+1}{k}$

Applicazione

Completa i piani di ammortamento nei casi indicati.

61 Un debito di € 8000 viene rimborsato al tasso annuo del 4% con 3 quote capitali come indicato nella seguente tabella:

n	C	I	R	E	D
0	–	–	–	–	8000
1	2000				
2	2500				
3	3500				

Completa il piano di ammortamento.

62 Veronica ha contratto un prestito di € 10000 da pagarsi con 4 rate annue al tasso annuo del 4,5% e le cui quote capitali sono indicate dalla tabella che segue:

n	C	I	R	E	D
0	–	–	–	–	10000
1	1000				
2	2500				
3	3000				
4	3500				

Completa il piano di ammortamento.

63 Sofia ha preso in prestito € 12000 al tasso annuo del 3,8%. Conviene con il creditore un rimborso graduale con quote capitali indicate nella seguente tabella.

n	C	I	R	E	D
0	–	–	–	–	12000
1	2000				
2	0				
3	5000				
4	5000				

Completa il piano di ammortamento.

L'ammortamento progressivo

RICORDA

- Riportiamo le formule utili alla risoluzione dei problemi:
  - Rata $R = A \cdot \alpha_{\overline{n}|i} = \dfrac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$
  - Prima quota interesse $I_1 = A \cdot i$
  - Prima quota capitale $C_1 = R - I_1$
  - k-esima quota capitale $C_k = C_1 \cdot (1+i)^{k-1}$
  - Debito residuo dopo k versamenti $D_k = R \cdot a_{\overline{n-k}|i}$
  - Debito estinto dopo k versamenti $E_k = A - D_k$

64 Calcola la rata costante di un ammortamento progressivo sapendo che:

a. $A = 20000(€)$ $i = 0{,}04$ $n = 5$ [€ 4492,54]
b. $A = 50000(€)$ $i = 0{,}06$ $n = 8$ [€ 8051,80]
c. $A = 18000(€)$ $i = 0{,}05$ $n = 7$. [€ 3110,76]

65 Calcola la rata trimestrale costante in un ammortamento progressivo sapendo che:

a. $A = 8000(€)$ $i_4 = 0{,}02$ $n = 5$ trimestri [€ 1697,27]
b. $A = 15000(€)$ $j_4 = 0{,}08$ $n = 10$ trimestri [€ 1669,90]
c. $A = 26000(€)$ $i_4 = 0{,}015$ $n = 7$ anni. [€ 1144,03]

66 Un prestito di € 8000 è rimborsabile in 6 anni con ammortamento progressivo al tasso annuo dell'8,25%. Determina la rata d'ammortamento. [€ 1743,67]

67 Un prestito di € 5500 è rimborsabile in 4 anni con ammortamento progressivo al tasso annuo del 9%. Determina la rata di ammortamento e redigi il piano di ammortamento relativo. [€ 1697,68]

68 Un prestito di € 18500 è rimborsabile in 6 anni con ammortamento progressivo al tasso annuo del 7%. Calcola la rata di ammortamento e redigi le prime tre righe del piano di ammortamento. [€ 3881,22]

69 Un debito di € 6300 è rimborsabile in 3 anni con rate mensili costanti al tasso del 15% annuo nominale convertibile mensilmente. Determina la rata mensile di ammortamento e redigi le prime 3 righe del piano di ammortamento. [€ 218,39]

70 Calcola la terza quota capitale C_3 in un ammortamento progressivo con i dati seguenti:

a. $C_1 = 250(€)$ $\quad i = 0{,}05$ [€ 275,63]
b. $C_1 = 1200(€)$ $\quad i = 0{,}04$ [€ 1297,92]
c. $C_1 = 800(€)$ $\quad i = 0{,}06$. [€ 898,88]

71 Calcola il debito residuo dopo il pagamento della quarta rata D_4 in un ammortamento progressivo sapendo che:

a. $R = 1234{,}88(€)$ $\quad i = 0{,}04$ $\quad n = 10$ [€ 6473,41]
b. $R = 650{,}45(€)$ $\quad i = 0{,}055$ $\quad n = 6$ [€ 1200,94]
c. $R = 965{,}50(€)$ $\quad i = 0{,}028$ $\quad n = 8$. [€ 3606,09]

72 Calcola la durata di un ammortamento progressivo di cui sono noti i seguenti elementi:

a. $A = 20000(€)$ $\quad i = 0{,}05$ $\quad R = 7344{,}17(€)$ [$n = 3$]
b. $A = 12000(€)$ $\quad i = 0{,}03$ $\quad R = 2215{,}17(€)$ [$n = 6$]
c. $A = 32000(€)$ $\quad i = 0{,}04$ $\quad R = 4752{,}89(€)$. [$n = 8$]

73 **ESERCIZIO GUIDA**

Un debito viene ammortizzato col sistema progressivo al tasso annuo del 5%, in 12 anni. Sapendo che la sesta quota capitale è di € 15367,13, determina l'importo del debito.

Usiamo la formula $C_6 = C_1(1+i)^5$ e relativamente ai dati del problema abbiamo

$15367{,}13 = C_1(1+0{,}05)^5$ da cui si ottiene $C_1 = 12040{,}55(€)$

Con i dati forniti e trovati si può impostare il seguente sistema:
$$\begin{cases} 12040{,}55 = R - I_1 \\ I_1 = A \cdot 0{,}05 \\ R = \dfrac{A}{a_{\overline{12}|0{,}05}} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $A = 191650{,}96(€)$

74 Un prestito è rimborsabile in 16 anni con ammortamento progressivo. Sapendo che la quota di capitale relativa al dodicesimo anno è doppia rispetto a quella relativa al quarto anno, determina il tasso a cui è stato contratto il prestito. [≈ 9%]

75 Un debito viene ammortizzato in 6 anni con il metodo progressivo al tasso annuo del 6%. Sapendo che la quarta quota capitale è di € 1280,60, determina l'importo del debito e la composizione della prima riga del piano di ammortamento. [€ 7500]

76 Antonia ottiene un prestito al tasso annuo del 3,50% rimborsabile in 14 anni mediante ammortamento progressivo. Avendo nuove disponibilità economiche, alla sesta rata aggiunge € 566,50 ed estingue il debito. Calcola l'importo del prestito. [€ 900]

77 Determina l'importo di un prestito contratto al tasso annuo del 3% ed estinguibile in 15 anni, sapendo che il debito estinto dopo la nona rata annua costante è di € 6718,51. [€ 12300]

78 Felicita ha un debito di € 5000 e conviene con il suo creditore di ammortizzarlo con il metodo progressivo. La seconda e la quarta quota capitale sono rispettivamente di € 920,46 e di € 1073,63. Determina il tasso annuo e la durata dell'ammortamento.
(Suggerimento: ricorda la formula delle progressioni geometriche $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$ per cui $C_4 = C_2 \cdot (1+i)^{\cdots}$)
[8%; 5 anni]

79 Otto anni fa, Angela contrasse un debito di € 3000 da ammortizzare con metodo progressivo in 18 anni al tasso annuo del 4%. Sette anni fa, contrasse un altro prestito di € 5000 al 5% annuo, da rimborsare con lo stesso metodo in 20 anni. Oggi ottiene di unificare il pagamento delle rate di rimborso e viene fissato un unico tasso del 5,25% . Determina la rata da pagare per il primo e per il secondo prestito; calcola inoltre i debiti residui al momento dell'unificazione e la rata costante dopo aver unificato i rimborsi, per poter terminare il pagamento entro 10 anni. [€ 236,98; € 401,21; € 1922,12; € 3768,82; € 745,98]

Risolvi i seguenti problemi sul valore di riscatto, sulla nuda proprietà e sull'usufrutto.

80 Tre anni fa è stato concesso un prestito al tasso annuo del 6%, rimborsabile in 10 anni, mediante rate annue costanti di € 2000; oggi si vuole valutare il prestito al tasso annuo del 5%. Calcola l'ammontare del prestito e il suo valore odierno. [€ 14720,17; € 11572,75]

81 Un prestito di € 12000 è ammortizzabile col metodo progressivo in 15 anni al tasso annuo del 7%. Sapendo che il valore del prestito alla fine dell'ottavo anno è di € 6631,09, calcola il tasso di valutazione.
[9%]

82 Un prestito di € 10000 è ammortizzabile con metodo progressivo in 12 anni al tasso annuo del 5%; dopo 4 anni il valore del prestito è di € 7006,19 e, alla stessa epoca, l'usufrutto è di € 3552,76. Calcola il tasso annuo di valutazione e la nuda proprietà dopo il versamento dell'ottava rata. [6%; € 3453,43]

83 Davide ha ricevuto in prestito la somma di € 7000 al tasso annuo nominale convertibile semestralmente del 14%, da rimborsare in 18 semestri mediante rate semestrali costanti. Calcola il valore del prestito dopo il versamento della decima rata, la nuda proprietà e l'usufrutto dopo il versamento della nona rata ad un tasso di valutazione del 6% annuo.
Se applicassimo un tasso di valutazione annuo superiore al 6%, il valore del prestito risulterebbe maggiore o minore rispetto a quello calcolato con il tasso al 6% annuo? [€ 4321,32; € 3337,81; € 1395,41]

84 Un prestito contratto al tasso annuo del 6%, è rimborsabile mediante 16 rate costanti annue di € 2000 ciascuna. Calcola l'ammontare del prestito.
Calcola inoltre la nuda proprietà, il valore del prestito e l'usufrutto dopo il nono versamento con tasso annuo di valutazione del
a. 6%
b. 8%. [€ 20211,79; **a**. € 8783,77; € 11164,76; € 2381,02; **b**. € 8156,67; € 10412,74; € 2256,07]

L'ammortamento uniforme

RICORDA

- Riportiamo le formule utili alla risoluzione dei problemi:
  - quota capitale $C = \dfrac{A}{n}$

- k-esima quota interesse $\quad I_k = Ai\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$
- k-esima rata $\quad R_k = C + I_k$
- Debito estinto dopo k versamenti $\quad E_k = k \cdot C$
- Debito residuo dopo k versamenti $\quad D_k = A - E_k$

85 Calcola la quota capitale costante in un ammortamento uniforme sapendo che:

a. $S = 23000(€)$ $\quad n = 10$ [€ 2300]
b. $S = 11000(€)$ $\quad n = 8$ [€ 1375]
c. $S = 35000(€)$ $\quad n = 12$ [€ 2916,67]
d. $S = 20000(€)$ $\quad n = 15$. [€ 1333,33]

86 Stendi il piano di ammortamento di un debito di € 8000 estinguibile in 8 anni al tasso del 7% annuo con metodo uniforme.

87 Redigi il piano di ammortamento uniforme di un prestito di € 5000 rimborsabile con 8 rate semestrali al tasso del 6% annuo nominale convertibile semestralmente.

88 Calcola il debito estinto dopo il pagamento della quinta rata E_5 in un ammortamento uniforme utilizzando i seguenti dati:

a. $C = 2000(€)$ [€ 10000]
b. $C = 1300(€)$ [€ 6500]
c. $A = 56000(€)$ $\quad n = 20$ [€ 14000]
d. $A = 16000(€)$ $\quad n = 8$ [€ 10000]
e. $A = 40000(€)$ $\quad D_5 = 31000(€)$. [€ 9000]

89 Un prestito di € 8000 è rimborsabile in 8 anni mediante pagamento di quote costanti di capitale al tasso annuo dell'8%. Calcola la quota costante di capitale, il debito estinto al settimo anno, il debito residuo al quarto anno, e la composizione della settima rata. [$C =$ € 1000; $E_7 =$ € 7000; $D_4 =$ € 4000; $R_7 =$ € 1160]

90 Calcola la sesta quota interesse I_6 in un ammortamento uniforme sapendo che:

a. $A = 16000(€)$ $\quad i = 0{,}05$ $\quad n = 20$ [€ 600]
b. $A = 32000(€)$ $\quad i = 0{,}03$ $\quad n = 8$ [€ 360]
c. $A = 10000(€)$ $\quad i = 0{,}06$ $\quad n = 10$. [€ 300]

91 Calcola la durata di un ammortamento uniforme utilizzando i seguenti dati:

a. $A = 40000(€)$ $\quad C = 2000(€)$ [$n = 20$]
b. $A = 25000(€)$ $\quad C = 500(€)$ [$n = 50$]
c. $A = 16000(€)$ $\quad I_3 = 533{,}33$ $\quad i = 0{,}05$. [$n = 6$]

92 **ESERCIZIO GUIDA**

Un debito viene ammortizzato con il metodo delle quote costanti di capitale. Dopo il pagamento della quinta rata il debito estinto è di € 5000 e quello residuo è di € 3000. Calcoliamo l'ammontare del debito e il numero delle rate.

Il valore iniziale del debito è la somma del debito estinto con il debito residuo alla medesima scadenza; esso è quindi

$$5000 + 3000 = 8000(€)$$

Sappiamo anche che il debito estinto dopo il pagamento della quinta rata è $\quad E_5 = 5C = 5\frac{A}{n}$

cioè $5 \cdot \dfrac{8000}{n} = 5000$ da cui $n = 8$

Il problema può anche essere risolto utilizzando le formule relative al debito residuo e al debito estinto; prova ad usare questo secondo metodo e confronta i risultati ottenuti.

93 Un debito di € 6000 viene ammortizzato con metodo uniforme in 4 anni, al tasso del 10% annuo nominale convertibile semestralmente, con versamenti semestrali. Determina la composizione della sesta rata e la situazione del debito alla fine del secondo anno.
[$C = 750(€)$; $I_6 = 112{,}50(€)$; $E_4 = 3000(€)$; $D_4 = 3000(€)$]

94 Un prestito è rimborsabile in 8 anni con metodo uniforme al tasso annuo del 4%. La quinta rata di ammortamento è di € 1450. Trova l'ammontare del prestito. [€ 10000]

95 Si deve ammortizzare un prestito con il metodo delle quote costanti di capitale. Il debito residuo alla fine del primo anno è di € 9000. Sappiamo inoltre che la quota capitale ammonta a € 3000 e la terza quota di interessi è di € 300. Determina l'ammontare del debito, il tasso e la durata. [€ 12000; 5%; $n = 4$]

96 In un prestito ammortizzabile in 10 anni con il metodo uniforme, la quota di interesse diminuisce annualmente di € 12 e l'ammontare della sesta rata è di € 260. Determina l'ammontare del prestito ed il tasso annuo a cui è stato concesso. [€ 2000; 6%]

IL LEASING

la teoria è a pag. 17

RICORDA

- L'equazione che regola un contratto di leasing è la seguente:
  - in caso di pagamento di un maxicanone formato da p rate: $C = p \cdot R + R \cdot a_{\overline{n-p}|i_k} + E(1+i_k)^{-n}$
  - in caso di pagamento di un acconto A: $C = A + R \cdot a_{\overline{n}|i_k} + E(1+i_k)^{-n}$

Comprensione

97 Indica, tra le seguenti, le voci che devono comparire in un contratto di leasing:
a. banca d'appoggio
b. durata del contratto
c. tasso dell'operazione
d. numero dei dipendenti dell'azienda che stipula il contratto
e. numero dei canoni da pagare
f. tipo di contabilità in uso presso l'azienda
g. numero dei canoni da pagare all'atto della stipula del contratto
h. valore di riscatto
i. uso che l'azienda deve fare del bene.

98 Se hai due proposte di leasing per lo stesso bene e vuoi sapere quale delle due ti è più favorevole devi:
a. valutare quale società di leasing ha presentato per prima il preventivo
b. valutare quale delle due proposte ha i canoni di importo inferiore
c. valutare il tasso a cui è stata fatta l'operazione
d. valutare quale dei due contratti ha un minor valore di riscatto.

Applicazione

Risolvi i seguenti esercizi sulla determinazione del canone di locazione.

99 Calcola il canone mensile da corrispondere per 8 anni, al tasso dell'1,65% mensile, per la locazione di una macchina del costo di € 20000. [€ 416,57]

100 Un attrezzo ginnico, il cui costo è di € 18000, viene preso in leasing da una palestra, alle seguenti condizioni:
- pagamento di 12 canoni semestrali tutti di uguale importo
- tasso del 12% annuo convertibile semestralmente.

Determina il canone di locazione. [€ 2146,99]

101 Un'azienda stipula un contratto di leasing per un impianto del valore di € 200000 alle seguenti condizioni:
- pagamento alla stipula del contratto di un maxicanone di € 20000
- pagamento di 36 canoni mensili posticipati al tasso annuo nominale convertibile mensilmente del 9%
- valore di riscatto dopo 3 anni di € 5000.

Determina l'importo del canone. [€ 5602,45]

102 Trova quanto bisogna pagare trimestralmente per un contratto di leasing del valore di € 24000 della durata di 2 anni alle seguenti condizioni:
- pagamento alla stipula del contratto di un maxicanone pari all'8% del valore
- pagamento canoni trimestrali posticipati al tasso trimestrale del 2,6%
- valore di riscatto alla scadenza di € 2000. [€ 2864,46]

103 La ditta Bianchi, per un automezzo del valore di € 50000, stipula un contratto di leasing che prevede il pagamento del 5% del suo valore all'atto della stipula, il pagamento di canoni posticipati costanti ogni 4 mesi al tasso del 5% semestrale e il riscatto dopo 6 anni con la somma di € 4000. Quanto deve pagare la ditta periodicamente? [€ 3921,26]

104 Una ditta ha stipulato un contratto leasing della durata di 3 anni per un automezzo. Il contratto prevede il pagamento immediato di € 2700 e poi 30 mensilità posticipate di € 700 ciascuna. Il valore di riscatto, al termine della locazione, è pari al 6% del capitale locato. Determina il costo dell'automezzo, sapendo che l'operazione finanziaria è stata fatta al tasso del 6% annuo nominale convertibile mensilmente. [€ 23325,34]

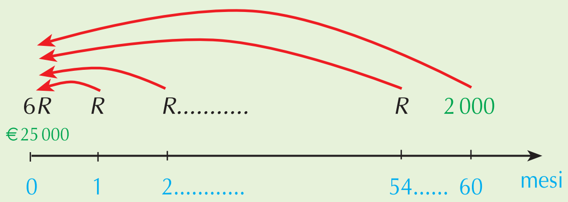
105 **ESERCIZIO GUIDA**

Una azienda ha stipulato un contratto di leasing per 5 anni per un macchinario del valore di € 25000. Il contratto prevede:
- pagamento di una certa somma alla stipula del contratto
- pagamento di 54 mensilità posticipate d'importo pari ad $\frac{1}{6}$ della somma precedente
- valore di riscatto di € 2000.

Determiniamo le somme pagate sapendo che il tasso a cui è stata fatta questa operazione è del 24% annuo nominale convertibile mensilmente.

Calcoliamo il tasso mensile: $i_{12} = \dfrac{0,24}{12} = 0,02$

Indichiamo con R la rata mensile e schematizziamo la situazione come nella figura di pagina seguente:



Impostiamo l'equazione: $25000 = 6R + R \cdot a_{\overline{54}|0,02} + 2000 \cdot (1 + 0,02)^{-60}$ da cui $R = 628$ (€)

106 Il titolare di una azienda ha stipulato un contratto leasing per 4 anni per un macchinario del valore di € 40000. Il contratto prevede:

- pagamento alla stipula del contratto di una certa somma
- pagamento di 44 mensilità posticipate costanti d'importo pari ad un quarto della somma precedente
- valore di riscatto al termine della locazione pari al 7% del capitale locato.

Determina le rate pagate sapendo che l'operazione è stata compiuta al tasso del 2,5% mensile.

[€ 1283,25]

107 La ditta di trasporti "Prendi e Vai" acquista in leasing per 25 mesi un mezzo il cui costo è di € 120000. Il contratto stabilisce le seguenti condizioni:

- pagamento di una somma pari al 10% del costo all'atto della stipula del contratto
- pagamento di 25 canoni mensili posticipati.

Calcola il canone di leasing nel caso in cui:

a. al termine del contratto non è previsto il riscatto

b. al termine del contratto si riscatta il mezzo con una somma pari al 2,5% del costo originale.

Il tasso del contratto previsto per entrambe le situazioni è dell'1,3% mensile.

[**a**. € 5087,73; **b**. € 4985,41]

Risolvi i seguenti esercizi sulla ricerca del tasso applicato all'operazione finanziaria.

108 Il signor Verdi stipula un contratto di leasing per 3 anni per poter disporre di un macchinario del valore di € 7232,58. Il contratto prevede:

- il pagamento alla stipula del contratto di € 3000
- pagamento di 6 rate quadrimestrali posticipate di € 600 ciascuna
- valore di riscatto al termine della locazione di € 2000.

Calcola a quale tasso quadrimestrale è stata fatta l'operazione. [5,5%]

109 Una ditta ha bisogno di un nuovo macchinario del costo di € 50000 per la sua produzione. Decide di prenderlo in locazione con un contratto di leasing della durata di 30 mesi con questi requisiti:

- pagamento iniziale € 3352,67
- 30 canoni mensili posticipati ciascuno di € 1750
- valore di riscatto € 2000.

Calcola il tasso mensile a cui è stata fatta questa operazione. [1%]

ESERCIZI RIASSUNTIVI

110 Tommaso ha un debito di € 6000 che doveva essere ammortizzato in 11 anni col metodo americano al tasso di interesse annuo dell'8%. Il tasso con cui viene fatta la costituzione del capitale è del 2,5% annuo. Pagata la quinta rata, Tommaso si accorge di non essere in grado di fare i versamenti previsti in banca per i 3 anni successivi e paga quindi solo gli interessi al creditore. Determina:

a. la rata che avrebbe dovuto pagare [€ 960,63]

b. l'interesse che versa al creditore negli anni in cui sospende la costituzione [€ 480]

c. la somma che versa in banca negli ultimi 3 anni [€ 998,23]

d. la rata complessiva negli ultimi 3 anni. [€ 1478,23]

111 Maria Grazia contrae un prestito di € 4500 al cui rimborso provvede mediante ammortamento americano in 9 anni. Il tasso del prestito è del 9,5% annuo, mentre il tasso fissato con l'istituto bancario per i versamenti da farsi per la costituzione del capitale è dell'8% annuo. Dopo 7 anni e 5 mesi, d'accordo con il creditore, decide di estinguere anticipatamente il debito pagando, oltre al capitale dovuto, anche gli interessi maturati nei 5 mesi trascorsi dopo l'ultimo pagamento degli interessi. Determina quale versamento Maria Grazia ha effettuato annualmente per i primi 7 anni e calcola inoltre gli interessi relativi ai 5 mesi. [€ 787,86; € 178,12]

112 Un prestito rimborsabile mediante metodo americano in 10 anni, ha la rata annua complessiva di € 5033,16; il tasso di impiego delle quote versate in banca è del 2% annuo e il fondo costituito al sesto anno è di € 2571,21. Calcola a quale tasso è stato fatto il prestito ed il suo valore iniziale. [11%; € 25000]

113 Armando ha un debito di € 8000 che doveva essere ammortizzato in 14 anni con il metodo americano; il tasso applicato dalla banca è del 4% annuo. Egli, versata la decima quota, è costretto a prelevare € 1000; per costituire alla scadenza fissata la somma prevista è quindi costretto ad aumentare l'importo dei futuri versamenti. Determina il fondo costituito dopo il versamento della decima rata e l'importo della rata da versare per gli ultimi 4 anni. [€ 4250,89; € 712,84]

114 Flora ha contratto un debito che si impegna ad ammortizzare con il metodo progressivo in 15 anni. Sapendo che il tasso di ammortamento è dell'8% annuo e che il debito estinto dopo il pagamento della nona rata è di € 18396,46, determina il valore del debito e la rata di ammortamento. Dopo aver versato la decima rata, Flora conviene con il creditore di estinguere il rimanente debito con 3 versamenti annui costanti posticipati. Calcola la nuova rata annua. [€ 40000; € 4673,18; € 7240,18]

115 Un prestito di € 18000 è rimborsabile in 16 anni al tasso annuo del 6,5% mediante ammortamento progressivo. Dopo aver pagato la nona rata il debitore ottiene di pagare per 3 anni una rata inferiore di € 500 rispetto a quella originaria e di riprendere in seguito l'ammortamento con rate costanti in modo da completare il rimborso al ventitreesimo anno. Determina l'importo della rata originale e della rata modificata. [€ 1842,80; € 1029,08]

116 Pietro contrae un prestito di € 30000 da rimborsare mediante il versamento di 20 rate annue costanti posticipate. Dopo il versamento dell'ottava rata ottiene di modificare il piano sospendendo i versamenti per 2 anni e riprendendo poi a pagare una nuova rata annua in modo da completare il rimborso con un anno di anticipo rispetto alla data prefissata. Determina l'importo della rata originaria e quella della rata modificata, sapendo che l'operazione finanziaria è stata fatta al tasso annuo del 10,75%. [€ 3705,85; € 5341,44]

Per la verifica delle competenze

1 Dieci anni fa hai avuto un prestito € 30000 convenendo un rimborso globale al tasso del 4,6%. Quanto devi restituire oggi? [€ 47036,84]

2 Diego ha contratto un debito di € 12000 da restituire dopo 4 anni, convenendo il rimborso globale del

capitale e il pagamento semestrale degli interessi al tasso semestrale del 3%. Calcola l'importo degli interessi semestrali.
Se invece avesse concordato un rimborso globale sia del capitale che degli interessi, quanto avrebbe restituito alla scadenza? [$I = € \ 360$; $M = 15201{,}24$]

3 Armando ha avuto un prestito di € 5800 al tasso del 5% che dovrà restituire, insieme agli interessi, fra 8 anni; oggi, trascorsi 6 anni, ottiene di riscattare il debito al tasso corrente del 2,8% annuo. Calcola:
a. quale somma avrebbe dovuto restituire alla scadenza, cioè 8 anni dopo il prestito [€ 8569,24]
b. il valore di riscatto oggi [€ 8108,79]
c. il tasso effettivo del prestito. [5,74%]

4 Ornella, 9 anni fa, ha contratto un debito di € 50000 ad un tasso del 6,5% da restituire con ammortamento americano. Calcola la rata annua posticipata complessiva sapendo che il tasso di costituzione è del 2,5% annuo. [€ 8272,84]

5 Un debito di € 10000 viene contratto al 6% annuo, con le seguenti modalità: rimborso dopo 8 anni e pagamento annuo degli interessi. Calcola il valore di riscatto, la nuda proprietà e l'usufrutto dopo 5 anni, al tasso di valutazione del 5% annuo. Interpreta poi i risultati dal punto di vista economico.
[$V_5 = 10272{,}32(€)$; $P_5 = 8638{,}38(€)$; $U_5 = 1633{,}95(€)$]

6 Un debito di € 30000 è rimborsabile con ammortamento uniforme al tasso annuo del 5,5% in 10 rate. Determina:
a. la quota capitale costante [€ 3000]
b. la quinta quota interesse [€ 990]
c. il debito estinto dopo il pagamento della sesta rata [€ 18000]
d. il debito residuo dopo il pagamento dell'ottava rata [€ 6000]
e. la composizione della nona rata. [$I_9 = 330(€)$; $R_9 = 3330(€)$]

7 Il signor Bianchi stipula un contratto di leasing alle seguenti condizioni:
a. costo del bene € 40000
b. pagamento di 12 canoni trimestrali
c. pagamento del 10% del valore del bene alla stipula del contratto
d. tasso trimestrale dell'1,1%
e. valore di riscatto € 2000
f. indicizzazione del contratto.
Dopo il versamento del 4° canone il tasso scende di mezzo punto percentuale.
Calcola il canone originario e quello variato in conseguenza della indicizzazione.
[$R = 3061{,}98(€)$; $D_4 = 25158{,}85(€)$; $R_1 = 2985{,}56(€)$]

Risultati di alcuni esercizi.

1 **a.** F, **b.** V, **c.** F, **d.** V	**2** **a.** F, **b.** F, **c.** V, **d.** V	**3** **d.**	**4** **b.**	**5** **b.**
6 **a.**	**7** **a.**	**8** **a.**	**9** **c.**	**10** **d.**
11 **b.**	**26** **c.**	**27** **b.**	**28** **a.**	**29** **b.**
30 **c.**	**55** **a.** F, **b.** F, **c.** V, **d.** V	**56** **b.**	**57** **b.**	**58** **c.**
59 **c.**	**60** **b.**	**97** **b.**, **c.**, **e.**, **g.**, **h.**	**98** **c.**	

Test finale di autovalutazione

1 In un ammortamento i due elementi che diminuiscono di rata in rata sono:
a. il tasso di valutazione e la quota capitale
b. la quota capitale e il debito residuo
c. il debito estinto e la quota interesse
d. la quota interesse e il debito residuo.

3 punti

2 Hai avuto in prestito € 1000 e puoi scegliere tra un rimborso globale oppure un rimborso globale del capitale e il pagamento periodale degli interessi. Quale decisione prendi?
a. Scegli la prima modalità perchè complessivamente paghi una somma minore rispetto alla seconda modalità.
b. Scegli la seconda modalità perchè complessivamente paghi una somma minore rispetto alla prima modalità.
c. E' indifferente perchè la somma che paghi complessivamente è la stessa.

5 punti

3 Aurora ha chiesto un prestito di € 10000 al tasso mensile dello 0,8% e il creditore le chiede di pagare anticipatamente gli interessi. Quanto riceve Aurora e quanto restituisce dopo un anno avendo pattuito un rimborso globale del capitale e mensile degli interessi?
a. Riceve € 10000 e alla scadenza restituisce € 10000 avendo pagato all'inizio di ogni mese € 80 di interesse.
b. Riceve € 10000 e alla scadenza restituisce € 10080 avendo pagato all'inizio di ogni mese € 80 di interesse.
c. Riceve € 9920 e alla scadenza restituisce € 9920 avendo pagato all'inizio di ogni mese € 80 di interesse.
d. Riceve € 9920 e alla scadenza restituisce € 10000 avendo pagato all'inizio di ogni mese € 80 di interesse.

8 punti

4 Paolo ha contratto un debito di € 5000 che si impegna a restiture fra un anno pagando bimestralmente gli interessi al 6% annuo. Ogni bimestre Paolo paga:
a. 300(€) **b.** 50(€) **c.** 150(€) **d.** 30(€)

8 punti

5 Per pagare un debito di € 12000, contratto al tasso del 5%, convieni con il creditore l'ammortamento americano. La restituzione deve avvenire dopo tre anni e la banca presso cui il debitore deposita le rate per la costituzione della somma da restituire applica il tasso annuo del 2%.
Il debitore:
a. paga al creditore alla fine di ogni anno € 600 e deposita in banca alla fine di ogni anno € 4000
b. paga al creditore alla fine di ogni anno € 600 e deposita in banca alla fine di ogni anno € 3921,06
c. paga al creditore alla fine di ogni anno € 3921,06 e deposita in banca alla fine di ogni anno € 600
d. paga al creditore alla fine di ogni anno € 4000 e deposita in banca alla fine di ogni anno € 600.

Il creditore:
e. riceve alla fine di ogni anno € 600 come interesse e € 3921,06 come rata
f. riceve alla fine di ogni anno € 600 come interesse e € 4000 come rata
g. riceve alla fine di ogni anno € 600 come interesse e € 12000 dopo 3 anni
h. riceve dopo 3 anni € 12600.

12 punti

6 Calcola quanto dovrai restituire per pagare un debito di € 24000, contratto al tasso semestrale del 2,1%:
a. con rimborso globale dopo 4 anni
b. con rimborso globale del capitale dopo 4 anni e semestrale degli interessi.

Nell'ipotesi che il contratto preveda l'opzione b., il creditore investe gli interessi semestrali in un'altra operazione finanziaria che gli rende il 2,1% annuo e, alla scadenza del prestito, ritira sia il capitale sia quanto maturato dalla seconda operazione. Qual è il valore del capitale che ottiene alla fine? Dai risultati ottenuti quali conclusioni puoi trarre?

14 punti

7 Un debito di € 50 000 verrà restituito mediante le quote capitali indicate nella tabella che segue. Completala sapendo che il tasso di remunerazione è del 4,8%.

n	***C***	***I***	***R***	***E***	***D***
0	-	-	-	-	50000
1	10000				
2	15000				
3	25000				

14 punti

8 Hai avuto in prestito € 15 000 da rimborsare in 5 anni con ammortamento progressivo al tasso annuo del 3,5%.Calcola:

a. la rata
b. la seconda quota capitale
c. la terza quota interesse
d. il debito estinto dopo il pagamento della seconda rata
e. il debito residuo dopo il pagamento della quarta rata.

14 punti

9 Una ditta di trasporti prende in locazione un automezzo del costo di € 46 000 alle seguenti condizioni:
- durata del contratto 4 anni
- maxicanone pari al valore di 8 canoni
- pagamento, a partire dalla fine del primo mese, di altri 48 canoni mensili al tasso mensile dello 0,06%
- valore di riscatto alla fine del quarto anno pari al 5% del costo dell'automezzo.

Calcola il canone mensile di locazione.

12 punti

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Totale
Punteggio										

Voto: $\frac{\text{totale}}{10} + 1 =$

Soluzioni

1 **d.**

2 **c.**

3 **d.**

4 **b.**

5 **b.**, **g.**

6 **a.** $M = 28\,341{,}13(€)$
b. alla fine di ogni semestre € 504 e alla scadenza € 24 000 + € 504
c. $M = 28\,341{,}13(€)$

7

n	***C***	***I***	***R***	***E***	***D***
0	-	-	-	-	50000
1	10000	2400	12400	10000	40000
2	15000	1920	16920	25000	25000
3	25000	1200	26200	50000	0

8 **a.** $R = € \ 3322{,}22$, **b.** $C_2 = € \ 2895{,}12$, **c.** $I_3 = € \ 325{,}77$, **d.** $E_2 = € \ 5692{,}35$, **e.** $D_4 = € \ 3209{,}87$

9 $R = € \ 791{,}40$