APPROFONDIMENTO

I sistemi di equazioni goniometriche

Vediamo di seguito alcuni esempi di risoluzione di sistemi di equazioni in cui compaiono anche le funzioni goniometriche. I metodi di risoluzione sono gli stessi usati per i sistemi algebrici e applicano i principi di sostituzione e riduzione.

ESEMPI

1. $\begin{cases} x + y = 90° \\ \tan x + \tan y = \dfrac{4}{3}\sqrt{3} \end{cases}$

Ricaviamo x dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda $\begin{cases} x = 90° - y \\ \tan (90° - y) + \tan y = \dfrac{4}{3}\sqrt{3} \end{cases}$

$\rightarrow \quad \begin{cases} x = 90° - y \\ \cot\text{an}\ y + \tan y = \dfrac{4}{3}\sqrt{3} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 90° - y \\ 3 \tan^2 y - 4\sqrt{3} \tan y + 3 = 0 \end{cases}$

Dalla seconda equazione ricaviamo $\tan y = \sqrt{3} \ \vee\ \tan y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Il sistema dà origine ai due seguenti

$\begin{cases} x = 90° - y \\ \tan y = \sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 90° - y \\ \tan y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ da cui $\begin{cases} y = 60° + k180° \\ x = 30° + k180° \end{cases} \vee \begin{cases} y = 30° + k180° \\ x = 60° + k180° \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Applichiamo il metodo di riduzione e sottraiamo membro a membro le due equazioni; otteniamo così

$$\begin{cases} \sin x - \cos x = 1 \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

La prima equazione è lineare; le sue soluzioni sono: $x = 90° + k360° \quad \vee \quad x = 180° + k360°$

Il sistema si scompone allora nei due seguenti $\begin{cases} x = 90° + k360° \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 180° + k360° \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

da cui $\begin{cases} x = 90° + k360° \\ \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 180° + k360° \\ \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1 \end{cases}$

Il secondo sistema è impossibile perché $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1 > 1$ e quindi ricaviamo che $\begin{cases} x = 90° + k360° \\ y = \pm 45° + h360° \end{cases}$

1 $\begin{cases} \cos x - \sqrt{2}\cos y = 0 \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \pm 45° + k_1 360° \\ y = \pm 60° + k_2 360° \end{cases}\right]$

2 $\begin{cases} \sqrt{3}\sin x = -\sin y \\ \sin x + \sin y = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k_1\pi \ \vee \ x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k_1\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{3} + 2k_2\pi \ \vee \ y = -\dfrac{2}{3}\pi + 2k_2\pi \end{cases}\right]$

3 $\begin{cases} 3\tan x + \tan y = 0 \\ \tan x + \tan y = \dfrac{2}{3}\sqrt{3} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = 150° + k_1 180° \\ y = 60° + k_2 180° \end{cases}\right]$

4 $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \sin x - \sin y = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = 30° + k_1 360° \ \vee \ x = 150° + k_1 360° \\ y = 30° + k_2 360° \ \vee \ y = 150° + k_2 360° \end{cases}\right]$

5 $\begin{cases} \cos x + \cos y = 0 \\ \cos x - \cos y = -\sqrt{2} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \pm 135° + k_1 360° \\ y = \pm 45° + k_2 360° \end{cases}\right]$

6 $\begin{cases} \sin y - \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x - \sin y = 2 \end{cases}$ $[S = \varnothing]$

7 $\begin{cases} 2\sin x + 2\sin y = 1 \\ \sin x - \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k_1\pi \ \vee \ x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k_1\pi \\ y = k_2\pi \end{cases}\right]$

8 $\begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos y = \dfrac{3}{2} \\ \sin x - \sqrt{3}\cos y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = k_1\pi \\ y = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k_2\pi \end{cases}\right]$

9 $\begin{cases} \sin x + 2\cos y = \dfrac{3}{2} \\ \sin x - \cos^2 y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k_1\pi \ \vee \ x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k_1\pi \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases}\right]$

10 $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ 4\sin x\cos y = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k_1\pi \ \vee \ x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k_1\pi \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k_2\pi \end{cases}\right]$

11 $\begin{cases} 3\tan x + 3\,\text{cotan}\, y = 2\sqrt{3} \\ 3\tan x\,\text{cotan}\, y = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = 30° + k_1 180° \\ y = 60° + k_2 180° \end{cases}\right]$

12 $\begin{cases} x + y = \dfrac{2}{3}\pi \\ \sin x + \sin y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}\right]$

(Suggerimento: ricava x oppure y dalla prima equazione e sostituisci nella seconda)

13 $\begin{cases} x + y = 60° \\ \cos x - \cos y = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = 15° + k360° \\ y = 45° + k360° \end{cases} \vee \begin{cases} x = 225° + k360° \\ y = -165° + k360° \end{cases}\right]$

14 $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ \tan x + \tan y = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ y = k\pi \end{cases}\right]$

15 $\begin{cases} x + y = 90° \\ \tan x + \tan y = 2 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = 45° + k180° \\ y = 45° + k180° \end{cases}\right]$

16 $\begin{cases} x - y = 30° \\ 2 \sin x + 2 \sin y = \sqrt{3} + 2 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = 120° + k360° \\ y = 90° + k360° \end{cases} \vee \begin{cases} x = 90° + k360° \\ y = 60° + k360° \end{cases}\right]$

17 $\begin{cases} x + y = \pi \\ \sin x \sin y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \dfrac{5}{6}\pi + k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ y = \dfrac{5}{6}\pi + k\pi \end{cases}\right]$

18 $\begin{cases} x - y = \dfrac{3}{2}\pi \\ \cos x \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \dfrac{7}{4}\pi + k\dfrac{\pi}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \end{cases}\right]$

19 **ESERCIZIO GUIDATO**

$\begin{cases} x + y = 60° \\ \tan (x - y) = 1 \end{cases}$

L'equazione $\tan (x - y) = 1$ è soddisfatta se $x - y = 45° + k180°$.

Dunque il sistema dato è equivalente al seguente $\begin{cases} x + y = 60° \\ x - y = 45° + k180° \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = 52°30' + k90° \\ y = 7°30' + k90° \end{cases}\right]$

20 $\begin{cases} x - y = 20° \\ \cos (x + y) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = 40° + k180° \\ y = 20° + k180° \end{cases} \vee \begin{cases} x = -20° + k180° \\ y = -40° + k180° \end{cases}\right]$

21 $\begin{cases} x + y = 0° \\ \tan (x - y) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = 15° + k90° \\ y = -15° + k90° \end{cases}\right]$

22 **ESERCIZIO GUIDATO**

$\begin{cases} \sin (x + y) = 1 \\ \cos (x - y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Dalla prima delle due equazioni ricavi che $(x + y) = \dfrac{\pi}{2} + 2k_1\pi$

dalla seconda che $(x - y) = \dfrac{\pi}{6} + 2k_2\pi \quad \vee \quad (x - y) = -\dfrac{\pi}{6} + 2k_2\pi$

Combinando la prima equazione con ciascuna delle seconde ottieni i due sistemi da risolvere.

$\left[\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + (k_1 + k_2)\pi \\ y = \dfrac{\pi}{6} + (k_1 - k_2)\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + (k_1 + k_2)\pi \\ y = \dfrac{\pi}{3} + (k_1 - k_2)\pi \end{cases}\right]$

23 $\begin{cases} \sin(x-y)=0 \\ \tan(x+y)=\sqrt{3} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+(k_1+k_2)\dfrac{\pi}{2} \\ y=\dfrac{\pi}{6}+(k_2-k_1)\dfrac{\pi}{2} \end{cases}\right]$

24 $\begin{cases} \cos(x+y)=0 \\ \operatorname{cotan}(x-y)=\sqrt{3} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}+(k_1+k_2)\dfrac{\pi}{2} \\ y=\dfrac{\pi}{6}+(k_1-k_2)\dfrac{\pi}{2} \end{cases}\right]$

25 $\begin{cases} \sin(x+y)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(x-y)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=\dfrac{7}{24}\pi+(k_1+k_2)\pi \\ y=-\dfrac{\pi}{24}+(k_1-k_2)\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{24}+(k_1+k_2)\pi \\ y=\dfrac{7}{24}\pi+(k_1-k_2)\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{5}{24}\pi+(k_1+k_2)\pi \\ y=\dfrac{13}{24}\pi+(k_1-k_2)\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{13}{24}\pi+(k_1+k_2)\pi \\ y=\dfrac{5}{24}\pi+(k_1-k_2)\pi \end{cases}\right]$