

## Sistemi omogenei

Un sistema si dice **omogeneo** se le sue equazioni si possono scrivere come polinomi omogenei uguagliati a un numero  $d$  che può eventualmente anche essere nullo.

Fra tutti i sistemi omogenei ci occupiamo di quelli di quarto grado nei quali ciascuna equazione è di secondo grado; essi assumono pertanto la forma:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$$

Per esempio è omogeneo di quarto grado il sistema:  $\begin{cases} x^2 - 3xy - 4y^2 = 6 \\ 2x^2 - 5y^2 = 3 \end{cases}$

Per risolvere sistemi di questo tipo si segue un algoritmo particolare.

### I caso: $d \neq 0 \vee d' \neq 0$

Se almeno uno dei valori  $d$  e  $d'$  è diverso da zero, la procedura da applicare è la seguente, che utilizziamo sul precedente sistema.

#### I passo

Si utilizza un'incognita ausiliaria  $t$  e si opera la sostituzione  $y = tx$ :

$$\begin{cases} x^2 - 3x \cdot tx - 4t^2x^2 = 6 \\ 2x^2 - 5t^2x^2 = 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 3tx^2 - 4t^2x^2 = 6 \\ 2x^2 - 5t^2x^2 = 3 \end{cases}$$

#### II passo

Si raccoglie  $x^2$  a fattor comune al primo membro:  $\begin{cases} x^2(1 - 3t - 4t^2) = 6 \\ x^2(2 - 5t^2) = 3 \end{cases}$

#### III passo

Se, come in questo caso, almeno uno dei due termini  $d$  è diverso da zero, si esegue la divisione membro a membro delle due equazioni ottenute (nel caso in cui uno dei termini  $d$  è zero, occorre lasciare questo termine al numeratore):

$$\frac{x^2(1 - 3t - 4t^2)}{x^2(2 - 5t^2)} = \frac{6}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{1 - 3t - 4t^2}{2 - 5t^2} = 2 \quad \rightarrow \quad 6t^2 - 3t - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 2t^2 - t - 1 = 0$$

Il sistema dato è quindi equivalente a quello che si ottiene associando la precedente equazione a una del sistema, scegliamo la seconda:

$$\begin{cases} 2t^2 - t - 1 = 0 \\ 2x^2 - 5t^2x^2 = 3 \end{cases}$$

#### IV passo

Si risolve l'equazione in  $t$  del nuovo sistema:  $t = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$

### ■ V passo

Otteniamo così i due sistemi:

$$\bullet \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ 2x^2 - \frac{5}{4}x^2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$
$$\bullet \begin{cases} t = 1 \\ 2x^2 - 5x^2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x^2 = -1 \end{cases} \text{ sistema impossibile}$$

Tornando alla variabile  $y$ :

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow (-2, 1) \quad \vee \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow (2, -1)$$

In definitiva, il sistema ha come insieme delle soluzioni  $S = \{(2, -1), (-2, 1)\}$ .

### Il caso: $d = d' = 0$

Descriviamo la procedura risolvendo il sistema  $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + 6xy + 5y^2 = 0 \end{cases}$

Possiamo dire che la coppia  $(0, 0)$  soddisfa il sistema, quindi è una sua soluzione. Per trovare le altre, seguiamo una procedura simile a quella del caso precedente.

### ■ I passo

Operiamo la sostituzione  $y = tx$ :

$$\begin{cases} 3x^2 + x \cdot tx - 2t^2x^2 = 0 \\ x^2 + 6x \cdot tx + 5t^2x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x^2 + tx^2 - 2t^2x^2 = 0 \\ x^2 + 6tx^2 + 5t^2x^2 = 0 \end{cases}$$

### ■ II passo

Raccogliamo  $x^2$  a fattor comune in entrambe le equazioni:  $\begin{cases} x^2(3 + t - 2t^2) = 0 \\ x^2(1 + 6t + 5t^2) = 0 \end{cases}$

### ■ III passo

Non possiamo questa volta dividere membro a membro le due equazioni perché l'espressione  $\frac{0}{0}$  che otterremo al secondo membro è priva di significato. Possiamo però applicare la legge di annullamento del prodotto dalla quale, tenendo presente che abbiamo già evidenziato la soluzione  $x = 0$ , otteniamo:

$$\begin{cases} 3 + t - 2t^2 = 0 \\ 1 + 6t + 5t^2 = 0 \end{cases}$$

Poiché le due equazioni sono in sistema, dobbiamo trovare le loro soluzioni comuni:

$$\bullet 3 + t - 2t^2 = 0 \rightarrow t = \begin{cases} -1 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\bullet 1 + 6t + 5t^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{5} \end{cases}$$

La sola soluzione comune è  $t = -1$ .

#### IV passo

Tenendo presente la sostituzione fatta possiamo dire che il sistema è verificato da tutte le coppie  $(x, y)$  nella quali è  $y = -x$ , cioè da tutte le coppie della forma  $(x, -x)$ .

In definitiva, il sistema ammette infinite soluzioni, tutte della forma  $(x, -x)$  fra cui anche la coppia  $(0, 0)$ .

## ESERCIZI

### Comprensione

1 Indica quali fra i seguenti sistemi sono omogenei:

a.  $\begin{cases} x^2 - 2y^2 + 4xy = 1 \\ 3x^2 + y^2 - xy = 2 \end{cases}$

b.  $\begin{cases} x - y^2 + 2xy = 3 \\ x^2 + y^2 - 4xy = -1 \end{cases}$

c.  $\begin{cases} x^2 + 3y^2 - xy = x \\ x^2 + 4y^2 = 2 \end{cases}$

d.  $\begin{cases} x^2 + 5y^2 + xy = -2 \\ x^2 - 3xy = 4 \end{cases}$

2 Se si opera la sostituzione  $y = xt$ , il sistema omogeneo  $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6 \\ x^2 - 4xy = 12 \end{cases}$  porta alla risoluzione dell'equazione:

a.  $\frac{1 + 2t^2}{1 - 4t} = \frac{1}{2}$

b.  $\frac{1 + 2t^2}{1 - 4t} + \frac{1}{2} = 0$

c.  $\frac{1 + 2t^2 - 6}{1 - 4t - 12} = 0$

d.  $\frac{1 - 4t}{1 + 2t^2} = 2$

### Applicazione

Risolvi i seguenti sistemi omogenei.

### 3 ESERCIZIO GUIDATO

$$\begin{cases} 2x^2 - 4xy - 3y^2 = 5 \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases}$$

Il sistema è omogeneo, operiamo quindi la soluzione  $y = xt$ :  $\begin{cases} 2x^2 - 4tx^2 - 3t^2x^2 = 5 \\ x^2 + 2t^2x^2 = 5 \end{cases}$

Raccogliamo  $x^2$  in entrambe le equazioni e, supposto  $x \neq 0$ , dividiamole membro a membro.

$$\begin{cases} x^2(2 - 4t - 3t^2) = 5 \\ x^2(1 + 2t^2) = 5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{2 - 4t - 3t^2}{1 + 2t^2} = 1 \quad \rightarrow \quad 5t^2 + 4t - 1 = 0$$

Risolviendo questa equazione otteniamo  $t_1 = -1 \vee t_2 = \frac{1}{5}$  e, ricordando la sostituzione operata  $y = xt$ , otteniamo i due sistemi

$$\begin{cases} y = -x \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} y = \frac{1}{5}x \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases}$$

Risolvendoli, troviamo le soluzioni del sistema dato

$$\begin{cases} x = \mp\sqrt{\frac{5}{3}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} \\ y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases}$$

e pertanto l'insieme delle soluzioni è

$$S = \left\{ \left( -\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}} \right); \left( \sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}} \right); \left( \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} \right); \left( -\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right\}.$$

**4**  $\begin{cases} x^2 - y^2 = -24 \\ xy + x^2 = 60 \end{cases}$  [S = {(5, 7); (-5, -7)}]

**5**  $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = \frac{7}{9} \\ x^2 + y^2 = \frac{10}{9} \end{cases}$  [S = {(1/3, -1); (1, -1/3); (-1/3, 1); (-1, 1/3)}]

**6**  $\begin{cases} (2x + y)^2 = 4 \\ 4xy + y^2 = 3 \end{cases}$  [S = {(1/2, -3); (1/2, 1); (-1/2, -1); (-1/2, 3)}]

**7**  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ y(x + y) = 10 \end{cases}$  [S = {(3, 2); (-3, -2)}]

**8**  $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 0 \end{cases}$  [S = {(0, 0)}]

**9**  $\begin{cases} x^2 - xy = -14 \\ y^2 - xy = 63 \end{cases}$  [S = {(2, 9); (-2, -9)}]

**10**  $\begin{cases} (x + y)^2 = 5 - xy \\ xy = 1 \end{cases}$  [S = {(1, 1); (-1, -1)}]

**11**  $\begin{cases} x(2x - y) = 3 \\ \frac{x^2}{3} - 3y^2 = -\frac{9}{4} \end{cases}$  [S = {(3/2, 1); (-3/2, -1); (6/sqrt(35), -11/(2\*sqrt(35))); (-6/sqrt(35), 11/(2\*sqrt(35))}]

**12**  $\begin{cases} y^2 - 2xy = 0 \\ y^2 + xy - x^2 = 2 \end{cases}$  [S = {(sqrt(2/5), 2\*sqrt(2/5)); (-sqrt(2/5), -2\*sqrt(2/5))}]

**13**  $\begin{cases} y^2 + 2xy = 1 \\ 4x^2 + xy + y^2 = 2 \end{cases}$  [S = {(sqrt(2)/4, -sqrt(2)); (-sqrt(2)/4, sqrt(2)); (sqrt(3)/3, sqrt(3)/3); (-sqrt(3)/3, -sqrt(3)/3)}]

**14**  $\begin{cases} y^2 - x^2 = 27 \\ xy - x^2 = 9 \end{cases}$  [S = {(3, 6); (-3, -6)}]

**15**  $\begin{cases} x^2 - 7xy + 12y^2 = 0 \\ x^2 - xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$  [S = {(x, 1/3x)}]

$$16 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{2} \\ x(x - 3y) = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$[s = \left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2} \right); \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \right); \left( \frac{7}{\sqrt{26}}, -\frac{2}{\sqrt{26}} \right); \left( -\frac{7}{\sqrt{26}}, \frac{2}{\sqrt{26}} \right) \right\}]$$

$$17 \quad \begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + 8xy + 15y^2 = 0 \end{cases}$$

$$[s = \{(0, 0)\}]$$

$$18 \quad \begin{cases} 3x^2 + 4xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 3xy - y^2 = -2 \end{cases}$$

$$[s = \left\{ \left( \pm \frac{\sqrt{34}}{17}, \mp \frac{3\sqrt{34}}{17} \right); \left( \pm \frac{\sqrt{6}}{3}, \mp \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \right\}]$$

$$19 \quad \begin{cases} 2x^2 - 5xy - y^2 = 4 \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = 1 \end{cases}$$

$$[s = \left\{ \left( \pm \frac{5\sqrt{6}}{6}, \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \right\}]$$

$$20 \quad \begin{cases} x^2 + 2xy + 11y^2 = 10 \\ x^2 - 9y^2 = 2 \end{cases}$$

$$[s = \left\{ \left( \pm \frac{4\sqrt{14}}{7}, \pm \frac{\sqrt{14}}{7} \right); \left( \pm \frac{7\sqrt{26}}{13}, \mp \frac{2\sqrt{26}}{13} \right) \right\}]$$

$$21 \quad \begin{cases} 2x^2 + 3xy - y^2 = 13 \\ (x + y)^2 - 2y(x + y) = 3 \end{cases}$$

$$[s = \{(\pm 2, \pm 1)\}]$$