Approfondimenti di micro e macroeconomia

Obiettivi

- approfondire il concetto di utilità
- applicare le conoscenze matematiche alle teorie economiche
- applicare metodi statistici all'analisi di dati economici

1. Cenni alle funzioni di due variabili: le derivate parziali

Introducendo il concetto di funzione di utilità nel capitolo *Fondamenti di microeconomia e macroeconomia*, abbiamo utilizzato una funzione di due variabili. Per l'uso che dovremo farne in seguito, precisiamo meglio questo concetto.

Funzione reale di due variabili reali x e y è una legge che ad ogni coppia ordinata (x, y) appartenente a un sottoinsieme (proprio o improprio) di $R \times R$, associa uno e un solo valore numerico $z \in R$; si scrive allora che:

$$z = f(x, y)$$

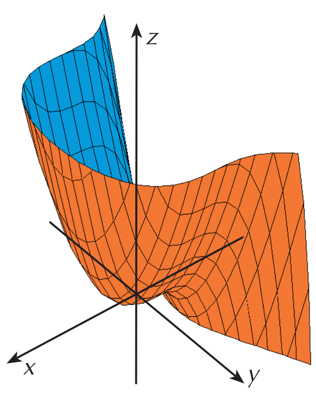
Una funzione di due variabili è quindi rappresentata graficamente da una superficie dello spazio (vedi per esempio la ***figura 1***).

Tenendo fissa una delle due variabili, per esempio la x, la $f(x, y)$ diventa però funzione della sola variabile y; viceversa, se teniamo fissa la y, la $f(x, y)$ diventa funzione della sola variabile x.

Per esempio, se nella funzione $f(x, y) = x^2 + 2xy$:

- consideriamo fissa la variabile x, e per questo la indichiamo con x_0, allora la funzione diventa:
$$f(x_0, y) = x_0^2 + 2x_0 y$$
che è funzione della sola variabile y in quanto x_0 è un numero
- consideriamo fissa la variabile y, e per questo la indichiamo con y_0, allora la funzione diventa:
$$f(x, y_0) = x^2 + 2xy_0$$
che è funzione della sola variabile x in quanto y_0 è un numero.

Figura 1



Per esempio:

- *per $x_0 = 3$ la funzione f diventa:*
$f(y) = 9 + 6y$
- *per $y_0 = 1$ la funzione f diventa:*
$f(x) = x^2 + 2x$

Di una funzione di due variabili si può quindi calcolare la derivata rispetto ad una delle sue variabili considerando fissa l'altra.
Relativamente alla funzione precedente:

- si può derivare rispetto alla variabile y considerando fissa la x :

$$f(y) = \underbrace{x^2}_{\substack{\text{è una costante} \\ \text{la derivata è nulla}}} + \underbrace{2xy}_{\text{la derivata è } 2x} \quad \rightarrow \quad f'(y) = 2x$$

- si può derivare rispetto alla variabile x considerando fissa la y :

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{\text{la derivata è } 2x} + \underbrace{2xy}_{\text{la derivata è } 2y} \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x + 2y$$

Abbiamo in questo modo introdotto intuitivamente il concetto di *derivata parziale* che precisiamo con le seguenti definizioni.

Si dice **derivata parziale rispetto a x** della funzione $f(x, y)$ nel punto $P_0(x_0, y_0)$ il limite, se esiste finito per h che tende a zero, del rapporto incrementale di $f(x, y)$ relativo al punto x_0 e all'incremento h; in simboli si pone

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f'_x(x_0, y_0)$$

Si dice **derivata parziale rispetto a y** della funzione $f(x, y)$ nel punto $P_0(x_0, y_0)$ il limite, se esiste finito per k che tende a zero, del rapporto incrementale di f relativo al punto y_0 e all'incremento k; in simboli

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = f'_y(x_0, y_0)$$

Per il calcolo di una derivata parziale applichiamo poi le regole imparate per il calcolo delle derivate delle funzioni di una sola variabile; basta tener presente che:

- nella derivazione rispetto a x, la y si deve ritenere costante
- nella derivazione rispetto a y, la x si deve ritenere costante.

Le derivate parziali di una funzione $f(x, y)$ si indicano con uno dei seguenti simboli:

- derivata rispetto a x : $\quad f'_x \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}$
- derivata rispetto a y : $\quad f'_y \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}$

Per esempio:

- data la funzione $\quad f(x, y) = x^3 - 4x + xy^2$:

  si ha che: $\quad f'_x = 3x^2 - 4 + y^2 \qquad f'_y = 2xy$

- data la funzione $\quad f(x, y) = 3x^2y - 4y^2 + 1$:

  si ha che: $\quad f'_x = 6xy \qquad f'_y = 3x^2 - 8y$

2. LE FUNZIONI MARGINALI E L'ELASTICITÀ PUNTUALE

LE FUNZIONI MARGINALI

In economia, le *funzioni marginali* rivestono una grande importanza in quanto servono ad analizzare le dinamiche di alcuni fenomeni. In generale, si vuole vedere come si modificano i valori assunti da una funzione f in dipendenza di una piccola variazione di una sola delle sue variabili, mantenendosi costanti le altre; in questo modo si può individuare quale delle variabili influenza maggiormente la funzione stessa.
Per esempio, supponiamo che f rappresenti la funzione di domanda di un bene che dipende dal suo prezzo p e dal reddito Y del consumatore; ci si può chiedere come varia la domanda del bene se, mantenendosi costante il reddito del consumatore, aumenta (o diminuisce) di poco il prezzo; oppure se, mantenendo invariato il prezzo, aumenta (o diminuisce) di poco il reddito.
In matematica, il rapporto tra variazioni si esprime tramite il concetto di rapporto incrementale e, per variazioni infinitesime, tramite quello di derivata; diamo perciò la seguente definizione.

Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili x e y; chiamiamo:

- funzione marginale di f rispetto alla variabile x la derivata parziale di f rispetto a x
- funzione marginale di f rispetto alla variabile y la derivata parziale di f rispetto a y.

Supponiamo per esempio che la funzione di domanda di un bene sia espressa dalla relazione $f(p, Y) = -5p^2 + \frac{1}{2}Y^2 - 4Yp$:

- la funzione marginale del prezzo è la derivata di f rispetto a p:
  $f'_p = -10p - 4Y$
- la funzione marginale del reddito è la derivata di f rispetto a Y:
  $f'_C = Y - 4p$

Per un prezzo $p = 10$ e un reddito $Y = 200$ abbiamo che:

- la domanda ha valore $f(10, 200) = 11500$
- le funzioni marginali rispetto a p e rispetto a Y hanno valore
  $f'_p(10, 200) = -900 \qquad f'_Y(10, 200) = 160$

Possiamo interpretare questi valori dicendo che:

- mantenendo costante il reddito $Y = 200$ (derivata parziale rispetto a p) un aumento unitario del prezzo rispetto al valore 10 provocherebbe una diminuzione di domanda 900 unità rispetto alle 11500
- mantenendo costante il prezzo $p = 10$ (derivata parziale rispetto a Y) un aumento unitario del reddito rispetto al valore 200 provocherebbe un aumento della domanda 160 unità rispetto alle 11500.

Se invece $f(p, Y) = -2p + 6Y$

- la funzione marginale del prezzo è: $f'_p = -2$
- la funzione marginale del reddito è: $f'_Y = 6$

In questo caso le funzioni marginali sono costanti e non dipendono né da p, né da Y; per ogni valore di p e Y abbiamo quindi che:

- mantenendo costante il reddito, al crescere del prezzo di una unità di moneta, si verifica una diminuzione costante della domanda di 2 unità
- mantenendo costante il prezzo, al crescere del reddito di una unità di moneta, si verifica un aumento costante della domanda di 6 unità.

Anche il concetto di *elasticità*, già visto a proposito delle funzioni di domanda e di offerta, può essere esteso a funzioni di due variabili mediante le derivate parziali.

L'ELASTICITÀ

Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili x e y; chiamiamo:

- **grado di elasticità parziale** di f rispetto a x il rapporto

$$\varepsilon_x = \frac{f'_x}{\dfrac{f(x, y)}{x}} = f_x{}' \cdot \frac{x}{f(x, y)}$$

- **grado di elasticità parziale** di f rispetto a y il rapporto

$$\varepsilon_y = \frac{f'_y}{\dfrac{f(x, y)}{y}} = f_y{}' \cdot \frac{y}{f(x, y)}$$

Il grado di elasticità rispetto a x esprime la sensibilità della funzione f nei confronti di una variazione infinitesima della variabile x, supponendo che y si mantenga costante; analogamente, il grado di elasticità rispetto a y esprime la sensibilità della funzione f nei confronti di una variazione infinitesima della variabile y, supponendo che x si mantenga costante.
La funzione f, rispetto alla variabile x oppure alla variabile y si dice poi:

- **elastica** se $|\varepsilon_x| > 1$ oppure $|\varepsilon_y| > 1$
- **rigida** se $|\varepsilon_x| < 1$ oppure $|\varepsilon_y| < 1$
- **unitaria** se $|\varepsilon_x| = 1$ oppure $|\varepsilon_y| = 1$.

Per esempio, se riprendiamo la precedente funzione di domanda $f(p, Y) = -2p + 6Y$, abbiamo che:

- l'elasticità rispetto al prezzo p è:

$$\varepsilon_p = f'_p \cdot \frac{p}{f(p, Y)} = -2 \cdot \frac{p}{-2p + 6Y} = \frac{p}{p - 3Y}$$

  e, poiché possiamo supporre che p sia minore del reddito Y, il modulo di questa espressione è minore di 1 e la domanda è rigida rispetto al prezzo
- l'elasticità rispetto al reddito Y è:

$$\varepsilon_R = f'_Y \cdot \frac{Y}{f(p, Y)} = 6 \cdot \frac{Y}{-2p + 6Y} = \frac{3Y}{3Y - p}$$

  e, poiché, con le stesse supposizioni precedenti, questa espressione è positiva e maggiore di 1, la domanda è elastica rispetto al reddito.

In molte situazioni economiche si presenta il caso in cui la domanda di un bene dipende dal prezzo del bene stesso e anche dal prezzo di un altro bene; per esempio la domanda di burro può dipendere sia dal prezzo del burro che dal prezzo della margarina; oppure, la domanda di formaggi di importazione dipende dal loro prezzo ma può dipendere anche dal prezzo dei formaggi locali. Per valutare l'incidenza che il prezzo di un bene ha nei confronti della domanda di un altro bene si calcola l'elasticità parziale della domanda rispetto al prezzo del secondo bene.

Sia dunque $d = d(p_1, p_2, Y)$ una funzione di domanda che dipende dal prezzo p_1 del bene, dal prezzo p_2 di un altro bene e dal reddito Y del consumatore. Si chiama **elasticità incrociata** di d rispetto a p_2 il grado di elasticità parziale di d rispetto a p_2:

$$\text{elasticità incrociata} = \varepsilon_{dp_2} = \frac{p_2}{d} \cdot \frac{\partial d}{\partial p_2}$$

Per esempio se $d = 600 - 4p_1 - 3p_2 + \dfrac{1}{100}Y$, allora l'elasticità incrociata di d rispetto a p_2 è

$$\varepsilon_{dp_2} = \frac{p_2}{600 - 4p_1 - 3p_2 + \frac{1}{100}Y} \cdot (-3) = -\frac{3p_2}{600 - 4p_1 - 3p_2 + \frac{1}{100}Y}$$

Nel caso in cui si abbia $p_1 = 50$, $p_2 = 60$ e $Y = 1000$, l'elasticità incrociata vale

$$\varepsilon_{dp_2} = -\frac{18}{23} \approx -0{,}7826$$

cioè all'aumentare del prezzo del secondo bene la domanda del primo diminuisce.

Valutando l'elasticità incrociata si possono presentare i seguenti casi:

- $\varepsilon_{dp_2} > 0$

  e questo significa che un aumento del prezzo del secondo bene provoca un aumento della domanda del primo, cioè le richieste del consumatore si spostano sul primo bene; in questo caso i due beni si dicono **succedanei**.
  Sono ad esempio succedanei il burro e la margarina, l'olio di oliva e quello di semi, il trasporto per ferrovia e quello su strada.

- $\varepsilon_{dp_2} < 0$

  e questo significa che un aumento del prezzo del secondo bene provoca una diminuzione della domanda del primo; in tal caso i due bene si dicono **complementari**.
  Sono ad esempio complementari il trasporto su strada e il carburante (un aumento del carburante fa in generale diminuire i trasporti su strada perchè diventano meno convenienti), i capi di abbigliamento ed i filati (un aumento del prezzo dei filati fa diminuire la richiesta di capi di abbigliamento).

- $\varepsilon_{dp_2} = 0$

  e questo significa che un qualsiasi aumento del prezzo del secondo bene non influenza il prezzo del primo; in tal caso fra i due beni non esiste alcuna relazione.
  Per esempio, un'automobile e una telecamera, l'acqua minerale e gli alcolici, i videogiochi e gli alimentari, sono beni che non hanno relazione fra loro.

$\varepsilon_{dp_2} > 0$: *i beni sono succedanei*

$\varepsilon_{dp_2} < 0$: *i beni sono complementari*

$\varepsilon_{dp_2} = 0$: *i beni non sono in relazione*

ESEMPI

1. La funzione di domanda di un certo prodotto dipende dal prezzo del bene e dal reddito del consumatore secondo la legge $d = 100 - p + \sqrt{Y}$, dove p è il prezzo del prodotto e Y il reddito del consumatore. Calcoliamo la funzione marginale del prezzo e del reddito e l'elasticità parziale, rispetto a p e a Y, nel caso in cui $p = 200$ e $Y = 12000$ unità di moneta.

■ Calcoliamo le due funzioni marginali.

- La funzione marginale del prezzo è la derivata parziale prima della domanda rispetto a p:

$$\frac{\partial d}{\partial p} = -1$$

Questa relazione ci dice che per una variazione del prezzo di una unità, rimanendo costante il reddito, la domanda diminuisce di una unità.

- La funzione marginale del reddito è la derivata parziale prima della domanda rispetto a Y:

$$\frac{\partial d}{\partial Y} = \frac{1}{2\sqrt{Y}}$$

Questa relazione ci dice che la variazione della domanda in corrispondenza dell'aumento di una unità di reddito, rimanendo costante il prezzo, subisce un aumento pari a $\frac{1}{2\sqrt{Y}}$; ad esempio, se il reddito passa da 9000 a 9001 unità di moneta, con un prezzo $p = 150$, la domanda aumenta di $\frac{1}{2\sqrt{9000}} = 0{,}0053$, passa cioè da $100 - 150 + \sqrt{9000} \approx 44{,}8683$ a $100 - 150 + \sqrt{9001} \approx 44{,}8736$.

Per un prezzo $p = 150$ ed un reddito $Y = 9000$, abbiamo dunque che la funzione marginale del prezzo è -1 mentre la funzione marginale del reddito è 0,0053; per tali valori di prezzo e di reddito, la domanda è quindi più influenzata dal prezzo che non dal reddito.

■ Determiniamo adesso le elasticità parziali.

- L'elasticità della domanda rispetto al prezzo è: $\varepsilon_{dp} = \frac{\partial d}{\partial p} \cdot \frac{p}{d} = -1 \cdot \frac{p}{100 - p + \sqrt{Y}}$

  ed è, per esempio: $\varepsilon_{dp}(200{,}12000) = \frac{-200}{100 - 200 + \sqrt{12000}} = -20{,}95$

L'elasticità in tale punto è negativa, come ci si doveva aspettare visto che la domanda è una funzione decrescente del prezzo.

- L'elasticità della domanda rispetto al reddito è:

$$\varepsilon_{dY} = \frac{\partial d}{\partial Y} \cdot \frac{Y}{d} = \frac{1}{2\sqrt{Y}} \cdot \frac{Y}{100 - p + \sqrt{Y}} = \frac{\sqrt{Y}}{2\left(100 - p + \sqrt{Y}\right)} \quad \text{ed è} \quad \varepsilon_{dY}(200{,}12000) \approx 5{,}74$$

Questa volta l'elasticità è positiva perché, visto che all'aumentare del reddito il consumatore ha più possibilità economiche, anche la domanda cresce.
Possiamo poi dire che, poichè in entrambi i casi abbiamo trovato un valore di elasticità maggiore di 1 in modulo, questa funzione di domanda è elastica sia rispetto al prezzo che rispetto al reddito.

2. La funzione di domanda di un dato bene dipende dal prezzo di quel bene, dal prezzo di un secondo bene e dal reddito nazionale lordo. Una situazione di questo tipo si presenta ad esempio per la domanda, da parte di un Paese, di energia da riscaldamento mediante petrolio: tale domanda dipende dal prezzo del petrolio, ma anche da quello delle fonti alternative, ad esempio il gas metano, e dal reddito nazionale lordo, nel senso che un paese ricco ha, di solito, una maggiore domanda di energia di uno povero. Sia ad esempio

$$d = 400 - 2p_1 + 0{,}5p_2 + 0{,}04Y$$

dove p_1 è il prezzo del primo bene, p_2 è il prezzo del secondo bene e Y è il reddito nazionale lordo; si tratta di una funzione di tre variabili. Calcoliamo l'elasticità della domanda rispetto a tutte le variabili coinvolte.

Calcoliamo innanzi tutto le tre derivate parziali:

$$\frac{\partial d}{\partial p_1} = -2 \qquad \frac{\partial d}{\partial p_2} = 0{,}5 \qquad \frac{\partial d}{\partial Y} = 0{,}04$$

L'elasticità della domanda del bene rispetto al suo prezzo p_1 è

$$\varepsilon_{dp_1} = -2 \cdot \frac{p_1}{400 - 2p_1 + 0{,}5p_2 + 0{,}04Y}$$

L'elasticità della domanda del bene rispetto al prezzo p_2 del secondo bene cioè l'elasticità incrociata è

$$\varepsilon_{dp_2} = 0{,}5 \cdot \frac{p_2}{400 - 2p_1 + 0{,}5p_2 + 0{,}04Y}$$

L'elasticità della domanda del bene rispetto al reddito Y è $\quad \varepsilon_{dY} = 0{,}04 \cdot \dfrac{Y}{400 - 2p_1 + 0{,}5p_2 + 0{,}04Y}$

Supponendo ad esempio che, in opportune unità di misura, sia $p_1 = 20$, $p_2 = 30$, $Y = 1000$, si ha che:

- $\varepsilon_{dp_1}(20, 30, 1000) = -\dfrac{40}{415} \approx -0{,}096$

  quindi, all'aumentare del prezzo del bene, la domanda diminuisce

- $\varepsilon_{dp_2}(20, 30, 1000) = \dfrac{15}{415} \approx 0{,}036$

  quindi, all'aumentare del prezzo del secondo bene, la domanda del primo aumenta; questo vuol dire che i due beni sono succedanei

- $\varepsilon_{dY}(20, 30, 1000) = \dfrac{40}{415} \approx 0{,}096$

  quindi, all'aumentare del reddito nazionale lordo, anche la domanda aumenta.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. La funzione di domanda di un certo bene è espressa dalla legge $d = 300 - \frac{1}{2}p^2 + 0{,}002Yp$ dove p è il prezzo del bene e Y il reddito del consumatore. Scegli tra quelle proposte la voce corretta:

a. la funzione marginale del prezzo è: ① $-p$ ② $0{,}002Y - p$ ③ $300 - p$

b. la funzione marginale del reddito è: ① $0{,}002p$ ② $300 + 0{,}002p$ ③ $0{,}002$

c. per $p = 6$ e $Y = 1000$, rispetto ad una variazione di prezzo, la domanda è:
① elastica ② rigida ③ unitaria

d. per $p = 6$ e $Y = 1000$, rispetto ad una variazione del reddito, la domanda è:
① elastica ② rigida ③ unitaria

3. La funzione di utilità marginale e il vincolo di bilancio

Sempre nel capitolo *Fondamenti di microeconomia e macroeconomia* abbiamo visto che la funzione di utilità indica, mediante il numero $z = U(x, y)$, il livello di soddisfazione del consumatore quando possiede il paniere di beni (x, y).
La funzione di utilità è, in generale, una funzione crescente, nel senso che, all'aumentare di una o entrambe le variabili x e y, aumenta anche la soddisfazione del consumatore.
Le derivate parziali della funzione U rispetto a x e a y, quindi U'_x e U'_y, rappresentano le **funzioni marginali** di ciascun bene; esse esprimono la variazione dell'utilità in relazione a una variazione infinitesima del bene x oppure del bene y.
In sostanza, l'utilità marginale misura l'aumento della soddisfazione che deriva dal consumo di ulteriori "dosi" di un bene mantenendo costante il consumo dell'altro.
Le funzioni di utilità marginale sono quindi sempre positive; esse sono però decrescenti in quanto l'aumentare del consumo di un bene fa crescere sì la soddisfazione, ma in misura sempre minore.
Pensiamo ad una persona affamata che, posta davanti ad una tavola piena di panini, comincia a mangiarne uno di seguito all'altro: al primo panino e probabilmente al secondo e al terzo il livello di soddisfazione è molto alto, ma a partire dal quarto in poi la soddisfazione diminuisce sempre di più fino a che, ad un certo punto, quella persona rifiuta persino di mangiare altri panini.
Questo fa sì che la funzione di utilità marginale obbedisca al seguente principio:

Principio dell'utilità marginale decrescente. All'aumentare del consumo di un bene, la sua utilità marginale diminuisce fino a ridursi a zero.

Il vincolo di bilancio

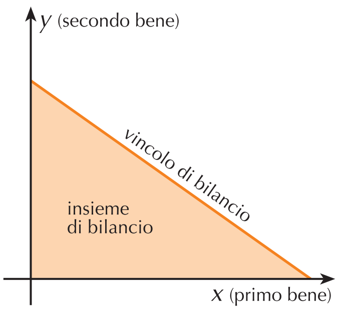
La funzione di utilità $U(x, y)$ e le curve di indifferenza $U(x, y) = k$, cioè le curve i cui punti rappresentano l'insieme dei panieri (x, y) che offrono il valore k di utilità, danno indicazioni su quello che il consumatore vorrebbe acquistare. Esiste tuttavia una limitazione al potere d'acquisto del consumatore che è data dalla quantità di denaro che ha a disposizione.
Se x e y sono le quantità dei due beni, p_x e p_y i rispettivi prezzi e C è il reddito del consumatore, deve essere:

$$p_x x + p_y y \leq C$$

In questa parte il reddito viene indicato con C per evitare confusione con la quantità y del secondo bene.

L'insieme dei panieri (x, y) che soddisfano questa relazione prende il nome di **insieme di bilancio**; dal punto di vista grafico l'insieme di bilancio è costituito dai punti della regione di piano delimitata dagli assi cartesiani e dalla retta $p_x x + p_y y = C$ (***figura 2***).

Figura 2



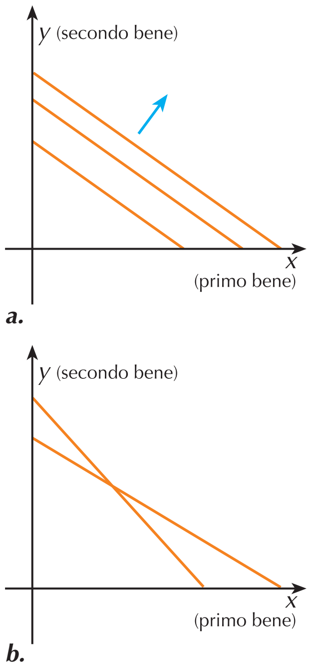
La retta $p_x x + p_y y = C$ prende il nome di **vincolo di bilancio**.
Essa rappresenta l'insieme dei panieri che il consumatore può acquistare spendendo completamente il proprio reddito.

Se scriviamo l'equazione del vincolo in forma esplicita $y = -\dfrac{p_x}{p_y}x + \dfrac{C}{p_y}$

ci accorgiamo che ha una pendenza negativa che è rappresentata dal rapporto tra il prezzo del bene x e quello del bene y.
Inoltre, al variare di uno dei parametri p_x, p_y e C il vincolo si modifica e si presentano le seguenti situazioni:

- se cambia il valore di C e non quello dei due prezzi, la retta del vincolo ha la stessa pendenza ma risulta traslata; si allontana dall'origine se il capitale aumenta, si avvicina all'origine se il capitale diminuisce (***figura 3a***)
- se cambia il valore di p_x oppure quello di p_y ma non quello di C, la retta del vincolo modifica la sua pendenza e diventa più o meno ripida a seconda del rapporto $\dfrac{p_x}{p_y}$ (***figura 3b***).

Figura 3



Tra tutti i possibili panieri, il consumatore sceglierà quello che massimizza la sua funzione di utilità (assioma di non sazietà); dobbiamo quindi ricercare il punto di massimo della funzione $U(x, y)$ con il vincolo di bilancio $p_x x + p_y y = C$.

Si dimostra che il punto di massima utilità, cioè il paniere che dà la massima soddisfazione al consumatore, è la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{U'_x}{U'_y} = \dfrac{p_x}{p_y} \\ p_x x + p_y y = C \end{cases}$$

ESEMPI

1. Un consumatore deve acquistare due beni ed il suo vincolo di bilancio è dato dalla relazione $3x + 8y = 71$. Si stima che la sua funzione di utilità per i due beni sia $U(x, y) = (x+3)(y+2)$. Cerchiamo il paniere di massima utilità per il consumatore.

Per scrivere il sistema che rappresenta la soluzione del problema dobbiamo calcolare le utilità marginali:

$$U'_x = y + 2 \qquad U'_y = x + 3$$

Il rapporto tra i prezzi è il valore assoluto del coefficiente angolare della retta del vincolo: $\dfrac{p_x}{p_y} = \dfrac{3}{8}$

Impostiamo il sistema: $\begin{cases} \dfrac{y+2}{x+3} = \dfrac{3}{8} \\ 3x + 8y = 71 \end{cases}$

Risolvendolo otteniamo che deve essere: $x = 13 \quad \wedge \quad y = 4$.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Un consumatore ha a disposizione un capitale di € 200 per l'acquisto di due beni i cui prezzi unitari sono rispettivamente di € 15 e di € 18. Il vincolo di bilancio è espresso dalla relazione:

a. $15x + 18y + 200 = 0$ **b.** $15x + 18y - 200 = 0$
c. $15x - 18y + 200 = 0$ **d.** $15x - 18y - 200 = 0$

2. La funzione di utilità di un consumatore è data dalla funzione $U = xy + 2y$ ed il vincolo di bilancio è dato dall'equazione $x + 2y - 15 = 0$. Per determinare il punto di massima utilità per il consumatore utilizzando il metodo delle funzioni marginali si deve risolvere il sistema:

a. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{y} = \dfrac{1}{2} \\ x + 2y - 15 = 0 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} \dfrac{y}{x+2} = 2 \\ xy + 2y = 0 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} \dfrac{y}{x+2} = \dfrac{1}{2} \\ xy + 2y = 0 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} \dfrac{y}{x+2} = \dfrac{1}{2} \\ x + 2y - 15 = 0 \end{cases}$

4. ECONOMETRIA E MODELLI ECONOMETRICI

4.1 Che cos'è l'econometria: il modello base

Ricercando la parola *econometria* nel vocabolario si legge:

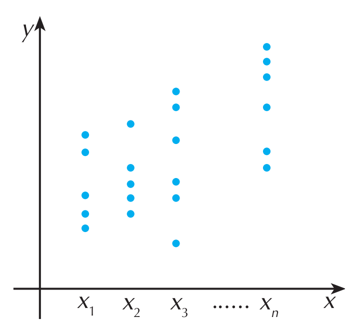
parte dell'economia che studia i processi economici utilizzando modelli matematici e metodi statistici.

L'econometria si basa quindi sullo studio formalizzato di modelli economici, i quali forniscono una rappresentazione semplificata della realtà che si vuole rappresentare; essa interviene tutte le volte che una teoria economica deve essere confrontata con i dati reali per verificare la consistenza e l'efficacia del modello stesso.
Pensiamo, per esempio, alla relazione tra reddito e consumo per generi non di prima necessità; poiché si può ipotizzare che il consumo, che qui indichiamo con Y, cresca proporzionalmente al reddito che qui indichiamo con X, un modello economico semplice può essere rappresentato da una legge della forma:

$$Y = aX + b$$

E' logico tuttavia pensare che famiglie che hanno lo stesso reddito X abbiano consumi anche molto diversi tra loro, che dipendono dall'età dei componenti della famiglia, dalle diverse abitudini, dai gusti e così via. Rilevando i dati relativi a reddito e consumo su un campione di famiglie e rappresentandoli in un diagramma cartesiano, otterremmo probabilmente qualcosa di simile al grafico in ***figura 4***.

Figura 4



I problemi da affrontare a questo punto sono essenzialmente i seguenti:

- determinare i coefficienti a e b in modo che la retta del modello sia la miglior retta che passa tra questi punti (retta di regressione statistica)
- verificare che il modello lineare sia davvero quello adatto ai dati
- valutare eventuali elementi di disturbo che possono intervenire nella rilevazione dei dati.

In generale, un modello econometrico si può quindi pensare composto da un certo numero di equazioni della forma

$$y_k = f(x_k) + \varepsilon_k$$

dove:

- le y_k rappresentano le variabili che il modello intende descrivere (variabili *endogene*); nel caso del precedente esempio abbiamo una sola y_k che rappresenta il consumo;
- f è la funzione che descrive il modello in dipendenza dalle variabili indipendenti x_k (variabili *esogene*); nel nostro caso abbiamo una funzione lineare con una sola x_k che rappresenta il reddito;
- i parametri ε_k rappresentano le variabili aleatorie del modello (*termini di disturbo*), cioè fattori che non si possono osservare direttamente; questi, in genere, possono rappresentare sia un elemento di asistematicità insito nel comportamento umano, sia errori di misurazione delle variabili, sia infine l'effetto di altre variabili non considerate espressamente nel modello. Nel nostro esempio il termine di disturbo può essere dovuto a redditi non dichiarati, al background familiare che può alzare o abbassare il tenore di vita e così via.

Gli elementi di disturbo possono essere ridotti con analisi più approfondite, ma non possono mai essere eliminati e costituiscono la componente aleatoria dell'analisi econometrica. Sostanzialmente, quindi, una indagine econometrica si articola nelle seguenti fasi:

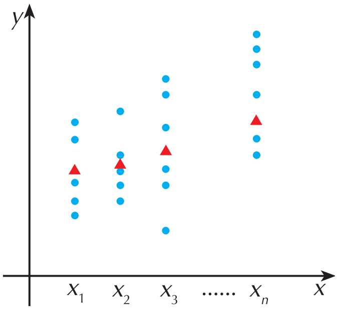
- Formulazione di una teoria o di un'ipotesi e specificazione del modello econometrico che la rappresenta
- Raccolta dei dati
- Stima dei parametri del modello econometrico
- Verifica della bontà del modello
- Utilizzo del modello per verificare ipotesi o fare previsioni.

Non abbiamo gli strumenti matematici adatti ad affrontare l'ultimo dei punti elencati; possiamo però analizzare più in dettaglio le altre parti.

4.2 Il modello di regressione lineare

Nel quarto volume abbiamo studiato la dipendenza statistica e abbiamo imparato a calcolare la retta di regressione; ricordiamo brevemente quanto detto in quella sede, riprendendo l'esempio del precedente paragrafo (fai di nuovo riferimento alla ***figura 4***).
La retta di regressione di Y su X è la retta che meglio approssima i dati rilevati mettendo in evidenza la dipendenza della variabile Y dalla variabile X. In sostanza, per ogni valore x_i rilevato si calcola la media y_i dei corrispondenti valori di Y (in ***figura 5*** i valori y_i sono evidenziati con un triangolino rosso) e si calcola poi la retta di interpolazione statistica tra i punti di coordinate (x_i, y_i) così costruiti.
La retta di regressione ha equazione $\widehat{Y} = aX + b$ e i suoi parametri a e b si calcolano con le formule:

Figura 5



$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Il modello lineare che descrive il fenomeno *consumo-reddito* si può quindi rappresentare con una relazione del tipo:

$$\underbrace{Y}_{\text{variabile del modello reale}} = \underbrace{aX + b}_{\text{valore della retta di regressione}} + \underbrace{\varepsilon}_{\text{errore (componente aleatoria)}}$$

In questo modello il consumo Y viene influenzato dal termine di disturbo ε, dovuto a fattori imponderabili come quelli menzionati in precedenza; si suppone che ε abbia una distribuzione normale.
I termini di disturbo hanno l'effetto di provocare una deviazione dei valori della variabile dipendente da quelli previsti dalla retta di regressione.

Una volta individuata la retta di regressione, sappiamo poi che è possibile misurare la coerenza del modello scelto con i dati rilevati mediante il *coefficiente di correlazione lineare* ρ (indice di Bravais-Pearson) definito dalla relazione

$$\rho = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}$$

Il coefficiente di correlazione lineare è un numero compreso tra -1 e 1 e più il suo modulo si avvicina a 1, migliore è l'approssimazione dei dati al modello lineare.

ESEMPI

1. Sono stati raccolti i seguenti dati relativi a reddito e consumo per generi non di prima necessità (in migliaia di euro) di un campione di famiglie italiane:

classe di reddito	valore centrale x_i	dati osservati di consumo	valore medio di consumo y_i
0-20	10	8, 5, 6, 4, 3, 6, 7	5,6
20-40	30	10, 12, 15, 18, 22, 20	16,2
40-50	45	22, 18, 25, 30, 32, 38, 40	29,3
50-60	55	30, 32, 28, 35, 40, 41, 44	35,7
60-70	65	45, 48, 45, 46, 50, 52, 54	48,6
70-80	75	58, 59, 61, 55, 65, 60, 56	59,1

Calcoliamo i parametri della retta di regressione ($n = 6$):

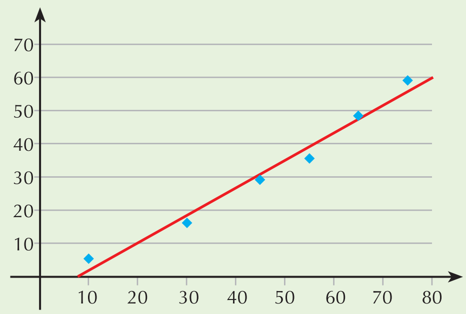
	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
	10	5,6	100	56
	30	16,2	900	486
	45	29,3	2025	1318,5
	55	35,7	3025	1963,5
	65	48,6	4225	3159
	75	59,1	5625	4432,5
TOTALI	**280**	**194,5**	**15900**	**11415,5**

$$a = \frac{6 \cdot 11415{,}5 - 280 \cdot 194{,}5}{6 \cdot 15900 - 280^2} = 0{,}825 \qquad b = \frac{15900 \cdot 194{,}5 - 11415{,}5 \cdot 280}{6 \cdot 15900 - 280^2} = -6{,}105$$

La retta di regressione ha quindi equazione: $Y = 0{,}825X - 6{,}105$.

In ***figura 6*** puoi vedere la rappresentazione dei dati e la retta di regressione.

Figura 6



Il coefficiente angolare di tale retta indica che ad ogni aumento di 1 euro del reddito, il consumo aumenta di 0,825 euro; di tale retta si dovrebbe poi considerare solo la parte non negativa in quanto il valore $-6{,}105$ che si ottiene per un valore nullo del reddito, non ha senso dal punto di vista economico. Il valore di consumo nullo si ottiene per $x = 7{,}4$ e indica che le famiglie italiane non possono spendere per generi non di prima necessità se hanno un reddito inferiore a 7,4 mila euro.

Misuriamo adesso il grado di accostamento dei dati rilevati alla retta di regressione mediante il coefficiente di correlazione lineare; per applicare la formula dobbiamo prima calcolare $\sum_{i=1}^{n} y_i^2$ che è uguale a 8281,55:

$$\rho = \frac{6 \cdot 11415{,}5 - 280 \cdot 194{,}5}{\sqrt{(6 \cdot 15900 - 280^2)(6 \cdot 8281{,}55 - 194{,}5^2)}} = 0{,}988$$

Trattandosi di un valore molto vicino a 1, possiamo concludere che vi è una dipendenza lineare quasi perfetta.
Il fattore di disturbo, che segue una distribuzione normale, può far aumentare o diminuire il consumo e far ottenere valori leggermente diversi da quelli elaborati; non abbiamo tuttavia le basi necessarie per affrontare questo argomento e terminiamo qui la nostra trattazione.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. In un modello econometrico si suppone una dipendenza lineare tra due variabili X e Y e il coefficiente di correlazione lineare vale 0,35. Si può concludere che:

a. il modello scelto si adatta in modo eccellente ai dati rilevati

b. i dati reali si discostano al massimo di 0,35 dai valori previsti dal modello

c. il modello lineare non è adatto a descrivere il fenomeno preso in considerazione

d. tutte le precedenti affermazioni sono errate.

I concetti e le regole

Le derivate parziali

Una funzione di due variabili è una legge che ad ogni coppia ordinata di numeri reali (x, y) appartenenti ad un sottoinsieme di $R \times R$ associa uno e un solo numero reale z e si scrive $z = f(x, y)$.
Di una funzione di due variabili si possono calcolare le derivate parziali rispetto a x oppure rispetto a y applicando le consuete regole di derivazione; in particolare:

- nella derivazione rispetto a x si considera y come costante; la derivata parziale rispetto a x si indica con il simbolo f'_x oppure $\dfrac{\partial f}{\partial x}$
- nella derivazione rispetto a y si considera x come costante; la derivata parziale rispetto a y si indica con il simbolo f'_y oppure $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Le funzioni marginali e l'elasticità

Data la funzione di due variabili $f(x, y)$, definita in un sottoinsieme di $R \times R$, si dice **funzione marginale** di f rispetto a una delle sue variabili la derivata parziale di f rispetto a quella variabile:

- funzione marginale di f rispetto a x è f'_x
- funzione marginale di f rispetto a y è f'_y.

Chiamiamo poi:

- elasticità parziale di f rispetto a x la quantità: $\varepsilon_x = f'_x \cdot \dfrac{x}{f(x, y)}$
- elasticità parziale di f rispetto a y la quantità: $\varepsilon_y = f'_y \cdot \dfrac{y}{f(x, y)}$

L'utilità marginale

Se la funzione $f(x, y)$ rappresenta una funzione di utilità, le sue funzioni marginali esprimono la variazione dell'utilità in relazione a variazioni infinitesime di uno dei due beni x oppure y.
Se p_x e p_y sono i prezzi dei due beni x e y e se C rappresenta il reddito del consumatore, allora la relazione $C = x \cdot p_x + y \cdot p_y$ viene detta **vincolo di bilancio**; questa relazione indica che il consumatore può acquistare un paniere di beni (x, y) che è compatibile con il proprio reddito.

Si dimostra poi che il punto di massima utilità è la soluzione del sistema: $\begin{cases} \dfrac{U'_x}{U'_y} = \dfrac{p_x}{p_y} \\ p_x x + p_y y = C \end{cases}$

L'econometria

L'*econometria* è la scienza che studia i processi economici servendosi di modelli matematici e applicando metodi di tipo statistico.
Tra i modelli economici, quello lineare è tra i più semplici ed è quello che si adatta a descrivere numerose situazioni reali.
La retta che costituisce tale modello ha equazione

$$Y = aX + b + \varepsilon$$

dove $aX + b$ è il valore della variabile dipendente Y calcolato in base alla retta di regressione e ε è il termine di disturbo.

Approfondimenti di micro e macroeconomia

Cenni alle funzioni di due variabili: le derivate parziali

Comprensione

1 La derivata parziale della funzione $f(x, y)$ rispetto a x nel punto $P(x_0, y_0)$ si definisce come:

a. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ **b.** $\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$

c. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{h}$ **d.** $\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(x_0 + k, y_0) - f(x_0, y_0)}{k}$

2 Individua tra le seguenti, le funzioni che rappresentano le derivate parziali prime di $f(x, y) = x^2y - 3xy^2$ rispetto a x e rispetto a y:

a. $2xy - 3y^2$ **b.** $x^2 - 6x$ **c.** $2x - 3$ **d.** $x^2 - 6xy$

Applicazione

Il calcolo delle derivate prime

Calcola le derivate parziali prime delle seguenti funzioni, applicando le regole di derivazione.

3 $z = x^3 - 3x^2 + xy^2$ $[3x^2 - 6x + y^2,\ 2xy]$

4 $z = 2x^3 - 3xy^2$ $[6x^2 - 3y^2,\ -6xy]$

5 $z = 2x^2y - 4x^2y^2 + y^3$ $[4xy(1 - 2y),\ 2x^2 - 8x^2y + 3y^2]$

6 $z = (2x - 4y + 1)^3$ $[6(2x - 4y + 1)^2,\ -12(2x - 4y + 1)^2]$

7 $z = xy(x + 2y)$ $[2xy + 2y^2,\ x^2 + 4xy]$

8 $z = 3x^2y^3$ $[6xy^3,\ 9x^2y^2]$

9 $z = 1 - xy + 4x^2$ $[8x - y,\ -x]$

10 $z = x^2y - xy^2$ $[2xy - y^2,\ x^2 - 2xy]$

11 $z = x^3y^4 + 2x^2y^5 - xy^6 + y^7$ $[3x^2y^4 + 4xy^5 - y^6,\ 4x^3y^3 + 10x^2y^4 - 6xy^5 + 7y^6]$

12 $z = \dfrac{x + y}{x - y}$ $\left[-\dfrac{2y}{(x - y)^2},\ \dfrac{2x}{(x - y)^2}\right]$

13 $z = \dfrac{x + y}{x^2 - 3y}$ $\left[-\dfrac{x^2 + 2xy + 3y}{(x^2 - 3y)^2},\ \dfrac{x(x + 3)}{(x^2 - 3y)^2}\right]$

14 $x = \dfrac{x - 4y^2}{x}$ $\left[\dfrac{4y^2}{x^2},\ -\dfrac{8y}{x}\right]$

15 $z = \dfrac{x + 2y^2}{x + y - 3}$ $\left[-\dfrac{2y^2 - y + 3}{(x + y - 3)^2},\ \dfrac{4xy - x + 2y^2 - 12y}{(x + y - 3)^2}\right]$

16 $z = \dfrac{x^2 - 3xy}{x^3 - 1}$ $\left[-\dfrac{x^4 - 6x^3y + 2x - 3y}{(x^3 - 1)^2},\ \dfrac{3x}{1 - x^3}\right]$

17 $z = \dfrac{x^2 - 6xy^2}{y^2 - 4}$ $\left[\dfrac{2(x - 3y^2)}{y^2 - 4},\ \dfrac{2xy(24 - x)}{(y^2 - 4)^2}\right]$

18 $z = x\sqrt{y}$ $\left[\sqrt{y},\ \dfrac{x}{2\sqrt{y}}\right]$

19 $z = x^4 - 6\sqrt{x} + 2y - \sqrt{y}$ $\left[4x^3 - \dfrac{3}{\sqrt{x}},\ 2 - \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right]$

20 $z = 2x^3 - \dfrac{1}{2}xy^2 + \sqrt{xy}$ $\left[6x^2 - \dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{y}{2\sqrt{xy}},\ -xy + \dfrac{x}{2\sqrt{xy}}\right]$

21 $z = 3x\sqrt{x^2 - y^2}$ $\left[\dfrac{3(2x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 - y^2}},\ -\dfrac{3xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right]$

22 $z = x - y + \sqrt{x^2 - y^2}$ $\left[1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}},\ -1 - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right]$

23 $z = x + 4y - \sqrt{x + y}$ $\left[\dfrac{2\sqrt{x + y} - 1}{2\sqrt{x + y}},\ \dfrac{8\sqrt{x + y} - 1}{2\sqrt{x + y}}\right]$

LE FUNZIONI MARGINALI E L'ELASTICITÀ PUNTUALE

Comprensione

24 Dal punto di vista economico, una funzione marginale indica:

a. come varia la derivata della funzione rispetto a una delle sue variabili
b. come varia la funzione se tutte le variabili si incrementano di una quantità infinitesimale
c. come varia la funzione se prendiamo in considerazione solo un numero finito di variabili
d. come varia la funzione se si incrementa una variabile di una quantità infinitesimale, tenendo costanti le altre variabili.

25 La domanda dell'olio d'oliva dipende dal suo prezzo ma anche da quello dell'olio di semi; se i due beni sono succedanei, l'elasticità incrociata è:

a. positiva
b. negativa
c. nulla
d. non si può valutare se non si conosce la legge di domanda.

26 La domanda di un bene dipende dal proprio prezzo p_1 e dal prezzo p_2 di un bene ad esso similare. Se $|\varepsilon_{d,p_1}| = 0{,}33$ e $\varepsilon_{d,p_2} = -0{,}08$ si può affermare che:

a. la domanda del bene è elastica e i due beni sono succedanei
b. la domanda del bene è elastica e i due beni sono complementari
c. la domanda del bene è rigida e i due beni sono complementari
d. la domanda del bene è rigida e i due beni sono succedanei.

Applicazione

Risolvere i seguenti esercizi sulle funzioni marginali.

27 La funzione della domanda di un prodotto per un'industria meccanica dipende dal prezzo del bene ma anche dal reddito del consumatore ed è espressa dalla legge

$$d = 200 - 3p + \sqrt[5]{Y}$$

dove p indica il prezzo del prodotto e Y il reddito del consumatore.

a. Calcola le funzioni marginali rispetto al prezzo e al reddito. $[-3;\ 0{,}2Y^{-0{,}8}]$

b. Posto $p = 15$ e $Y = 25000$, calcola l'elasticità della domanda rispetto al prezzo e al reddito. $[\varepsilon_{dp} = -0{,}2768;\ \varepsilon_{dY} = 0{,}0093]$

Commenta i risultati ottenuti.

28 La funzione della domanda di un prodotto dipende dal prezzo del bene e dal reddito del consumatore secondo la legge

$$d = 700 - 14p + \sqrt{Y}$$

dove p indica il prezzo del prodotto e Y il reddito del consumatore.

a. Determina le funzioni marginali rispetto al prezzo e al reddito. $[-14;\ 0{,}5Y^{-0{,}5}]$

b. Posto $p = 18$ e $Y = 15000$, calcola l'elasticità della domanda rispetto al prezzo e al reddito. $[\varepsilon_{dp} = -0{,}4417;\ \varepsilon_{dY} = 0{,}1073]$

29 La funzione della domanda di un prodotto sanitario dipende dal prezzo del bene ma anche dal reddito del consumatore secondo la legge

$$d = 500 - \frac{1}{2}p + 4\sqrt[3]{Y}$$

dove p indica il prezzo del prodotto e Y il reddito del consumatore.

a. Calcola le funzioni marginali rispetto al prezzo e al reddito. $\left[-0{,}5;\ \frac{4}{3}Y^{-\frac{2}{3}}\right]$

b. Posto $p = 300$ e $Y = 20000$, calcola l'elasticità della domanda rispetto al prezzo e al reddito. $[\varepsilon_{dp} = -0{,}327;\ \varepsilon_{dY} = 0{,}0789229]$

30 La domanda di un certo bene è $d = 70p_2 - 10p_1 + 0{,}01Y$; dopo aver individuato il reddito del consumatore per $d = 1000$, $p_1 = 12$ e $p_2 = 15$, calcola le funzioni marginali rispetto alle tre variabili. Trova inoltre l'elasticità incrociata e stabilisci la natura del bene.

$\left[Y = 7000;\ d'_{p_1} = -10;\ d'_{p_2} = 70;\ d'_Y = 0{,}01;\ |\varepsilon_{dp_1}| = 0{,}12;\ \varepsilon_{dp_2} = 1{,}05 \text{ succedanei}\right]$

31 Considera la seguente funzione di domanda $d = 1000 - 40p_1 + 22p_2 + 0{,}03Y$; calcola l'elasticità rispetto al prezzo p_1 nell'ipotesi che sia $p_2 = 25$, $Y = 15000$ e $d = 880$ e stabilisci la tipologia della domanda. Individua poi attraverso l'elasticità incrociata la natura dei due beni.

$\left[|\varepsilon_{dp_1}| = 1{,}27 \text{ elastica};\ \varepsilon_{dp_2} = 0{,}625 \text{ succedanei}\right]$

32 **ESERCIZIO GUIDA**

Consideriamo la funzione di domanda di un dato bene che dipende dal suo prezzo p_1, dal prezzo p_2 di un secondo bene e dal reddito Y del consumatore secondo la legge

$$d = 200 - 4p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}02Y$$

Determina:

a. le funzioni marginali rispetto alle diverse variabili presenti nella funzione di domanda;

b. l'elasticità della domanda rispetto al prezzo del bene e rispetto al reddito del consumatore per $p_1 = 60$, $p_2 = 75$, $Y = 4000$;

c. l'elasticità incrociata, stabilendo la relazione che c'è fra i due beni; se il prezzo del secondo bene aumenta del 14%, come varia la domanda?

a. Per trovare le funzioni marginali, calcoliamo le derivate parziali prime rispetto al prezzo p_1 del primo bene, rispetto al prezzo p_2 del secondo bene e rispetto al reddito Y:

$$\frac{\partial d}{\partial p_1} = -4 \qquad \frac{\partial d}{\partial p_2} = 0{,}2 \qquad \frac{\partial d}{\partial Y} = 0{,}02$$

b. L'elasticità della domanda rispetto al prezzo p_1 è:

$$\varepsilon_{dp_1} = -\frac{4p_1}{200 - 4p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}02Y}$$

ed è $\varepsilon_{dp_1}(60, 75, 4000) = -4{,}36$.

Avere ottenuto una elasticità negativa ci permette di dedurre che all'aumentare del prezzo la domanda diminuisce; inoltre, poiché $|\varepsilon_{dp_1}| > 1$, la domanda del bene è elastica.

Calcola adesso ε_{dY} e determina $\varepsilon_{dY}(60, 75, 4000)$:

l'elasticità è positiva e quindi all'aumentare del reddito la domanda aumenta; inoltre, poiché $|\varepsilon_{dY}| > 1$, la domanda è elastica.

c. L'elasticità incrociata è ε_{dp_2} e, svolgendo i calcoli, trovi che $\varepsilon_{dp_2}(60, 75, 4000) = \frac{15}{55} = 0{,}27$.

L'elasticità incrociata è positiva, quindi i due beni sono succedanei e, all'aumentare del prezzo del secondo bene, la domanda del primo aumenta.

Per rispondere all'ultima domanda, consideriamo la relazione

$$\frac{\Delta d}{d} = \varepsilon_{dp_2} \cdot \frac{\Delta p_2}{p_2} \qquad \text{cioè nel nostro caso} \qquad \frac{\Delta d}{d} = \frac{15}{55} \cdot \frac{14}{100} = 0{,}03818$$

vale a dire che, se il prezzo del bene succedaneo aumenta del 14%, la domanda del primo bene aumenta del 3,818%.

33 Considera la funzione di domanda di un dato bene che dipende dal prezzo p_1 del bene, dal prezzo p_2 di un secondo bene e dal reddito Y del consumatore secondo la relazione

$$d = 400 - 4p_1 - 0{,}8p_2 + 0{,}02Y$$

Determina:

a. le funzioni marginali rispetto alle diverse variabili presenti nella funzione di domanda; [−4; − 0,8; 0,02]

b. l'elasticità della domanda rispetto al prezzo del bene e rispetto al reddito del consumatore per $p_1 = 40$, $p_2 = 40$, $Y = 1\,500$; $[\varepsilon_{dp_1} = -0{,}672269;\ \varepsilon_{dY} = 0{,}12605]$

c. l'elasticità incrociata per gli stessi valori stabilendo poi il tipo di relazione che lega i due beni. $[\varepsilon_{dp_2} = -0{,}134454;$ complementari$]$

34 Considera la funzione di domanda di un dato bene che dipende dal prezzo p_1 del bene stesso, dal prezzo p_2 di un secondo bene e dal reddito Y del consumatore secondo la relazione

$$d = 600 - 3p_1 + 0{,}5p_2 + 0{,}02Y$$

Determina:

a. le funzioni marginali rispetto alle diverse variabili presenti nella funzione di domanda; [−3; 0,5; 0,02]

b. l'elasticità della domanda rispetto al prezzo del bene e rispetto al reddito del consumatore per $p_1 = 30$, $p_2 = 40$, $Y = 2000$; $[\varepsilon_{dp_1} = -0{,}15789;\ \varepsilon_{dY} = 0{,}070175]$

c. l'elasticità incrociata per gli stessi valori, stabilendo anche il tipo di relazione che lega i due beni. $[\varepsilon_{dp_2} = 0{,}035088$; succedanei]

d. Se il prezzo del secondo bene aumenta del 20% come varia la domanda del primo bene? [aumenta dello 0,70%]

35 La funzione di domanda di un dato bene dipende dal prezzo p_1 del bene, dal prezzo p_2 di un secondo bene e dal reddito Y del consumatore secondo la legge

$$d = 100 - 3p_1 + 0{,}4p_2 + 0{,}01Y$$

Determina:

a. le funzioni marginali rispetto alle diverse variabili presenti nella funzione di domanda; [−3; 0,4; 0,01]

b. l'elasticità della domanda rispetto al prezzo del bene e rispetto al reddito del consumatore per $p_1 = 50$, $p_2 = 70$, $Y = 3000$; $[\varepsilon_{dp_1} = -18{,}75;\ \varepsilon_{dY} = 3{,}75]$

c. l'elasticità incrociata per gli stessi valori stabilendo la relazione fra i due beni. $[\varepsilon_{dp_2} = 3{,}5$; succedanei]

d. Se il prezzo del secondo bene aumenta del 10%, come varia la domanda? Commenta la risposta. [aumenta del 35%]

36 La funzione di domanda di un dato bene dipende dal prezzo p_1 del bene, dal prezzo p_2 di un secondo bene e dal reddito Y del consumatore secondo la relazione

$$d = 200 - 6p_1 - 2p_2 + 0{,}5Y$$

Determina:

a. le funzioni marginali rispetto a ciascuna variabile presente nella funzione; [−6; – 2; 0,5]

b. l'elasticità della domanda rispetto al prezzo del bene, rispetto al reddito del consumatore e l'elasticità incrociata per $p_1 = 35$, $p_2 = 35$, $Y = 3500$; in che relazione sono i due beni? $[\varepsilon_{dp_1} = -0{,}1257;\ \varepsilon_{dY} = 1{,}047904;\ \varepsilon_{dp_2} = -0{,}041916$; complementari]

c. Se il prezzo del secondo bene aumenta dell'8%, come varia la domanda? [diminuisce dello 0,33%]

37 La funzione di domanda di un dato bene dipende dal prezzo p_1 del bene, dal prezzo p_2 di un secondo bene e dal reddito Y del consumatore secondo la legge

$$d = -0{,}8p_1^2 + 0{,}9p_2^2 + 0{,}3Y$$

Determina:

a. le funzioni marginali rispetto a ciascuna variabile presente nella funzione; $[-1{,}6p_1;\ 1{,}8p_2;\ 0{,}3]$

b. l'elasticità della domanda rispetto al prezzo del bene, rispetto al reddito del consumatore e l'elasticità incrociata per $p_1 = 60$, $p_2 = 80$, $Y = 5000$; in che relazione sono i due beni? $[\varepsilon_{dp_1} = -1{,}31057;\ \varepsilon_{dY} = 0{,}34247;\ \varepsilon_{dp_2} = 2{,}63014$; succedanei]

38 La funzione della domanda di un prodotto è data da:

$$d = 800 - 0{,}02p^2 + \sqrt{Y}$$

dove p indica il prezzo del prodotto e Y il reddito del consumatore.

Calcola:

a. la funzione marginale rispetto al prezzo e al reddito; $\left[-0{,}04p;\ \dfrac{1}{2\sqrt{Y}}\right]$

b. l'elasticità della domanda rispetto al prezzo e al reddito per $p = 100$ e $Y = 16000$. Commenta poi i risultati ottenuti. $[\varepsilon_{dp} = -0{,}55;\ \varepsilon_{dY} = 0{,}087]$

39 La funzione di domanda di un dato bene dipende dal prezzo p_1 del bene, dal prezzo p_2 di un secondo bene e dal reddito Y del consumatore secondo la relazione

$$d = 6000 - p_1^2 + 0{,}3p_2 + 0{,}06Y$$

Determina:

a. le funzioni marginali rispetto alle diverse variabili presenti nella funzione di domanda; [$-2p_1$; 0,3; 0,06]

b. l'elasticità della domanda rispetto al prezzo del bene e rispetto al reddito del consumatore nonché l'elasticità incrociata per $p_1 = 80$, $p_2 = 70$, $Y = 12000$ stabilendo anche in che relazione stanno i due beni. [$\varepsilon_{dp_1} = -37{,}53$; $\varepsilon_{dY} = 2{,}11$; $\varepsilon_{dp_2} = 0{,}061$; succedanei]

40 Una funzione di vendita di un certo prodotto è data da $z = (5000 - 8x)\sqrt[3]{y}$, dove x rappresenta il prezzo di vendita e y i costi di marketing. Determina la variazione delle vendite se si incrementa il prezzo tenendo fissi costi di marketing, oppure tenendo fisso il prezzo di vendita e incrementando quello di marketing nel caso in cui $x = 50€$ e $y = 10000€$. [$-172{,}35$; 3,303]

41 La funzione di domanda di un bene dipende dal prezzo p del bene, dal prezzo di altri due beni p_1, p_2 e dal reddito Y del consumatore secondo la relazione $d = 500 - p + \frac{3}{4}p_1 - \frac{2}{5}p_2 + 0{,}02Y$. Determina, in base all'elasticità incrociata, le relazioni tra il primo e secondo bene e tra il primo e terzo nel caso in cui sia $p = 25$, $p_1 = 13{,}30$, $p_2 = 12{,}50$, $Y = 1000$, dove i prezzi si intendono espressi in Euro. [$\varepsilon_{dp_1} = 0{,}02$; $\varepsilon_{dp_2} = -0{,}01$; primo e secondo bene succedanei; primo e terzo bene complementari]

LA FUNZIONE DI UTILITÀ MARGINALE E IL VINCOLO DI BILANCIO

Comprensione

42 Barra vero o falso.

L'utilità marginale:

a. è una funzione mai negativa V F

b. misura l'aumento della soddisfazione che deriva da un aumento del consumo di un bene V F

c. è una funzione decrescente V F

d. non si annulla mai. V F

43 Barra vero o falso.

a. In una mappa di indifferenza un particolare paniere non può appartenere a due curve diverse. V F

b. L'insieme di bilancio è l'area compresa tra gli assi cartesiani e il vincolo di bilancio. V F

c. L'insieme di bilancio è l'insieme di tutti i possibili panieri utili al consumatore. V F

d. Il vincolo di bilancio è espresso da un'equazione lineare. V F

Applicazione

44 **ESERCIZIO GUIDA**

Con un capitale di € 110, un consumatore vuole acquistare due beni; il primo ha un prezzo unitario di € 4 ed il secondo di € 6. La funzione di utilità stimata per i due beni è

$$U(x, y) = xy + x + y + 2$$

Quale quantità del primo bene e quale quantità del secondo bene egli può acquistare per avere massima utilità? Se il bilancio del consumatore aumenta di una unità, di quanto aumenta la sua utilità?

Dobbiamo determinare il massimo della funzione di utilità $U(x, y)$ con il vincolo di bilancio $4x + 6y = 110$, cioè semplificando $2x + 3y = 55$.
Per risolvere il problema utilizziamo le funzioni marginali e risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{U'_x}{U'_y} = \dfrac{p_x}{p_y} \\ p_x x + p_y y = C \end{cases}$$

Poiché $\quad U'_x = y + 1 \qquad U'_y = x + 1 \qquad$ e $\qquad \dfrac{p_x}{p_y} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

risolviamo il sistema: $\begin{cases} \dfrac{y+1}{x+1} = \dfrac{2}{3} \\ 2x + 3y = 55 \end{cases} \qquad \to \qquad \begin{cases} x = 14 \\ y = 9 \end{cases}$

Per avere la massima utilità il consumatore deve acquistare 14 unità del primo bene e 9 del secondo.

45 Sia $U = 2xy + 400$ una funzione di utilità; determina la combinazione ottimale per avere la massima utilità con un vincolo di bilancio espresso dall'equazione $2x + y = 100$. $[x = 25; \ y = 50]$

46 Con un capitale di € 97 un consumatore vuole acquistare due beni del prezzo rispettivamente di € 4 e di € 5. La funzione di utilità stimata per i due beni è $U(x, y) = (x + 2) \cdot (y + 3)$. Quale quantità di ciascun bene egli deve acquistare per avere massima utilità? $[x = 13; \ y = 9]$

47 Con un capitale di € 100 un consumatore vuole acquistare due beni; il primo ha un prezzo di € 10, il secondo di € 20. La funzione di utilità stimata per i due beni è $U(x, y) = xy$. Quale quantità di ciascun bene egli deve acquistare per avere massima utilità? $\left[x = 5; \ y = \dfrac{5}{2}\right]$

48 Con un capitale di € 3000 un consumatore vuole acquistare due beni il primo dei quali ha un prezzo di € 20 e il secondo di € 30. Se la sua funzione di utilità è $U(x, y) = 10^{-3}(x + xy + y)$, determina quale quantità del primo bene e quale quantità del secondo egli deve acquistare per avere massima utilità. $[x \approx 75, \ y \approx 49]$

49 Un consumatore, con un capitale di € 240, vuole acquistare due beni i cui prezzi sono rispettivamente di € 20 e di € 40. La funzione di utilità stimata per i due beni è $U(x, y) = 10 + xy$.

a. Quale quantità del primo bene e quale quantità del secondo bene egli deve acquistare per avere massima utilità? $[x = 6; \ y = 3]$

b. Se il bilancio del consumatore aumenta di una unità, di quanto aumenta la sua utilità? [0,15]

50 Un consumatore, con un capitale di € 5000, vuole acquistare due beni i cui prezzi sono rispettivamente di € 2 e di € 1;

a. se la sua funzione di utilità è $U(x, y) = \dfrac{xy}{1000}$, quale quantità dei due beni egli deve acquistare per avere massima utilità? $[x = 1250; \ y = 2500]$

b. Se il bilancio del consumatore aumenta di una unità, di quanto aumenta l'utilità? [1,25]

51 Un consumatore deve acquistare due beni che devono sottostare al vincolo di bilancio rappresentato dalla relazione $x + 5y = 60$; la funzione di utilità stimata per i due beni è $U(x, y) = x + xy$. Quale quantità di ciascun bene deve acquistare per avere massima utilità? $[x = 32{,}5; \ y = 5{,}5]$

52 Un consumatore vuole rendere massima la sua utilità che stima essere data dall'equazione $U(x, y) = 100 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ acquistando due beni i cui prezzi sono rispettivamente € 9 e € 4.

a. Se per l'acquisto ha disposizione un capitale di € 3600, quale quantità dei due beni dovrà acquistare? [$x = 240$; $y = 360$]

b. Se il prezzo del primo bene aumentasse di € 7 come sarebbe il nuovo paniere? [$x = 150$; $y = 300$]

53 Un consumatore dispone di un reddito di € 11250 da destinare all'acquisto di due beni del prezzo di € 30 e di € 15 rispettivamente. Sapendo che la sua funzione di utilità è data dalla relazione $U(x, y) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y}$, determina il paniere di consumo che rende massima l'utilità. [$x \approx 361$; $y \approx 19$]

54 La funzione di utilità di un consumatore è data da $U(x, y) = x^2 y$ e il reddito da destinare all'acquisto dei due beni, i cui prezzi sono rispettivamente di € 1 e di € 5, è di € 1500. Calcola il paniere ottimale e quello che rende massima la funzione di utilità, nell'ipotesi che il prezzo del secondo bene aumenti di € 8. [$x = 1000$, $y = 100$; $x = 1000$, $y = 62{,}5$]

ECONOMETRIA E MODELLI ECONOMETRICI

Comprensione

55 L'econometria si occupa di:
a. studiare i consumi di una popolazione;
b. studiare i processi economici applicando modelli matematici teorici;
c. studiare i processi economici utilizzando modelli matematici con metodi statistici;
d. redigere tabelle statistiche di dati economici.

56 Per studiare un fenomeno di tipo economico si devono affrontare i passi elencati di seguito. Mettili nell'ordine temporale di esecuzione.
a. Raccolta dei dati.
b. Stima dei parametri del modello econometrico.
c. Utilizzo del modello per verificare ipotesi o fare previsioni.
d. Formulazione di una teoria e specificazione del modello che la rappresenta.
e. Verifica della bontà del modello.

Applicazione

57 La seguente tabella riporta il reddito annuo netto, espresso in migliaia di euro, di un campione di 5 persone e le spese dedicate agli hobbies.

Reddito	14	20	24	35	42
Spese per hobbies	0,5	0,8	1,5	1,9	3,4

Dopo aver rappresentato graficamente i dati e supponendo un modello teorico lineare, trova la retta di regressione e testa la corrispondenza del modello scelto. [$Y = 0{,}096X - 0{,}975$; $\rho = 0{,}959$]

58 Sono stati raccolti i dati relativi alla domanda di un bene in funzione del prezzo di vendita:

Prezzo (in euro)	15,8	16,4	16,8	17,5	18,0	18,5	20
Domanda	2000	1985	1800	1750	1680	1500	1200

Scrivi l'equazione del possibile modello teorico lineare, determinando anche il grado di accostamento dei dati. [$Y = -195{,}33X + 5134{,}38$; $\rho = -0{,}985$]

59 Si sono rilevati i dati relativi alle spese in investimenti e gli utili di esercizio, in migliaia di euro, di un gruppo di aziende:

Spese investimenti	50	60	65	70	80	88	92
Utile esercizio	425	460	580	490	520	625	600

Rappresenta graficamente i dati, determina l'equazione del modello lineare che si suppone rappresenti il fenomeno e valuta la corrispondenza del modello scelto con i dati. [$Y = 4{,}08X + 233{,}92$; $\rho = 0{,}829$]

60 Sono stati raccolti i seguenti dati relativi a reddito e spesa complessiva annua per le vacanze (in migliaia di euro) di un campione di famiglie italiane; i dati raccolti sono indicati nella seguente tabella:

classe di reddito	spese delle famiglie				
0-20	2,5	1,8	2,4	2,2	1,5
20-40	3,2	2,8	2,6	3,0	3,2
40-50	4,6	4,2	3,8	4,6	5,0
50-60	4,8	5,2	3,9	4,0	4,5
60-70	5,0	4,6	5,2	6,1	5,8
70-80	5,6	5,8	6,4	6,8	7,0

Dopo aver valutato la spesa media di ciascuna classe di reddito, calcola la retta di regressione e valuta la corrispondenza del modello scelto con i dati. [$Y = 0{,}064X + 1{,}284$; $\rho = 0{,}986$]

Soluzioni esercizi di comprensione.

1 **a.** **2** f'_x : **a.**; f'_y : **d.** **24** **d.** **25** **a.** **26** **c.**

42 **a.** V, **b.** V, **c.** V, **d.** F **43** **a.** V, **b.** V, **c.** F, **d.** V **55** **c.**