Le dimostrazioni dei teoremi sulle isometrie

Teorema. Ogni isometria trasforma una retta in una retta.

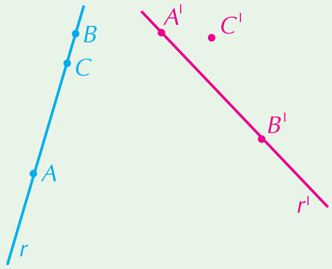
Dimostrazione.

Data una retta r, consideriamo su di essa due punti A e B (***figura 1***). Sia A' il trasformato di A e B' il trasformato di B nell'isometria f; i punti A' e B' individuano una retta r'. Vogliamo dimostrare che r' è la trasformata di r e per fare ciò dobbiamo mostrare che, preso un punto C su r, il suo trasformato C' si trova su r', cioè che se $f(C) = C'$, allora $C' \in r'$.

Consideriamo dunque un punto C su r e supponiamo per assurdo che C' non sia su r'; i punti A', B', C' individuano un triangolo per i lati del quale vale la relazione

$$A'B' < A'C' + C'B'$$

Figura 1



Su r invece si ha che $AB \cong AC + CB$

Ma, essendo f un'isometria, valgono le relazioni $AB \cong A'B'$ $\quad AC \cong A'C'$ $\quad CB \cong C'B'$

e quindi $A'B' \cong A'C' + C'B'$

Confrontando le relazioni scritte si ottiene che $A'B' < A'C' + C'B'$

e contemporaneamente $A'B' \cong A'C' + C'B'$

Siamo così giunti ad un assurdo e dobbiamo concludere che C' deve trovarsi su r'. Allora una isometria trasforma una retta in una retta. ◀

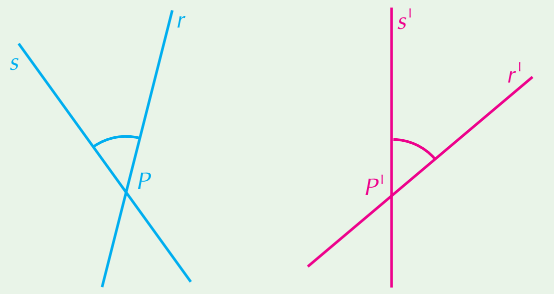
Teorema. In ogni isometria, a rette incidenti corrispondono rette incidenti e a rette parallele corrispondono rette parallele.

Dimostrazione.

Data un'isometria f e due rette incidenti r e s, sia $r' = f(r)$ e $s' = f(s)$ (***figura 2a***); vogliamo dimostrare che anche r' e s' sono incidenti.

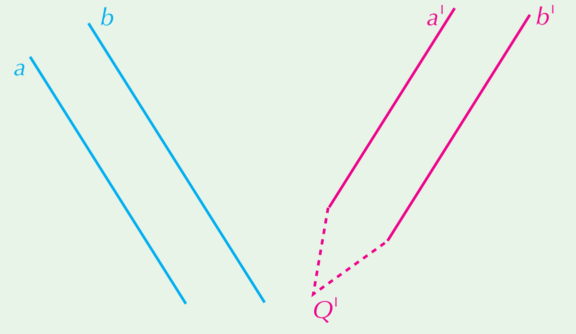
Il punto P, intersezione di r e s, ha come trasformato un punto P', cioè $P' = f(P)$. Poiché un'isometria trasforma una retta in una retta, se $P \in r$ anche $P' \in r'$; per lo stesso motivo, se $P \in s$ anche $P' \in s'$. Quindi P' è l'intersezione di r' e s' e perciò anche le due rette trasformate sono incidenti.

Figura 2a



Dimostriamo la seconda parte del teorema e consideriamo questa volta due rette a e b parallele; siano a' e b' le loro trasformate nell'isometria f; vogliamo dimostrare che anche a' e b' sono parallele. Supponiamo per assurdo che a' e b' si intersechino in un punto Q' (***figura 2b***); la controimmagine di Q', cioè il punto Q che ha per trasformato Q', apparterrebbe allora sia ad a che a b, Q sarebbe cioè il punto di intersezione di a e b. Ciò contrasta con l'ipotesi che a sia parallela a b e dobbiamo quindi concludere che anche $a' \parallel b'$. ◀

Figura 2b



Teorema. Ogni isometria trasforma un triangolo in un triangolo ad esso congruente.

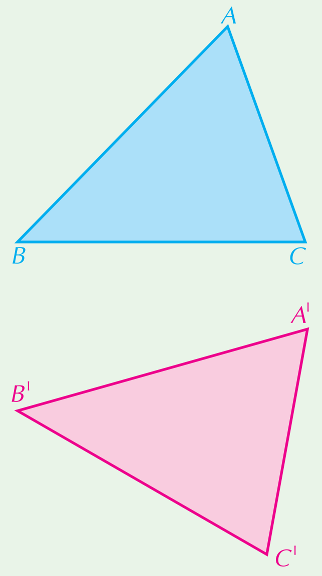
Dimostrazione.

Sia ABC un triangolo e siano A', B', C' i punti trasformati dei vertici A, B, C nell'isometria f (***figura 3***); vogliamo dimostrare che i triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti. Osserviamo allora che, per definizione di isometria:

$$AB \cong A'B' \qquad AC \cong A'C' \qquad BC \cong B'C'$$

quindi i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio di congruenza. ◀

Figura 3



Teorema. Ogni isometria trasforma un angolo in un angolo ad esso congruente.

Dimostrazione.

Sia $\widehat{ab}$ un angolo di vertice V e siano a' e b' le semirette trasformate rispettivamente di a e di b nell'isometria f. Poiché a e b si intersecano in V, anche a' e b' si intersecano in un punto V' che è il trasformato di V; vogliamo dimostrare che l'angolo $\widehat{ab}$ è congruente all'angolo $\widehat{a'b'}$ (***figura 4***).

Prendiamo allora un punto A su a ed un punto B su b e siano A' e B' i trasformati di tali punti; per i teoremi dimostrati in precedenza, $A' \in a'$ e $B' \in b'$. Si vengono così a determinare i due triangoli AVB e $A'V'B'$ che sono congruenti perché si corrispondono nell'isometria f; di conseguenza $\widehat{ab} \cong \widehat{a'b'}$. ◀

Figura 4