Cap 1. LE EQUAZIONI

Rivedi la teoria

Identità ed equazioni

L'uguaglianza fra due espressioni algebriche può essere verificata:

- per qualsiasi valore attribuito alle variabili e in questo caso si parla di **identità**
- solo per particolari valori attribuiti alle variabili e in questo caso si parla di **equazione**.

Risolvere un'equazione significa trovare i valori delle variabili che verificano l'uguaglianza; tali valori si dicono *soluzioni* o *radici* dell'equazione.
Per esempio:

- $(x+1)^2 - 2x = x^2 + 1$
  è un'identità perché il secondo membro non è altro che lo sviluppo del primo e quindi l'uguaglianza è sempre vera
- $3x - 2 = x^2$
  è un'equazione perché l'uguaglianza non sussiste per tutti i valori di x ma solo per qualcuno; per esempio:
  se $x = -2$ si ottiene $-6 - 2 = 4$ che è Falsa
  se $x = 1$ si ottiene $3 - 2 = 1$ che è Vera.

Equazioni equivalenti

Due equazioni si dicono **equivalenti** se le soluzioni della prima sono anche soluzioni della seconda e viceversa.
Per risolvere un'equazione si cerca di passare da un'equazione ad un'altra ad essa equivalente ma di minore complessità; le operazioni consentite per effettuare questi passaggi sono immediata conseguenza di due teoremi che prendono il nome di *principi di equivalenza*.

- **Primo principio.** Se si aggiunge o si toglie ad entrambi i membri di un'equazione una stessa espressione (avente lo stesso dominio dell'equazione) si ottiene un'equazione equivalente a quella data.
- **Secondo principio.** Se si moltiplicano o si dividono entrambi i membri di un'equazione per una stessa espressione (avente lo stesso dominio dell'equazione), *diversa da zero*, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Questi principi consentono di:

- spostare un termine da una parte all'altra dell'uguale cambiandogli segno:
  $3x - 5 = 2 \quad \rightarrow \quad 3x = 2 + 5$
- eliminare i termini uguali che si trovano in entrambi i membri dell'equazione:
  $5x - 4 + \cancel{2x^2} = 3 + \cancel{2x^2} \quad \rightarrow \quad 5x - 4 = 3$

- cambiare segno a tutti i termini di un'equazione:

  $-6x - 2 = -1 + 2x \qquad \rightarrow \qquad 6x + 2 = 1 - 2x$

- dividere tutti i termini dell'equazione per un fattore comune:

  $9x^2 - 6 = 12 + 3x \qquad \rightarrow \qquad 3x^2 - 2 = 4 + x$

- passare da un'equazione a coefficienti frazionari ad una a coefficienti interi moltiplicando per il *m.c.m.* fra tutti i denominatori:

$$\frac{x-1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} - 2x \qquad \rightarrow \qquad \cancel{6} \cdot \frac{3(x-1)+2}{\cancel{6}} = \frac{5-12x}{\cancel{6}} \cdot \cancel{6} \qquad \rightarrow \qquad 3(x-1)+2 = 5-12x$$

La classificazione delle equazioni

In genere l'incognita di un'equazione si indica con la lettera x; tutte le altre lettere che eventualmente compaiono, salvo diversa specificazione, sono dei parametri. Con questa convenzione diciamo che un'equazione è:

- *intera* se la x non compare in nessun denominatore;
- *frazionaria* se la x compare anche in un solo denominatore;
- *numerica* se non ci sono parametri;
- *letterale* se ci sono parametri.

Per esempio:

- $\dfrac{3x-5}{4} = 2x + x^2$ è numerica intera
- $\dfrac{x+a}{b} - 1 = 2ax$ è letterale intera
- $\dfrac{x-1}{x} = 3x + \dfrac{1}{x-1}$ è numerica frazionaria
- $\dfrac{2-ax}{x} - \dfrac{1}{x-a} = 1$ è letterale frazionaria

Un'ulteriore classificazione si può fare in base al numero di soluzioni; si dice che un'equazione è:

- *determinata* se ha un numero finito di soluzioni
- *indeterminata* se ha infinite soluzioni
- *impossibile* se non ha soluzioni.

Il grado delle equazioni

Ogni equazione intera, trasportando tutti i termini al primo membro e svolgendo i calcoli, si può scrivere nella forma $E(x) = 0$.
Il grado del polinomio $E(x)$ è anche il **grado** dell'equazione.
Per esempio:

- $4x - 7 = 0$ è un'equazione di primo grado (si chiama anche equazione lineare)
- $6x^2 - 5x + 1 = 0$ è un'equazione di secondo grado
- $5x - 4x^3 + 3 = 0$ è un'equazione di terzo grado.

Un'equazione di primo grado determinata ammette sempre una soluzione reale; se, applicando i principi di equivalenza, si arriva a scrivere l'equazione nella forma $x = k$, si può dire che k è la soluzione.

La risoluzione delle equazioni di primo grado

Per risolvere un'equazione di primo grado: $3x - 5 = 7x - 4$

© Re Fraschini - Grazzi, Atlas SpA

- si trasportano i termini che contengono l'incognita al primo membro e quelli che non la contengono al secondo:
  $3x - 7x = 5 - 4 \qquad \rightarrow \qquad -4x = 1$
- se il coefficiente di x non è nullo, si dividono entrambi i membri per tale coefficiente:
  $\dfrac{-4x}{-4} = \dfrac{1}{-4} \qquad \rightarrow \qquad x = -\dfrac{1}{4}$

La procedura è diversa se il coefficiente di x è nullo. In questo caso:

- se anche il termine noto è nullo, l'equazione è indeterminata perché quella che si ottiene è un'uguaglianza vera per qualsiasi valore di x;
- se il termine noto non è nullo, l'equazione è impossibile perché quella che si ottiene è un'uguaglianza falsa per qualsiasi valore di x.

Per esempio:

- $x - 2 = 3x + 1 \quad \rightarrow \quad x - 3x = 1 + 2 \quad \rightarrow \quad -2x = 3 \quad \rightarrow \quad \dfrac{-2x}{-2} = \dfrac{3}{-2} \quad \rightarrow \quad x = -\dfrac{3}{2}$
  l'equazione è determinata con soluzione $-\dfrac{3}{2}$
- $4x + 1 = 4(x - 2) \quad \rightarrow \quad 4x + 1 = 4x - 8 \quad \rightarrow \quad 4x - 4x = -8 - 1 \quad \rightarrow \quad 0 \cdot x = -9$
  l'equazione è impossibile perché non esiste alcun x che moltiplicato per 0 dia per risultato -9
- $3(2x + 5) = 6x + 15 \quad \rightarrow \quad 6x + 15 = 6x + 15 \quad \rightarrow \quad 6x - 6x = 15 - 15 \quad \rightarrow \quad 0 \cdot x = 0$
  l'equazione è indeterminata perché qualsiasi valore di x moltiplicato per 0 dà come risultato 0.

Fai gli esercizi

Risolvi le seguenti equazioni numeriche intere.

1 $\dfrac{x-5}{4} + 3 = 4 + \dfrac{3-x}{2}$; $\quad \dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{x-3}{8} - 2 = \dfrac{11x-19}{16}$ $\quad [S = \{5\};\ S = \{-3\}]$

2 $\dfrac{1}{2}(x+1)^2 - (2x-3) = \dfrac{1}{2}(x^2 + 7 - 2x)$; $\quad 6x - \dfrac{1}{4}(2x+1) - 1 = \dfrac{1}{2}\left(11x - \dfrac{1}{2}\right)$ $\quad [S = R;\ S = \varnothing]$

3 $\dfrac{4-x}{6} - (x+2)^2 = \dfrac{1}{6}(x-3) - (x-2)^2$; $\quad \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{1}{4}x + 1 = -2x$ $\quad \left[S = \left\{\dfrac{7}{50}\right\};\ S = \{0\}\right]$

4 $\dfrac{6x-9}{18} - \dfrac{3x-6}{6} = \dfrac{1-2x}{3}$; $\quad \dfrac{x+2}{4} - \dfrac{1}{2}(1-2x) = x - \dfrac{3x-4}{2}$ $\quad \left[S = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\};\ S = \left\{\dfrac{8}{7}\right\}\right]$

5 $-2x(x^2-1) - \dfrac{x+2}{2} = -2x^3 + 4(x+1)$; $\quad \dfrac{3(x-2)}{5} + \dfrac{2(x-1)}{10} = \dfrac{x-4}{2}$ $\quad [S = \{-2\};\ S = \{-2\}]$

6 $\dfrac{4x+3}{2} - \dfrac{2(x-1)}{3} = 2 + x$; $\quad \dfrac{3(x+1)}{2} - \dfrac{5x-1}{3} = x - 2$ $\quad \left[S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\};\ S = \left\{\dfrac{23}{7}\right\}\right]$

7 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-1}{3} + \dfrac{2x+4}{2} - 1\right) + x = 3(x-1) - 2\left(x - 1 + \dfrac{x+1}{3}\right)$ $\quad \left[S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}\right]$

8 $x + \dfrac{3}{2}\left(-x - \dfrac{2x+4}{5}\right) = 1 - \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{2-x}{5} + 2\right)$ $\quad \left[S = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni numeriche frazionarie.

9 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\frac{3x+4}{x} - \frac{x-2}{x-1} = 2$$

Quando l'equazione è frazionaria, cioè l'incognita compare anche al denominatore, si devono porre le condizioni di esistenza di ogni frazione ed escludere quindi dal dominio quei valori di x che annullano i denominatori. Nel nostro caso dobbiamo chiedere che sia:

$$x \neq 0 \quad \wedge \quad x-1 \neq 0 \qquad \text{cioè} \qquad x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 1$$

Non si possono quindi eventualmente accettare come soluzioni i valori 0 e 1.
Per risolvere l'equazione facciamo il denominatore comune:

$$\frac{(x-1)(3x+4) - x(x-2)}{x(x-1)} = \frac{2x(x-1)}{x(x-1)}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per tale denominatore (che non è nullo per le condizioni poste) e trasformiamo l'equazione in forma intera:

$$\cancel{x(x-1)} \cdot \frac{(x-1)(3x+4) - x(x-2)}{\cancel{x(x-1)}} = \frac{2x(x-1)}{\cancel{x(x-1)}} \cdot \cancel{x(x-1)}$$

$3x^2 + 4x - 3x - 4 - x^2 + 2x = 2x^2 - 2x \quad \rightarrow \quad \cancel{2x^2} + 3x - 4 = \cancel{2x^2} - 2x$

$3x + 2x = 4 \quad \rightarrow \quad 5x = 4 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4}{5}$

Poichè il valore trovato di x non coincide con nessuno di quelli esclusi dal dominio, la soluzione è accettabile ed è $S = \left\{\frac{4}{5}\right\}$.

10 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\frac{2}{3x} + \frac{4}{x+1} = \frac{2+x}{3x^2+3x}$$

Scomponiamo il terzo denominatore: $\frac{2}{3x} + \frac{4}{x+1} = \frac{2+x}{3x(x+1)}$

Condizioni di esistenza: $x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq -1$

Procediamo come nel caso precedente:

$$\cancel{3x(x+1)} \cdot \frac{2(x+1) + 12x}{\cancel{3x(x+1)}} = \frac{2+x}{\cancel{3x(x+1)}} \cdot \cancel{3x(x+1)}$$

$2x + \cancel{2} + 12x = \cancel{2} + x \quad \rightarrow \quad 13x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

Questa volta il valore trovato coincide con uno di quelli esclusi dal dominio e non è pertanto accettabile; l'equazione non ha quindi soluzioni ed è $S = \varnothing$.

11 $\frac{x-3}{x-2} - \frac{x+2}{x-1} = \frac{-5}{x^2-3x+2}$; $\quad \frac{3}{x^2-4} - \frac{x-1}{2-x} = \frac{x+1}{x+2}$ $\quad \left[S = \{3\};\ S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}\right]$

12 $\frac{2x-1}{x+2} + \frac{6}{x^2+5x+6} = \frac{2x}{x+3}$; $\quad \frac{4-x}{x-3} - \frac{x}{x-2} + 1 = \frac{3-x^2}{x^2-5x+6}$ $\quad \left[S = \varnothing;\ S = \left\{\frac{5}{4}\right\}\right]$

13 $\frac{2}{x} + \frac{4}{x+3} = 0$; $\quad \frac{x}{x+1} = \frac{3x}{x^2-1} - 1 + \frac{4x-7}{2x-2}$ $\quad [S = \{-1\};\ S = \varnothing]$

© Re Fraschini - Grazzi, Atlas SpA

14 $\dfrac{2}{3x+3} = \dfrac{6}{2x+2} - \dfrac{x-2}{x^2+x}$ $\quad\quad$ $\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}$ $\quad\quad$ $\left[S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}; S = \left\{\dfrac{28}{5}\right\}\right]$

15 $\dfrac{1}{2x-3} + \dfrac{4x-7}{2x^2-5x+3} = \dfrac{3}{x-1}$ $\quad\quad$ $\dfrac{4}{2x-1} - \dfrac{3}{3+x} = 0$ $\quad\quad$ $\left[S = \varnothing; S = \left\{\dfrac{15}{2}\right\}\right]$

Risolvi e discuti le seguenti equazioni letterali.

16 **ESERCIZIO GUIDA**

Quando **l'equazione è letterale**, è necessario discutere cosa accade al variare del parametro; osserva l'esempio.

$3(a-1)x = (a-1)^2$ $\quad\quad$ L'equazione ha dominio R.

Per trovare la soluzione dobbiamo dividere entrambi i membri per $3(a-1)$ e dobbiamo essere sicuri che questo fattore sia diverso da zero; poiché 3 è un valore noto (e non è zero), dobbiamo analizzare solo il binomio $a-1$ distinguendo i seguenti casi:

- se $a-1 \neq 0$ cioè $a \neq 1$ dividendo otteniamo $x = \dfrac{(a-1)^{\cancel{2}}}{3\cancel{(a-1)}}$ cioè $x = \dfrac{a-1}{3}$
- se $a-1=0$ cioè $a=1$ non possiamo dividere; sostituiamo allora 1 al posto di a nell'equazione ottenendo $3(1-1)x = (1-1)^2$ cioè $0 \cdot x = 0$; l'equazione è quindi indeterminata.

Riassumendo abbiamo che: se $a \neq 1$ allora $S = \left\{\dfrac{a-1}{3}\right\}$; se $a=1$ allora $S = R$.

17 $b(x-2) - 1 = b + 3$ $\quad\quad$ $\left[b \neq 0\text{: } S = \left\{\dfrac{3b+4}{b}\right\}; b = 0\text{: } S = \varnothing\right]$

18 $2ax = 5 - 2x$ $\quad\quad$ $\left[a \neq -1\text{: } S = \left\{\dfrac{5}{2(a+1)}\right\}; a = -1\text{: } S = \varnothing\right]$

19 $2(a-x) = a(x+1)$ $\quad\quad$ $\left[a \neq -2\text{: } S = \left\{\dfrac{a}{2+a}\right\}; a = -2\text{: equazione impossibile, } S = \varnothing\right]$

20 $\dfrac{x(2b+3)+b}{4} - \dfrac{x-b}{8} = \dfrac{x-3}{2}$ $\quad\quad$ $\left[b \neq -\dfrac{1}{4}\text{: } S = \left\{-\dfrac{3(4+b)}{4b+1}\right\}; b = -\dfrac{1}{4}\text{: equazione impossibile, } S = \varnothing\right]$

21 $2x = \dfrac{5-2x}{a}$ $\quad\quad$ $\left[a \neq 0 \wedge a \neq -1\text{: } S = \left\{\dfrac{5}{2(a+1)}\right\}; a = 0\text{: equazione perde significato; } a = -1\text{: } S = \varnothing\right]$

(Suggerimento: il dominio dell'equazione è R ma, perché l'equazione abbia senso, devi porre la condizione $a \neq 0$)

22 $\dfrac{x}{2a} - \dfrac{2(2-x)}{4a} = 3(1-x)$ $\quad\quad$ $\left[a = 0\text{: equazione perde significato; } a \neq -\dfrac{1}{3} \ \wedge \ a \neq 0\text{: } S = \{1\}; a = -\dfrac{1}{3}\text{: } S = R\right]$

23 $\dfrac{8-5x}{6} - \dfrac{x}{a} + 1 = 2 - x$ $\quad\quad$ $\left[a = 0\text{: equazione perde significato; } a \neq 6 \ \wedge \ a \neq 0\text{; } S = \left\{\dfrac{2a}{6-a}\right\}; a = 6\text{: } S = \varnothing\right]$

24 **ESERCIZIO GUIDA**

$\dfrac{x-a}{x-2} = \dfrac{1}{a-1}$

Si tratta di un'equazione letterale frazionaria. Dobbiamo distinguere le condizioni sul parametro dalle condizioni per l'incognita:

- per quanto riguarda il parametro deve essere: $\quad a \neq 1$
- per quanto riguarda l'incognita deve essere: $\quad x \neq 2$.

Procediamo come negli altri casi e riduciamo l'equazione alla forma intera:

$$\frac{(x-a)(a-1)}{(x-2)(a-1)} = \frac{x-2}{(x-2)(a-1)}$$

$ax - x - a^2 + a = x - 2 \quad \rightarrow \quad ax - 2x = a^2 - a - 2 \quad \rightarrow \quad (a-2)x = (a+1)(a-2)$

Procediamo alla discussione:

- se $a \neq 2$ l'equazione ha soluzione $x = \dfrac{(a+1)(a-2)}{a-2} \quad \rightarrow \quad x = a+1$
- se $a = 2$ l'equazione diventa $0 \cdot x = 3 \cdot 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0$ quindi è indeterminata

La soluzione trovata è accettabile se è diversa da 2 (valore escluso dal dominio dell'equazione):

$a + 1 \neq 2 \quad \rightarrow \quad a \neq 1$ condizione già posta inizialmente

In definitiva $S = \{a+1\}$ solo se $a \neq 1 \wedge a \neq 2$.

Quando $a = 1$ l'equazione perde significato; quando $a = 2$, $S = R$.

25 $\dfrac{2a-1}{x-a} + \dfrac{a+1}{x+a} = \dfrac{a^2+a}{x^2-a^2}$ $[a \neq 0 \;\wedge\; a \neq \pm 1 : S = \{1\};\; a = 0 : S = R - \{0\};\; a = \pm 1 : S = \varnothing]$

26 $\dfrac{2a^2-2x}{x^2-a^2} + \dfrac{1-2x}{x-a} + \dfrac{1+2x}{a+x} = 0$ $\left[a \neq 0 : S = \left\{\dfrac{1}{2}a\right\};\; a = 0 : S = R - \{0\}\right]$

27 $\dfrac{a}{x+2} + \dfrac{3a}{x-2} = \dfrac{4a(a+2)}{x^2-4}$
$[a \neq 0 \;\wedge\; a \neq 1 \;\wedge\; a \neq -3 : S = \{a+1\};\; a = 0 : S = R - \{-2,\; +2\};\; a = 1 \;\vee\; a = -3 : S = \varnothing]$

Rivedi la teoria

Equazioni e problemi

In un problema ci viene sostanzialmente chiesto di trovare il valore di qualche elemento avendo a disposizione alcune informazioni assegnate sotto forma di *dati*. Quando non è possibile rispondere alle domande deducendo le risposte direttamente dai dati, è di solito conveniente servirsi di incognite.
In genere si indica con x un elemento non noto del problema, si riscrivono i dati in funzione di x e si cerca di arrivare a un'equazione che permetta di ricavare il valore di x.
Vediamo un esempio.

Giuseppe è diventato padre per la prima volta all'età di 32 anni; due anni dopo è nato il secondo figlio e oggi i due figli hanno complessivamente 34 anni. Quanti anni ha Giuseppe?
Scriviamo e interpretiamo i dati:

- Se Giuseppe è diventato padre del primo figlio a 32 anni, oggi ha 32 anni più l'età del primo figlio.
- Dopo due anni è nato il secondo figlio e oggi i due figli insieme hanno 34 anni.

Se allora indichiamo con x l'età del primo figlio, il secondo, che è nato due anni dopo, ne ha $x - 2$ e sappiamo che la loro somma è 34; possiamo quindi scrivere l'equazione:

$x + (x-2) = 34$ la cui soluzione è $x = 18$

Poichè il valore trovato di x è compatibile con il problema (x rappresenta un'età e deve quindi essere un numero positivo), possiamo concludere che il primo figlio ha 18 anni e il secondo ne ha 16.

 © Re Fraschini - Grazzi, Atlas SpA

Il problema però chiede l'età di Giuseppe, quindi avere trovato il valore di x non ha ancora risolto il problema. Possiamo tuttavia dire che, in base al primo dato, Giuseppe ha $18 + 32 = 50$ anni.

La risoluzione di questo problema mette in evidenza che, anche se ognuno può trovare strade diverse per rispondere alle domande, tuttavia alcuni passi sono necessari per essere sicuri di giungere alla soluzione. Possiamo sintetizzarli in un elenco:

- scrivere le informazioni che si possono ricavare dal problema, eventualmente interpretandole;
- scegliere l'incognita e determinare il suo dominio che deve essere compatibile con il problema;
- scrivere l'equazione che permette di ricavare il valore dell'incognita, tenendo conto dei dati e di eventuali teoremi se si tratta di un problema di geometria;
- risolvere l'equazione e accertarsi che il valore trovato sia accettabile;
- trovare ciò che il problema chiede perché, spesso, il dato richiesto non coincide con l'incognita scelta.

Fai gli esercizi

28 Un club sportivo acquista uno stock di magliette e tute per i propri atleti spendendo in tutto € 2450; se ciascuna maglietta costa € 12 e ciascuna tuta costa € 25, quante magliette e quante tute sono state acquistate se in tutto ci sono 150 capi? [100 magliette e 50 tute]

29 Da un magazzino sono state prelevati i $\frac{5}{12}$ della merce che conteneva; successivamente si sono utilizzati i $\frac{3}{4}$ di ciò che era rimasto in modo che alla fine si sono avanzate 448 unità di merce. Quante unità di merce c'erano nel magazzino prima dei due prelievi? [3072]

30 Un numero è il quadruplo di un altro numero; aggiungendo 8 al più grande e sottraendo 7 al più piccolo moltiplicato per 7 si ottengono valori uguali. Quali sono i due numeri? [5; 20]

31 Ad ogni anniversario di matrimonio Andrea regala a sua moglie delle rose, e ogni anno gliene regale due in più del precedente, tranne gli ultimi due anni nei quali le ha regalato esattamente un numero di rose pari al doppio degli anni di matrimonio. Se quest'anno hanno festeggiato i 10 anni di matrimonio e complessivamente Andrea ha regalato 142 rose, da quante rose era composto il mazzo del primo anniversario? [6]

32 In un rettangolo la base diminuita dei $\frac{2}{5}$ dell'altezza vale 10cm mentre il perimetro è 48cm. Calcola l'area del rettangolo. [140cm^2]

33 Il perimetro di un trapezio isoscele è 200cm; di esso si sa inoltre che la somma della base maggiore con il triplo del lato obliquo misura 230cm e che il lato obliquo supera di 10cm il doppio della base minore. Calcola la misura dei lati del trapezio. [20cm; 80cm; 50cm]

Cap 2. Le disequazioni

Rivedi la teoria

Le disuguaglianze numeriche

Una disuguaglianza fra due numeri a e b esprime la condizione che a possa essere maggiore oppure minore di b e si scrive rispettivamente

$$a > b \qquad \text{oppure} \qquad a < b$$

Le disuguaglianze godono di diverse proprietà, le più importanti delle quali si possono così sintetizzare:

- se ai due membri di una disuguaglianza si addiziona (o si sottrae) uno stesso numero, si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso:

  $a > b \qquad \rightarrow \qquad a + c > b + c$

- se si moltiplicano (o si dividono) i due membri di una disuguaglianza per uno stesso numero positivo si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso:

  $a > b \quad \wedge \quad c > 0 \qquad \rightarrow \qquad ac > bc$

- se si moltiplicano (o si dividono) i due membri di una disuguaglianza per uno stesso numero negativo si ottiene una disuguaglianza di verso opposto:

  $a > b \quad \wedge \quad c < 0 \qquad \rightarrow \qquad ac < bc$

- come nelle equazioni, non si può invece moltiplicare o dividere per zero.

Per esempio, dalla relazione $15 > 3$ si deducono le seguenti:

- sommando ad entrambi i membri -6 : $\quad 15 - 6 > 3 - 6 \quad \rightarrow \quad 9 > -3$
- moltiplicando entrambi i membri per 2 : $\quad 15 \cdot 2 > 3 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad 30 > 6$
- dividendo entrambi i membri per -3 : $\quad \frac{15}{-3} < \frac{3}{-3} \quad \rightarrow \quad -5 < -1$

Le disequazioni

Se la disuguaglianza viene stabilita fra due espressioni funzioni nella stessa variabile, si parla di **disequazione**; è per esempio una disequazione una relazione del tipo:

$$3x - 4 > \frac{1}{2}x + 6$$

Risolverla significa trovare i valori di x per i quali l'espressione $3x - 4$ assume valori maggiori di $\frac{1}{2}x + 6$.

Le proprietà delle disuguaglianze si possono estendere alle disequazioni; esse diventano in questo modo i *principi di equivalenza* delle disequazioni.

- La disequazione $A(x) > B(x)$ è equivalente alla disequazione $A(x) + C(x) > B(x) + C(x)$ se $C(x)$ è un'espressione che ha lo stesso dominio della disequazione data.
- La disequazione $A(x) > B(x)$ è equivalente alla disequazione $k \cdot A(x) > k \cdot B(x)$ se k è un numero positivo.
- La disequazione $A(x) > B(x)$ è equivalente alla disequazione $k \cdot A(x) < k \cdot B(x)$ se k è un numero negativo.

Con una disequazione si possono quindi eseguire:

- le operazioni di trasporto di un termine da un membro all'altro come nelle equazioni cambiando segno a quel termine;
- le operazioni di divisione o moltiplicazione che permettono di semplificare la disequazione stessa, a patto di conoscere il segno del fattore per cui si deve semplificare: se tale fattore è positivo si lascia lo stesso verso nella disequazione, se è negativo si cambia il verso.

Le disequazioni intere

Una disequazione è intera se l'incognita si trova solo al numeratore e mai al denominatore.
Per risolvere una disequazione di questo tipo si segue una procedura analoga a quella delle equazioni, con

© Re Fraschini - Grazzi, Atlas SpA

la sola accortezza di cambiare il verso della disequazione quando si cambiano i segni ai due membri (perché equivale a moltiplicare per -1) o si divide per un numero negativo.

Vediamo come procedere su un esempio e risolviamo la disequazione $\dfrac{x-3}{2}+1<\dfrac{5}{2}x-\dfrac{2}{3}$.

Eseguiamo il denominatore comune: $\dfrac{3x-9+6}{6}<\dfrac{15x-4}{6}$

Moltiplichiamo per 6 ed eliminiamo il denominatore:

$$\cancel{6}\cdot\frac{3x-3}{\cancel{6}}<\frac{15x-4}{\cancel{6}}\cdot\cancel{6} \qquad \to \qquad 3x-3<15x-4$$

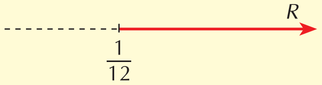
La disequazione ha mantenuto lo stesso verso perché abbiamo moltiplicato per un numero positivo.
Trasportiamo i termini in x al primo membro e i termini noti al secondo:

$$3x-15x<-4+3 \qquad \to \qquad -12x<-1$$

Cambiamo i segni moltiplicando per -1 e cambiamo quindi anche il verso: $12x>1$

Dividiamo entrambi i membri per 12 : $x>\dfrac{1}{12}$

Abbiamo così trovato l'intervallo delle soluzioni; la disequazione è verificata per tutti gli x che sono maggiori di $\dfrac{1}{12}$.



Fai gli esercizi

1 Data la disuguaglianza $\dfrac{1}{3}<2$, esegui sui due membri le operazioni indicate:

a. moltiplica per -3 **b.** aggiungi -2 **c.** moltiplica per 2 **d.** aggiungi 1.

Risolvi le seguenti disequazioni intere.

2 $2(3x-4)+x(x-1)>(x-1)(x+3)$; $3x-2(2x+3)<4(x-1)+3$ $\left[x>\dfrac{5}{3};\ x>-1\right]$

3 $3(x-1)-6<2(x-12)$; $2(x-1)(x+1)>2x^2-3(x+4)$ $\left[x<-15;\ x>-\dfrac{10}{3}\right]$

4 $3x-2(5x+4)<x-20$; $3(x+1)^2-2x>3(x^2-1)$ $\left[x>\dfrac{3}{2};\ x>-\dfrac{3}{2}\right]$

5 $(x-2)^2-4(x+1)\geq x^2+16$; $(3x+1)^2-2x(x-4)\leq 7x^2+1$ $[x\leq -2;\ x\leq 0]$

6 $\dfrac{x(x-2)}{2}-\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{x^2-3}{2}$; $\dfrac{1}{4}(x-1)+\dfrac{1}{3}(x+1)\leq-\dfrac{3}{4}$ $\left[x\geq\dfrac{11}{16};\ x\leq-\dfrac{10}{7}\right]$

7 $\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{3x-2}{10}\leq\dfrac{6x-1}{10}$; $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2<x+1$ $[x\geq -3;\ \forall x\in R]$

8 $\dfrac{10x^2+12x-3}{9}-\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2>\left(\dfrac{2-x}{3}\right)^2$; $\dfrac{(x-1)^2}{4}>x+\dfrac{2x^2-5}{8}$ $\left[x>\dfrac{4}{5};\ x<\dfrac{7}{12}\right]$

9 $\dfrac{x+5}{6}-\dfrac{(x-2)^2}{2}\leq x\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$; $\dfrac{x(x-1)}{3}+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{2}$ $\left[x\leq 1;\ x\leq\dfrac{15}{4}\right]$

© Re Fraschini - Grazzi, Atlas SpA

Rivedi la teoria

Le disequazioni frazionarie

Una disequazione è frazionaria se l'incognita si trova in almeno uno dei denominatori; in questo caso, dopo aver trasportato tutti i termini al primo membro ed aver eseguito le operazioni indicate, si arriva sempre ad una forma del tipo

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{A(x)}{B(x)} < 0$$

Quello che è importante ricordare è che **i denominatori non si possono di solito eliminare** perchè di essi non si conosce il segno e quindi non si sa se si deve mantenere il verso della disequazione o se lo si deve cambiare.
Per risolvere una disequazione frazionaria, una volta che essa si presenta in una delle forme ricordate, occorre:

- stabilire il dominio
- studiare il segno del numeratore andando a vedere quando è positivo
- studiare il segno del denominatore andando a vedere quando è positivo
- costruire la tabella dei segni
- dedurre il segno della frazione
- scegliere l'intervallo delle soluzioni in base al verso della disequazione.

Risolviamo per esempio la disequazione $\frac{1}{3} + \frac{x}{2x-1} \le 2$ avente dominio $R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Trasportiamo tutti i termini al primo membro: $\frac{1}{3} + \frac{x}{2x-1} - 2 \le 0$

Eseguiamo le operazioni indicate: $\frac{2x-1+3x-6(2x-1)}{3(2x-1)} \le 0 \quad \rightarrow \quad \frac{5-7x}{3(2x-1)} \le 0$

Moltiplichiamo per 3 (che è positivo) per eliminare questo fattore dal denominatore: $\frac{5-7x}{2x-1} \le 0$

Indipendentemente dal verso della disequazione, andiamo a vedere quando il numeratore è positivo o nullo e quando il denominatore è positivo (non può essere nullo):

- numeratore: $5-7x \ge 0 \quad \rightarrow \quad 7x-5 \le 0 \quad \rightarrow \quad x \le \frac{5}{7}$
- denominatore: $2x-1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > \frac{1}{2}$

Costruiamo la tabella dei segni nella quale abbiamo evidenziato con una linea doppia che il termine $\frac{1}{2}$ non appartiene al dominio della disequazione e con un pallino pieno che $\frac{5}{7}$ è il valore che annulla il numeratore.

		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{7}$		R
Segno di $5-7x$	+	‖	+	•	−	
Segno di $2x-1$	−	‖	+		+	
Frazione	−	‖	+	•	−	

La disequazione chiede di stabilire quando la frazione $\frac{5-7x}{2x-1}$ è negativa o nulla, quindi l'insieme delle soluzioni è costituito dagli intervalli

$$x < \frac{1}{2} \quad \vee \quad x \ge \frac{5}{7}$$

Le disequazioni di grado superiore al primo

Alcune disequazioni che sono di secondo grado o di grado superiore si possono risolvere con lo stesso criterio delle disequazioni frazionarie se, una volta scritte nella forma $E(x) > 0$ (o $E(x) < 0$), si riesce a scomporre il polinomio $E(x)$ in fattori al massimo di primo grado.

© Re Fraschini - Grazzi, Atlas SpA

In tal caso si procede così:

- si scompone il polinomio $E(x)$ in fattori che devono essere tutti di primo grado
- si studia il segno di ogni fattore ottenuto andando a vedere quando è positivo
- si costruisce la tabella dei segni
- si valuta il segno del prodotto
- si sceglie l'intervallo delle soluzioni.

Vediamo anche in questo caso un esempio risolvendo la disequazione $x^2 - 5x < 6$

Trasportiamo tutti i termini al primo membro: $x^2 - 5x - 6 < 0$

Scomponiamo il fattori: $(x + 1)(x - 6) < 0$

Studiamo il segno di ogni fattore e costruiamo la tabella dei segni:

$x + 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > -1$

$x - 6 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 6$

	-1	6	R
Segno di x+1	−	+	+
Segno di x−6	−	−	+
Prodotto	+	−	+

La disequazione chiede quando il prodotto ottenuto dalla scomposizione è negativo, quindi l'intervallo delle soluzioni è: $-1 < x < 6$.

Fai gli esercizi

Risolvi le seguenti disequazioni frazionarie.

10 **ESERCIZIO GUIDA**

Seguendo lo schema indicato, risolvi la disequazione $\dfrac{1}{x+1} \geq 3$

Il dominio della disequazione è: ....

Trasporta tutti i termini al primo membro ed esegui le operazioni indicate: ....

Ottieni infine la frazione: $\dfrac{3x+2}{x+1} \leq 0$

Studia il segno del numeratore risolvendo la disequazione $3x + 2 \geq 0$ ....

Studia il segno del denominatore risolvendo la disequazione $x + 1 > 0$ ....

Costruisci la tabella dei segni: ....

L'insieme delle soluzioni corrisponde all'intervallo con il segno negativo, cioè $-1 < x \leq -\dfrac{2}{3}$

11 $\dfrac{x-1}{4x+1} < 1;$ $\quad 2 < \dfrac{2x+7}{3-2x}$ $\quad \left[x < -\dfrac{2}{3} \vee x > -\dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{6} < x < \dfrac{3}{2}\right]$

12 $\dfrac{4x-2}{3x+1} \geq 0;$ $\quad \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3x-1} > 2$ $\quad \left[x < -\dfrac{1}{3} \vee x \geq \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{3} < x < \dfrac{5}{9}\right]$

13 $\dfrac{3}{x-2} + \dfrac{5}{4} \geq \dfrac{x}{2-x};$ $\quad \dfrac{4x+3}{4} + 1 < \dfrac{x^2}{x-1}$ $\quad \left[x \leq -\dfrac{2}{9} \vee x > 2;\ 1 < x < \dfrac{7}{3}\right]$

14 $\dfrac{x-1}{3x} + \dfrac{x-1}{7} \geq \dfrac{x}{7};$ $\quad \dfrac{2x}{x+1} - 3 > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{x+1} + 1\right)$ $\quad \left[x < 0 \vee x \geq \dfrac{7}{4};\ -\dfrac{11}{3} < x < -1\right]$

15 $2\left(\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{2x+1}{4}\right) + \dfrac{1}{3}x < \dfrac{1}{x};$ $\quad \dfrac{x^2-1}{2x-3} - \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{x-1}{2}$ $\quad \left[x < -\dfrac{6}{7} \vee x > 0;\ x \leq \dfrac{2}{3} \vee x > \dfrac{3}{2}\right]$

Risolvi le seguenti disequazioni non lineari.

16 **ESERCIZIO GUIDA**

$9x^2 - 16 > 0$

Scomponi in fattori: ....

Studia il segno del primo fattore andando a vedere quando è positivo: ....

Studia il segno del secondo fattore andando a vedere quando è positivo: ....

Costruisci la tabella dei segni: ....

L'insieme delle soluzioni si trova in corrispondenza dei segni $+$, quindi $x < -\frac{4}{3} \ \vee \ x > \frac{4}{3}$

17 $x^2 > 9$; $\quad 4x^2 < 1$ $\quad \left[x < -3 \ \vee \ x > 3;\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right]$

18 $7x - 6x^2 > 0$; $\quad 1 - 2x - 3x^2 < 0$ $\quad \left[0 < x < \frac{7}{6};\ x < -1 \ \vee \ x > \frac{1}{3}\right]$

19 $2x^2 + 3x - 2 < 0$; $\quad 5x^2 + x - 4 \geq 0$ $\quad \left[-2 < x < \frac{1}{2};\ x \leq -1 \ \vee \ x \geq \frac{4}{5}\right]$

20 $x^2 - 5x < 0$; $\quad x^3 - x^2 - 2x > 0$ $\quad [0 < x < 5;\ -1 < x < 0 \ \vee \ x > 2]$

21 $x^2(2x + 3) > 2x + 3$; $\quad x^2(x - 1) \leq 12x$ $\quad \left[-\frac{3}{2} < x < -1 \ \vee \ x > 1;\ x \leq -3 \ \vee \ 0 \leq x \leq 4\right]$

22 **ESERCIZIO GUIDA**

$\frac{x^2 - 25}{x - 2} > 0$

Scomponi il polinomio al numeratore: ....

Studia il segno di ogni fattore al numeratore e al denominatore: ....

....

....

Costruisci la tabella dei segni: ....

Da essa deduci che l'insieme delle soluzioni è $-5 < x < 2 \ \vee \ x > 5$

23 $\frac{x(3x + 1)}{4 - x} \geq 0$; $\quad \frac{3x^2 + 6x}{x - 2} \leq 0$ $\quad \left[x \leq -\frac{1}{3} \ \vee \ 0 \leq x < 4;\ x \leq -2 \ \vee \ 0 \leq x < 2\right]$

24 $\frac{x^2 + x}{x^2 - 4} < 0$; $\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{2} > \frac{1}{x - 1}$ $\quad [-2 < x < -1 \ \vee \ 0 < x < 2;\ x < -1 \ \vee \ 0 < x < 1 \ \vee \ x > 2]$

Rivedi la teoria

I sistemi di disequazioni

Per indicare che si vogliono trovare gli intervalli nei quali due o più disequazioni sono verificate contemporaneamente, le si scrive in un sistema. Per esempio:

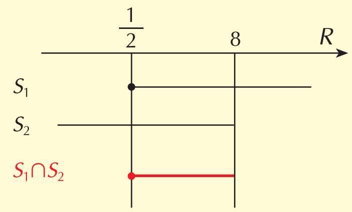
$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x - 8 < 0 \end{cases}$$

© Re Fraschini - Grazzi, Atlas SpA

Risolvendo la prima disequazione si ottiene: $x \geq \frac{1}{2}$

Risolvendo la seconda si ottiene: $x < 8$

La soluzione del sistema è data dall'intersezione dei due intervalli trovati; per determinarla si usa una tabella, concettualmente diversa dalla tabella dei segni usata in precedenza, ma simile nella struttura, nella quale si indicano con linee continue gli intervalli soluzione di ciascuna disequazione. L'intersezione è rappresentata dalla zona in cui troviamo la linea continua per entrambe le disequazioni, cioè l'intervallo $\frac{1}{2} \leq x < 8$



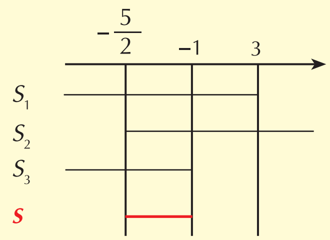
In generale, per procedere alla risoluzione di un sistema di disequazioni si affrontano i seguenti passaggi:

- si risolve ciascuna disequazione
- si costruisce la tabella delle soluzioni
- si cercano gli intervalli dove tutte le disequazioni sono verificate contemporaneamente.

Consideriamo per esempio il sistema $\begin{cases} x - 3 < 0 \\ 2x + 5 > 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$

Risolviamo ciascuna disequazione e costruiamo la tabella delle soluzioni:

- $x - 3 < 0$ se $x < 3$ $\leftarrow S_1$
- $2x + 5 > 0$ se $x > -\frac{5}{2}$ $\leftarrow S_2$
- $x + 1 < 0$ se $x < -1$ $\leftarrow S_3$



Tutte le disequazioni sono verificate nell'intervallo $-\frac{5}{2} < x < -1$ che è perciò l'insieme delle soluzioni del sistema.

Fai gli esercizi

25 $\begin{cases} 3x - 1 < 5 \\ 2x + 7 < 3(x - 2) + 12 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4(3x - 7) - 3 \leq 1 \\ 3x - 4 - 2(5x + 3) < x - 15 \end{cases}$ $\left[1 < x < 2;\ \frac{5}{8} < x \leq \frac{8}{3}\right]$

26 $\begin{cases} \dfrac{x + 1}{2} < \dfrac{1}{3} + x \\ 2x - 3 > \dfrac{2x + 3}{3} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x - 3 < \dfrac{3}{2}(x - 4) - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3x + 2}{2} > x - 5 \end{cases}$ $[x > 3;\ x > 7]$

27 $\begin{cases} x - 5 > 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ x - 7 < 2x + 4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} (x + 1)^2 - 5 < x^2 + 4 \\ 3x + \dfrac{1}{2} > 0 \\ 4x + 5 > 7 \end{cases}$ $\left[x > 5;\ \frac{1}{2} < x < 4\right]$

28 $\begin{cases} 1 - 4x > 0 \\ x^2 + x < (x - 1)^2 - 3 \\ 2x \geq 7 - x \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4 > 2x - 1 \\ 2x - (x + 1)^2 < x - x^2 \\ 3x \leq 5x - 1 \end{cases}$ $\left[S = \emptyset;\ \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{2}\right]$

© Re Fraschini - Grazzi, Atlas SpA

Rivedi la teoria

Sistemi di equazioni in più variabili

Un'equazione che ha due incognite, x e y, salvo casi particolari, ha sempre infinite soluzioni rappresentate da tutte le coppie (x, y) che la soddisfano.
Se di equazioni ne abbiamo due, potrebbero esistere delle coppie che le soddisfano entrambe; cercare queste coppie significa risolvere il **sistema** formato dalle due equazioni. Le equazioni che devono essere risolte in sistema si scrivono una sotto l'altra racchiudendole sulla sinistra con una parentesi graffa aperta.
Il **grado di un sistema** è il prodotto dei gradi delle equazioni che lo formano; per avere un sistema di primo grado, detto anche sistema lineare, tutte le equazioni devono essere di primo grado. Ci occupiamo in questa parte della risoluzione dei sistemi di primo grado di due equazioni in due incognite.
Per trovare le soluzioni di un sistema, come abbiamo fatto per le equazioni, si cerca di passare da una forma ad un'altra equivalente di complessità minore e per fare ciò si applicano due principi di equivalenza (che valgono per qualunque sistema, non solo per quelli lineari):

- **principio di sostituzione**: se in un sistema si sostituisce al posto di un'incognita la sua espressione ricavata da una delle altre equazioni, si ottiene un sistema equivalente a quello dato.
- **principio di riduzione**: se in un sistema ad una equazione si sostituisce quella che si ottiene sommando membro a membro l'equazione stessa con le altre (tutte o solo qualcuna), si ottiene un sistema equivalente a quello dato.

I metodi di risoluzione

L'applicazione dei due principi di sostituzione e di riduzione permette di risolvere un sistema in modi differenti; vediamo questi metodi applicati al sistema $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 5x + 3y = -7 \end{cases}$

- **Metodo di sostituzione**

  Ricaviamo una delle incognite, per esempio x che ha coefficiente 1, dalla prima equazione $\begin{cases} x = 2y - 4 \\ 5x + 3y = -7 \end{cases}$

  Sostituiamo l'espressione trovata al posto di x nella seconda equazione $\begin{cases} x = \boxed{2y - 4} \\ 5(2y - 4) + 3y = -7 \end{cases}$

  Risolviamo la seconda equazione che contiene solo la variabile y $\begin{cases} x = 2y - 4 \\ y = 1 \end{cases}$

  Sostituiamo 1 al posto di y nella prima equazione $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

- **Metodo di riduzione**

  Consiste nel sommare o sottrarre i due membri delle equazioni del sistema con il fine di eliminare una delle variabili. E' conveniente applicare questo metodo quando una delle due variabili ha coefficienti uguali oppure opposti nelle due equazioni; se ciò non accade, bisogna moltiplicare opportunamente le due equazioni in modo da ricondurci in questa situazione. Nel nostro caso dobbiamo:

  moltiplicare i due membri della prima equazione per -5 $\begin{cases} -5x + 10y = 20 \\ 5x + 3y = -7 \end{cases}$

© Re Fraschini - Grazzi, Atlas SpA

sommare membro a membro le due equazioni $(-5x+10y)+(5x+3y)=20-7$

$13y=13$

moltiplicare la prima equazione per 3 e la seconda per 2 $\begin{cases} 3x-6y=-12 \\ 10x+6y=-14 \end{cases}$

sommare membro a membro le due equazioni $(3x-6y)+(10x+6y)=-12+(-14)$

$13x=-26$

associare le due equazioni ottenute $\begin{cases} 13x=-26 \\ 13y=13 \end{cases}$

trovare la soluzione del sistema $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

- **Metodo del confronto**

Ricaviamo la variabile x dalle due equazioni $\begin{cases} x=2y-4 \\ x=-\dfrac{3y+7}{5} \end{cases}$

Uguagliamo le due espressioni di x che abbiamo ottenuto $2y-4=-\dfrac{3y+7}{5}$

Ricaviamo la variabile y dalle due equazioni $\begin{cases} y=\dfrac{x+4}{2} \\ y=-\dfrac{5x+7}{3} \end{cases}$

Uguagliamo le due espressioni di y che abbiamo ottenuto $\dfrac{x+4}{2}=-\dfrac{5x+7}{3}$

Associamo le due equazioni ottenute dal confronto $\begin{cases} 2y-4=-\dfrac{3y+7}{5} \\ \dfrac{x+4}{2}=-\dfrac{5x+7}{3} \end{cases}$

Troviamo la soluzione del sistema risolvendo ciascuna delle equazioni ottenute in cui compare una sola variabile

$$\begin{cases} 10y-20=-3y-7 \\ 3x+12=-10x-14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 13y=13 \\ 13x=-26 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Nella maggior parte dei casi, però, si usa un **metodo misto** fra quelli indicati che risulta essere spesso più veloce.

Vediamo per esempio come risolvere il sistema $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$

Sommiamo membro a membro le due equazioni e riscriviamo la prima: $\begin{cases} 5x=4 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

Ricaviamo il valore di x dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda: $\begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ 3 \cdot \dfrac{4}{5} - 2y = 1 \end{cases}$

Risolviamo la seconda equazione: $\begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{7}{10} \end{cases}$

Fai gli esercizi

Risolvi i seguenti sistemi lineari applicando il metodo che ritieni più opportuno.

1 $\begin{cases} 2x - 4y = 1 \\ x - 6y = 3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$ $\quad \left[S = \left\{ \left(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{8} \right) \right\}; S = \left\{ \left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5} \right) \right\} \right]$

2 $\begin{cases} -x + y = 3 \\ 6x + 4y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x - 4y + 2 = 0 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$ $\quad \left[S = \left\{ \left(-\frac{5}{4}, \frac{7}{4} \right) \right\}; S = \left\{ \left(-\frac{10}{11}, -\frac{2}{11} \right) \right\} \right]$

3 $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{1}{2} \\ x + \dfrac{y+2}{4} = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y + 2 = \dfrac{x-1}{4} \\ x = \dfrac{2y+5}{3} + 1 \end{cases}$ $\quad \left[S = \left\{ \left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{2} \right) \right\}; S = \left\{ \left(\frac{7}{5}, -\frac{19}{10} \right) \right\} \right]$

Rivedi la teoria

Il metodo di Cramer

Per risolvere un sistema lineare si può usare un quarto metodo, detto **metodo di Cramer**, che esprime in forma sintetica le soluzioni quando il sistema è dato nella forma normale $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

Risolviamo per esempio il sistema $\begin{cases} 5x + 4y = 3 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$

- Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-4) - 3 \cdot 4 = -32$$

- Calcoliamo il determinante della matrice che si ottiene da quella dei coefficienti sostituendo la colonna dei coefficienti di x con quella dei termini noti:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - (-1) \cdot 4 = -8$$

- Calcoliamo il determinante della matrice che si ottiene da quella dei coefficienti sostituendo la colonna dei coefficienti di y con quella dei termini noti:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 = -14$$

© Re Fraschini - Grazzi, Atlas SpA

Se, come in questo caso, $\Delta \neq 0$, il sistema ha soluzione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} \\ \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{-8}{-32} = \dfrac{1}{4} \\ \\ y = \dfrac{-14}{-32} = \dfrac{7}{16} \end{cases}$$

Se invece capita che $\Delta = 0$, il sistema non è determinato e si verifica che:

- è impossibile se almeno uno fra Δx e Δy è diverso da zero;
- è indeterminato se entrambi Δx e Δy sono uguali a zero.

Fai gli esercizi

Risolvi applicando il metodo di Cramer.

4 $\begin{cases} 5x - 8y = -3 \\ 7x + 3y = 10 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 4x - 6y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ $\qquad \left[S = \{(1, 1)\};\ S = \left\{\left(\frac{29}{16}, \frac{3}{8}\right)\right\}\right]$

5 $\begin{cases} \dfrac{4}{3}x = 1 + \dfrac{1}{6}y \\ \\ 2y = \dfrac{8x - 9}{3} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 3x - y = 2(x + y) \\ 1 + 4x = 2y - 6 \end{cases}$ $\qquad \left[S = \left\{\left(\frac{27}{40}, -\frac{3}{5}\right)\right\};\ S = \left\{\left(-\frac{21}{10}, -\frac{7}{10}\right)\right\}\right]$

Risolvi e discuti i seguenti sistemi letterali.

6 **ESERCIZIO GUIDA**

Quando un sistema è letterale, è necessario discutere come cambiano le soluzioni al variare dei parametri. Il metodo che più si presta alla discussione di un sistema di questo tipo è quello di Cramer perché segue uno schema fisso; risolviamo dunque il sistema

$$\begin{cases} x - 2ay = a + 1 \\ 3x + y = a - 1 \end{cases}$$

Il sistema è già scritto in forma normale; calcoliamo i tre determinanti:

- $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2a \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6a$
- $\Delta x = \begin{vmatrix} a+1 & -2a \\ a-1 & 1 \end{vmatrix} = a + 1 + 2a(a - 1) = 2a^2 - a + 1$
- $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ 3 & a-1 \end{vmatrix} = a - 1 - 3(a + 1) = -2a - 4 = -2(a + 2)$

Sappiamo che il sistema è determinato solo se $\Delta \neq 0$.
Nel nostro caso

- $\Delta \neq 0$ se $a \neq -\dfrac{1}{6}$; in questa ipotesi il sistema ha soluzione $\begin{cases} x = \dfrac{2a^2 - a + 1}{6a + 1} \\ \\ y = -\dfrac{2(a + 2)}{6a + 1} \end{cases}$

- $\Delta = 0$ se $a = -\frac{1}{6}$; per tale valore di a si ha che

$\Delta x = 2a^2 - a + 1 = \frac{2}{36} + \frac{1}{6} + 1 \neq 0$ e $\Delta y = -2a - 4 = \frac{1}{3} - 4 \neq 0$

quindi il sistema è impossibile.

7 $\begin{cases} ax - 1 = -ay \\ 1 + y = ax + 2ay \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \text{se } a \neq 0 \ \wedge \ a \neq 1 : S = \left\{\left(\frac{1}{a}, 0\right)\right\}; \\ \text{se } a = 0 : \text{sistema impossibile;} \\ \text{se } a = 1 : \text{sistema indeterminato} \end{array}\right]$

8 $\begin{cases} ax + y = a^2 + 1 \\ x + ay - 2a = 0 \end{cases}$ $\left[\text{se } a \neq \pm 1 : S = \{(a, 1)\}; \text{ se } a = -1 \vee a = 1 : \text{ sistema indeterminato}\right]$

9 $\begin{cases} \dfrac{2x + y}{a} = 3 - \dfrac{1}{a} \\ x - \dfrac{a+1}{a} y = \dfrac{1}{a} \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \text{se } a \neq 0 \ \wedge \ a \neq -\frac{2}{3} : S = \{(a, a-1)\}; \\ \text{se } a = 0 : \text{il sistema perde significato;} \\ \text{se } a = -\frac{2}{3} : \text{sistema indeterminato} \end{array}\right]$

(Suggerimento: devi porre inizialmente $a \neq 0$)

10 $\begin{cases} 2x + \dfrac{3}{a} y = 4 \\ 4x = \dfrac{2}{a+1}(y+1) \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \text{se } a \neq 0 \ \wedge \ a \neq -1 \ \wedge \ a \neq -\frac{3}{4} : S = \left\{\left(\frac{1}{2}, a\right)\right\}; \\ \text{se } a = 0 \ \vee \ a = -1 : \text{il sistema perde significato;} \\ \text{se } a = -\frac{3}{4} : \text{sistema indeterminato} \end{array}\right]$

11 $\begin{cases} x + \dfrac{y}{a-2} = 2(a+1) \\ ax - 2y = 8 - a^2 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \text{se } a \neq 2 \ \wedge \ a \neq \frac{4}{3} : S = \{(a, a^2 - 4)\}; \\ \text{se } a = 2 : \text{il sistema perde significato;} \\ \text{se } a = \frac{4}{3} : \text{sistema indeterminato} \end{array}\right]$

Risolvi i seguenti sistemi con più di due equazioni.

12 **ESERCIZIO GUIDA**

Per risolvere un sistema che ha più di due equazioni in altrettante incognite, è spesso conveniente usare il metodo di sostituzione.
Infatti, ricavando una delle incognite da un'equazione e sostituendo la sua espressione in tutte le altre del sistema, si ottiene un nuovo sistema che, trascurando la prima equazione, ha un'incognita di meno. Iterando il procedimento, l'ultima equazione alla fine contiene una sola incognita che può quindi essere determinata; sostituendo a ritroso i valori delle incognite man mano trovati, si ottiene la soluzione del sistema.

Risolviamo, per esempio il sistema $\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 3x - y - 2z = -1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$

Possiamo ricavare l'espressione di x, che ha coefficiente 1, dalla prima equazione $\begin{cases} x = 2y + z + 1 \\ 3x - y - 2z = -1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$

© Re Fraschini - Grazzi, Atlas SpA

e sostituire nelle altre $\begin{cases} x = 2y + z + 1 \\ 3(2y + z + 1) - y - 2z = -1 \\ 2(2y + z + 1) - y + z = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 2y + z + 1 \\ 5y + z = -4 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases}$

Se trascuriamo la prima equazione, le altre due hanno un'incognita di meno perché x è stata eliminata.

Prima di proseguire dividiamo la terza equazione per 3 $\quad \begin{cases} x = 2y + z + 1 \\ 5y + z = -4 \\ y + z = 0 \end{cases}$

Ricaviamo l'espressione di y dalla terza equazione e sostituiamo nella seconda (nello scrivere il sistema abbiamo scambiato le due equazioni):

$$\begin{cases} x = 2y + z + 1 \\ y = -z \\ -5z + z = -4 \end{cases}$$

Se trascuriamo le prime due equazioni, la terza ha una sola incognita e può essere risolta:

$$-4z = -4 \qquad \rightarrow \qquad z = 1$$

Sostituiamo adesso a ritroso nelle prime due equazioni: $\begin{cases} x = -2 + 1 + 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

Quindi $\quad S = \{(0, -1, 1)\}$.

13 $\begin{cases} 5x + 3y = 41 \\ 7x - 4y = 0 \\ x + 2y - z = 12 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x - 4y - 3z = 1 \\ 2x - 6y = 3 \\ 3y + 6z = 5 \end{cases}$ $\qquad \left[S = \{(4, 7, 6)\};\ S = \left\{\left(\frac{27}{2}, 4, -\frac{7}{6}\right)\right\}\right]$

14 $\begin{cases} x - y = \dfrac{2 - 3z}{3} \\ \dfrac{x + 1}{z - y} = -6 \\ 9(x - 2y) = 3z + 10 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \dfrac{x - 2}{3} + \dfrac{y - 1}{2} + z = \dfrac{1}{2} \\ 2x + \dfrac{3y + 1}{4} - \dfrac{z}{3} + \dfrac{7}{12} = 0 \\ 2x - 3 + 5z = 0 \end{cases}$ $\qquad \left[S = \left\{\left(1, 0, -\frac{1}{3}\right)\right\};\ S = \{(-1, 2, 1)\}\right]$

Rivedi la teoria

Sistemi e problemi

Se rappresentare i dati di un problema in funzione di una sola incognita risulta difficoltoso, si può ricorrere a più variabili.
Occorre però ricordare che il numero di equazioni che si deve arrivare a scrivere deve essere uguale al numero delle incognite scelte. Inoltre, poiché queste equazioni devono essere verificate dagli stessi valori delle variabili, è lecito scriverle in sistema.

Vediamo un esempio.

Due amici squattrinati che non si vedono da un po' di tempo si incontrano e, volendo passare la serata insieme, decidono di andare in un bar a bere qualcosa insieme. Visto che però sono a corto di soldi, pensano di

© Re Fraschini - Grazzi, Atlas SpA

mettere in comune quello che hanno e poi si vedrà. Entrati nel bar trovano un terzo amico, anche lui squattrinato al pari dei primi due, che decide di unirsi alla compagnia mettendo in comune quello che ha. In questo modo, i primi due avrebbero in comune € 27; se però riunissero le proprie finanze il secondo e il terzo amico, si ritroverebbero con € 31, mentre il primo e il terzo insieme ne avrebbero 25.
Quale somma di denaro ciascun amico può condividere con gli altri?

Se indichiamo con x, y e z gli Euro posseduti da ciascuno dei tre amici, possiamo scrivere subito le seguenti tre equazioni:

- i primi due amici hanno € 27: $x + y = 27$
- il secondo e il terzo hanno € 31: $y + z = 31$
- il primo e il terzo hanno € 25: $x + z = 25$

Otteniamo così il sistema: $\begin{cases} x + y = 27 \\ y + z = 31 \\ x + z = 25 \end{cases}$

Risolvendolo si trova che: $\begin{cases} x = \dfrac{21}{2} \\ y = \dfrac{33}{2} \\ z = \dfrac{29}{2} \end{cases}$

Quindi il primo amico ha € 10,50, il secondo ha € 16,50, il terzo ha € 14,50.

Fai gli esercizi

Risolvi i seguenti problemi.

15 Nella frazione $\dfrac{x}{y}$, se si aumenta il numeratore di 4 e il denominatore di 3 si ottiene una frazione equivalente a $\dfrac{3}{2}$; si sa inoltre che se si esegue la divisione del numeratore con il denominatore si ottiene 1 come quoziente e 2 come resto. Quanto vale la frazione? $\left[\dfrac{5}{3}\right]$

16 Laura ha 7 anni in meno del doppio di quelli di Carla, che, a sua volta ne ha 5 in meno di Alessandra. Tra 4 anni, Laura avrà i $\dfrac{3}{2}$ dell'età di Carla. Determina quanti anni hanno oggi le tre donne. $[A : 23;\ C : 18;\ L : 29]$

17 Nella fotografia che la nonna ha sul comodino sono rappresentate quattro generazioni: la nonna Adalgisa, sua figlia Elisabetta e la figlia di sua figlia Marianna che tiene in braccio il suo bambino Giovanni di un anno. Le loro età, sommate insieme, danno 175 anni; gli anni della figlia e della nipote insieme sono pari all'età della nonna. Se Elisabetta ha avuto sua figlia all'età di 25 anni, quali sono le età delle tre donne? [87, 56, 31]

18 In un triangolo ABC la somma dei lati AB e BC è 18cm, la somma dei lati BC e AC è 14cm, la somma dei lati AB e AC è 16cm. Quanto misurano i lati del triangolo? $[\overline{AB} = 10;\ \overline{BC} = 8;\ \overline{AC} = 6]$

19 In un trapezio isoscele di perimetro 52cm, la somma delle basi è 32cm e la loro differenza è 16cm. Calcola le misure dei lati e quella dell'area del trapezio. [24cm, 8cm, 10cm; area = 96cm^2]

© Re Fraschini - Grazzi, Atlas SpA

Verifica del recupero

Sulle equazioni

1 Stabilisci quale fra quelli indicati è il dominio delle equazioni date:

a. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}=x$ $\quad D=R-\{0\}$; $\quad D=R-\{0, 2\}$; $\quad D=R$

b. $\frac{3x}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x^2-9}$ $\quad D=R-\{3,-3\}$; $\quad D=R-\{2, 3,-3\}$; $\quad D=R-\{3,-3,-2\}$

0,25 punti

2 Risolvi le seguenti equazioni numeriche:

a. $3x^2-7x=x(3x+1)$ — 0,25 punti

b. $4-2x-2(1-2x)(1+2x)=8x(x-1)$ — 0,25 punti

c. $\frac{5x-1}{x}=\frac{25x+1}{5x-1}$ — 0,5 punti

d. $\frac{x^2+72}{x^2-16}-\frac{2x+3}{x-4}+\frac{x-1}{x+4}=0$ — 0,5 punti

3 Risolvi e discuti le seguenti equazioni letterali:

a. $ax-3a(2-x)=a(3+x)$ — 0,5 punti

b. $\frac{a-8x}{4a}+\frac{x+3}{2}=\frac{4(x-a)}{8a}+\frac{1}{2}$ — 0,75 punti

4 Per acquistare un'auto nuova un tale versa un acconto di € 5000 e conviene di pagare $\frac{1}{3}$ della somma rimasta dopo tre mesi; il saldo verrà fatto dopo un anno, senza interessi. Se la somma che corrisponde al saldo rappresenta il 40% del valore di acquisto dell'auto, quanto costa l'auto e quali somme vengono versate ogni volta?

0,5 punti

Sulle disequazioni

5 Risolvi le seguenti disequazioni:

a. $-3(x-1)-(x+2)<x+1$

b. $(3x-1)^2-(x-2)(9x+1)\le 0$

c. $\frac{(x-1)(x+1)}{4}<\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2$

0,75 punti

6 Risolvi le seguenti disequazioni frazionarie:

a. $\frac{x+5}{3-x}<1$ $\qquad$ **b.** $\frac{x}{x-1}+2>\frac{12}{3x-3}$

1 punto

7 Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al primo:

a. $x^3-5x^2+6x>0$ $\qquad$ **b.** $\frac{x^2-2x-3}{x^2+5x+6}<0$

1 punto

8 Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni:

a. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} + x \geq 1 \\ \dfrac{2}{x-3} < \dfrac{1}{x} \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x - 2(x-1) < 4x \\ 2(x+1) > x - 3 \\ 3x - 2 > 0 \end{cases}$

1,5 punti

Sui sistemi

9 Risolvi i seguenti sistemi:

a. $\begin{cases} 4x - 2y + 5 = 0 \\ 4x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

0,25 punti

b. $\begin{cases} \dfrac{x+3y-1}{x-2} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2x+y}{y-1} + 2 = 0 \end{cases}$

0,5 punti

10 Risolvi e discuti il seguente sistema letterale: $\begin{cases} ax - 2y = 3a \\ (a-1)x + y = -1 \end{cases}$

0,75 punti

11 Risolvi il seguente problema.
Per realizzare un abito si sono acquistati 3m di tessuto e 2m di fodera spendendo complessivamente € 256; il costo del tessuto è 10 volte quello della fodera. Quanto costano al metro i due tipi di stoffa?

0,75 punti

© Re Fraschini - Grazzi, Atlas SpA

Soluzioni

1 **a.** $D = R - \{0, 2\}$; **b.** $D = R - \{3, -3, -2\}$

2 **a.** $S = \{0\}$; **b.** $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$; **c.** $S = \left\{\frac{1}{11}\right\}$; **d.** $S = \varnothing$

3 **a.** se $a \neq 0$ allora $S = \{3\}$, se $a = 0$ allora $S = R$

b. se $a \neq 0 \wedge a \neq 5$ allora $S = \left\{\frac{7a}{2(5-a)}\right\}$

se $a = 5$ allora $S = \varnothing$

se $a = 0$ l'equazione perde significato.

4 costo auto: € 12500; somme versate: € 2500, € 5000

5 **a.** $x > 0$; **b.** $x \leq -\frac{3}{11}$; **c.** $x > -\frac{1}{2}$

6 **a.** $x < -1 \vee x > 3$; **b.** $x < 1 \vee x > 2$

7 **a.** $0 < x < 2 \vee x > 3$; **b.** $-3 < x < -2 \vee -1 < x < 3$

8 **a.** $1 \leq x < 3$; **b.** $x > \frac{2}{3}$

9 **a.** $S = \left\{\left(-1, \frac{1}{2}\right)\right\}$; **b.** $S = \left\{\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{6}\right)\right\}$

10 se $a \neq \frac{2}{3}$: $S = \{(1, -a)\}$; se $a = \frac{2}{3}$: sistema indeterminato

11 € 80, € 8

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Punteggio												

Valutazione in decimi

Math in English

Glossary

account	conto	**lenght**	lunghezza
addition method	metodo di addizione (riduzione)	**mph (miles per hour)**	miglia all'ora
angle	angolo	**mutual fund**	fondo comune
can	barattolo	**odd**	dispari
cashew	anacardio	**paint**	vernice
deposit	versamento (bancario)	**pecan**	noce americana
enamel	smalto	**saving account**	deposito a risparmio
even	pari	**speed**	velocità
inequality	disuguaglianza, disequazione	**substitution method**	metodo di sostituzione
interest	interesse	**to travel**	viaggiare
latex	lattice	**width**	larghezza
		worth	del valore di

1 Solve the equation $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{x}{4}=\frac{-1}{2}$

a. $-\frac{4}{3}$ **b.** -4 **c.** 4 **d.** $-\frac{3}{4}$ **e.** all real numbers

2 Solve the equation $\frac{3}{x+3}=\frac{2}{x-4}-\frac{10}{x^2-x-12}$

a. $x=2$ **b.** $x=6$ **c.** $x=-5$ **d.** $x=8$ **e.** none of these

3 Solve for m $\quad y=xm+b$

a. $m=y-b-x$ **b.** $m=\frac{y}{b}-x$ **c.** $m=\frac{y}{x}-b$ **d.** $m=\frac{y-b}{x}$ **e.** none of these

4 Solve the equation algebrically $|4+x|-3=7$

a. 6 and -8 **b.** 6 only **c.** -8 only **d.** 6 and -14 **e.** none of these

5 Solve the inequality $\left|x+\frac{1}{2}\right|\geq 2$

a. $x\leq -2 \ \vee \ x\geq 3$ **b.** $x\leq -\frac{1}{2} \ \vee \ x\geq \frac{3}{2}$ **c.** $x\leq -\frac{3}{2} \ \vee \ x\geq \frac{3}{2}$

d. $x\leq -\frac{5}{2} \ \vee \ x\geq \frac{3}{2}$ **e.** $x\leq -\frac{5}{2} \ \wedge \ x\geq \frac{3}{2}$

6 The sum of three consecutive odd integers is 369. What is the largest of these numbers?

a. 129 **b.** 137 **c.** 125 **d.** 145 **e.** 151

7 Increasing a certain number by 5 and multiplying the result by 7 is the same as multiplying the number by -5 and subtracting 1 from the result. What is the number?

a. $-\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{10}{3}$ **c.** 0 **d.** -3 **e.** nine of these

© Re Fraschini - Grazzi, Atlas SpA

8 A paint store has a total of 75 one-gallon cans of paint, with the enamel selling for \$20.00 per gallon and the latex selling at \$30.00 per gallon. If the totale value of the paint is \$1850.00, how many gallons of enamel are in stock?

a. 40 cans **b.** 30 cans **c.** 25 cans **d.** 50 cans **e.** 28 cans

9 Working together, two people can wash their car in 10 minutes. One of the two, working alone, can wash the car in 30 minutes. How long would it take the other person to do the job working alone?

a. 12 minutes **b.** 18 minutes **c.** 10 minutes **d.** 15 minutes **e.** none of these

10 Mr Jones has a total of \$ 5,000 to invest in two separate accounts. The saving account pays 3% simple interest and the mutual fund pays 5% of interest. How much should he invest in the saving account in order to earn a total of \$190 in interest for one year?

a. \$ 2,500 **b.** \$ 1,000 **c.** \$ 2,000 **d.** \$ 3,000 **e.** \$ 1,500

11 The first angle of a triangle is 10° less than the second angle. The third angle is three times the second angle. What is the measure of the second angle?

a. 38° **b.** 45° **c.** 54° **d.** 84° **e.** 104°

12 The perimeter of a rectangle is 80 inches. The lenght is three times the width. What is one of the dimensions?

a. The lenght is 20 inches **b.** The lenght is 30 inches **c.** The width is 15 inches
d. The width is 20 inches **e.** The lenght is 20 inches

13 You want to mix 20 pounds of pecans worth \$ 1.80 per pound with some cashews worth \$ 2.40 per pound to make a mix worth \$ 2.00 per pound. How many pounds of cashews should you use?

a. 8 pounds **b.** 7 pounds **c.** 10 pounds **d.** 12 pounds **e.** none of these

14 Use the substitution method to solve: $\begin{cases} y = 0{,}6x - 10 \\ 5y - 3x = 4 \end{cases}$

a. no solution **b.** an infinite number of solutions **c.** $(0, -8)$ **d.** $(0, 8)$ **e.** $(5, 2)$

15 Use the addition method to solve: $\begin{cases} 6x = 5y + 10 \\ 3x + 2y = 23 \end{cases}$

a. $(4, 5)$ **b.** $(0, -2)$ **c.** $(3, 7)$ **d.** $(5, 4)$ **e.** $(7, 1)$

16 A small plane travels 90 mph faster than a train. The plain travels 525 miles in the same time it takes the train to travel 210 miles. Determine the speed of the train.

a. 150 mph **b.** 100 mph **c.** 60 mph **d.** 70 mph **e.** none of these

1 a. **2** d. **3** d. **4** d. **5** d. **6** c. **7** d. **8** a.
9 d. **10** d. **11** a. **12** b. **13** c. **14** a. **15** d. **16** c.