

La scomposizione in fattori di polinomi

1 ESERCIZIO SVOLTO

Scomponiamo i seguenti polinomi mediante **raccoglimento a fattor comune**:

a. $at + b^2t + 3ct = t(a + b^2 + 3c)$

b. $3xy + ay + 8y = y(3x + a + 8)$

Dunque, per applicare la proprietà di raccoglimento, bisogna individuare il *M.C.D.* fra i monomi del polinomio. Il polinomio $3x + a + 8$ è il quoziente della divisione del polinomio dato per il *M.C.D.*

c. $2a^2c + 4a^3c^2 - 8a^2x =$ il *M.C.D.* è $2a^2$
 $= 2a^2(c + 2ac^2 - 4x)$

d. $9x^4 - 18ax^6 + 6x^3 =$ il *M.C.D.* è $3x^3$
 $= 3x^3(3x - 6ax^3 + 2)$

e. $27a^2bc + 3a^2b^2 + 15a^3b^2c =$ il *M.C.D.* è $3a^2b$
 $= 3a^2b(9c + b + 5abc)$

2 Scomponi i seguenti polinomi mediante raccoglimento totale.

a. $3a^3x - 3xy = 3x(\dots - \dots)$

b. $4ab - 8ab^2 + 2a = 2a(\dots - \dots + \dots)$

c. $a^2b^4 + b^4$

d. $x^5 - 3x^3y + x^2$

e. $\frac{1}{2}a^2y^2 - \frac{3}{4}a^3y + \frac{1}{6}ay^2$

f. $\frac{1}{5}x^2y^3 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{7}{5}x^3y - \frac{6}{5}x^2y^2$

g. $3x(2a - 1) - y(2a - 1)$

h. $6a^2(2b + z) - 3a(2b + z)$

3 ESERCIZIO SVOLTO

Scomponiamo i seguenti polinomi mediante **raccoglimenti parziali** a fattor comune:

a. $ax + 3x + ay + 3y = x(a + 3) + y(a + 3) = (a + 3)(x + y)$

b. $7a + 7b - am^2 - bm^2 = 7(a + b) - m^2(a + b) = (a + b)(7 - m^2)$

c. $ax - 2ay + 3a - 2bx + 4by - 6b = a(x - 2y + 3) - 2b(x - 2y + 3) = (x - 2y + 3)(a - 2b)$

4 Scomponi i seguenti polinomi mediante raccoglimenti parziali e poi totali.

a. $\underbrace{3ax^2 + 3ay^2}_{3a} + \underbrace{2bx^2 + 2by^2}_{2b}$

b. $\underbrace{3xz^2 - z^2}_{z^2} + \underbrace{3x - 1}_1$

c. $\underbrace{2ax + 2ay}_{2a} + \underbrace{3x + 3y}_3 - \underbrace{zx - zy}_{-z}$

d. $2ax^2 + bx^2 - 3x^2 - 2ay - by + 3y$

e. $a^2 - 5ab + 5ay - 25by$

f. $2x^3y^3 - x^2y - 2xy^2 + 1$

g. $2ax + 3xy + x - 4ay - 6y^2 - 2y$

5 ESERCIZIO SVOLTO

Individuiamo, se possibile, dei **quadrati di binomi** nei seguenti trinomi; ricordiamo che due termini del polinomio devono essere dei quadrati ed il terzo deve essere il doppio prodotto.

a. $9a^2 - 12a + 4 = (3a - 2)^2$
 $\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ (3a)^2 & 2 \cdot 3a \cdot 2 & (2)^2 \end{array}$

b. $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$
 $\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ (x)^2 & 2 \cdot x \cdot 3 & (3)^2 \end{array}$

c. $4a^2 - 6a + 9$ ma $2 \cdot 2a \cdot 3 = 12a$, quindi non si tratta del quadrato di un binomio
 $\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ (2a)^2 & (3)^2 \end{array}$

6 Scomponi, se possibile, i seguenti trinomi.

a. $b^2 - 10b + 25;$

$a^4 + 2a^2 + 1$

b. $x^2 + 2xy - y^2;$

$x^2 + 16y^2 - 8xy$

c. $36a^2 - 12at + t^2;$

$x^2 + 4ax + 4a^2$

d. $\frac{9}{16}a^4 + \frac{4}{9}x^4 + a^2x^2;$

$\frac{9}{25}a^2x - \frac{6}{5}ax + x$

e. $\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}xy + 4y^2;$

$9a^3 - 2a^2b + \frac{1}{9}ab^2$

7 ESERCIZIO SVOLTO

Individuiamo dei **quadrati** nei seguenti polinomi:

a. $9a^4 + 4a^2 + 1 + 12a^3 + 6a^2 + 4a = (3a^2 + 2a + 1)^2$
 $\begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (3a^2)^2 & (2a)^2 & (1)^2 & 2 \cdot 3a^2 \cdot 2a & 2 \cdot 3a^2 \cdot 1 & 2 \cdot 2a \cdot 1 \end{array}$

b. $x^2 + 9y^2 + 1 - 6xy + 2x - 6y = (x - 3y + 1)^2$
 $\begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (x)^2 & (3y)^2 & (1)^2 & 2 \cdot (3y) \cdot (x) & 2 \cdot x \cdot 1 & 2 \cdot 3y \cdot 1 \end{array}$

8 Scomponi i seguenti polinomi:

a. $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab + 4ac - 2bc$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (2a)^2 & (b)^2 & (c)^2 \end{array}$$

b. $x^2 + 9 + 4y^2 - 6x - 4xy + 12y$

d. $a^2 + 4b^2 + 1 + 4ab - 2a - 4b$

c. $a^2 + b^2 + 4 + 4a - 2ab - 4b$

e. $4a^2 + 9 + 12a + b^2 - 4ab - 6b$

9 ESERCIZIO SVOLTO

Ricordando che $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, scomponiamo le seguenti **differenze di quadrati**:

a. $a^2 - 25 = (a - 5)(a + 5)$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ (a)^2 & (5)^2 \end{array}$$

b. $a^2 - 9x^2 = (a - 3x)(a + 3x)$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ (a)^2 & (3x)^2 \end{array}$$

c. $x^2 - (2x + 1)^2 = [x - (2x + 1)][x + (2x + 1)] = -(x + 1)(3x + 1)$

10 Scomponi i seguenti polinomi:

a. $4a^2 - 49$; $25x^2 - 9y^2$

b. $\frac{9}{16}a^2 - \frac{1}{9}$; $25a^2b^2 - 1$

c. $\frac{1}{4}x^2 - 9$; $1 - \frac{49}{4}x^2$

d. $\frac{1}{9}x^2 - 100$; $0,36 - a^2$

e. $9x^2 - (a + y)^2$; $(2x - 3)^2 - 4y^2$

f. $(2a - b)^2 - (3a + b)^2$

11 ESERCIZIO SVOLTO

Individuiamo dei **cubi** nei seguenti polinomi:

a. $a^3 + 6a^2 + 12a + 8 = (a + 2)^3$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (a)^3 & 3 \cdot (a)^2 \cdot 2 & 3 \cdot a \cdot (2)^2 & (2)^3 \end{array}$$

b. $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)^3$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (x)^3 & 3 \cdot (x)^2 \cdot (-3) & 3 \cdot x \cdot (-3)^2 & (-3)^3 \end{array}$$

c. $\frac{1}{27}y^3 + \frac{2}{3}y^2 + 4y + 8 = \left(\frac{1}{3}y + 2\right)^3$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \left(\frac{1}{3}y\right)^3 & (2)^3 \end{array}$$

12 Scomponi i seguenti polinomi:

a. $b^3 - 3b^2 + 3b - 1$

b. $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$

$$\text{c. } a^3 + \frac{1}{8}b^3 + \frac{3}{2}a^2b + \frac{3}{4}ab^2$$

$$\text{d. } \frac{1}{27}x^3 - x^2 + 9x - 27$$

$$\text{e. } -\frac{1}{8}z^3 - 8 - \frac{3}{2}z^2 - 6z$$

$$\text{f. } \frac{1}{8}x^6 - y^9 - \frac{3}{4}x^4y^3 + \frac{3}{2}x^2y^6$$

13 ESERCIZIO SVOLTO

Scomponiamo, se possibile, i seguenti trinomi usando la regola del **trinomio caratteristico**.

a. $x^2 - 3x + 2$

Dobbiamo individuare due numeri il cui prodotto sia 2 e la cui somma sia -3 . Poiché

$$2 = 2 \cdot 1 \quad \text{ma} \quad 2 + 1 = 3$$

$$2 = (-2) \cdot (-1) \quad \text{e} \quad -2 - 1 = -3$$

i due numeri sono -2 e -1 .

Si ha così che $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$.

b. $a^2 + 5a + 6$ $6 = 2 \cdot 3$ e $2 + 3 = 5$ quindi

$$a^2 + 5a + 6 = (a + 2)(a + 3)$$

c. $x^2 - 3x - 4$ $-4 = 4 \cdot (-1)$ ma $4 - 1 = 3$
 $-4 = -4 \cdot (+1)$ e $-4 + 1 = -3$ quindi

$$x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$$

14 Scomponi i seguenti polinomi:

a. $y^2 - 4y - 5;$ $y^2 + 5y - 6$

b. $x^2 + 9x + 8;$ $x^2 - x - 2$

c. $x^2 + x - 12;$ $a^2 + 7a + 6$

d. $b^2 - 7b + 10;$ $c^2 + 6c^2 - 16$

e. $z^2 + 6az + 8a^2;$ $x^2 - 3bx - 10b^2$

15 ESERCIZIO SVOLTO

Scomponiamo i seguenti polinomi con la regola di Ruffini:

a. $x^3 + 4x^2 + x - 6$ I divisori del termine noto sono $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

$P(1) = 1 + 4 + 1 - 6 = 0$ il polinomio è divisibile per $x - 1$.

Calcoliamo il quoziente con la regola di Ruffini.

| | | | | |
|---|---|---|---|----|
| | 1 | 4 | 1 | -6 |
| 1 | | 1 | 5 | 6 |
| | 1 | 5 | 6 | 0 |

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x^2 + 5x + 6) = \leftarrow \text{trinomio caratteristico}$$

$$= (x - 1)(x + 2)(x + 3)$$

b. $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$ I divisori del termine noto sono $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

$$P(1) = 2 + 3 - 5 - 6 \neq 0$$

$$P(-1) = -2 + 3 + 5 - 6 = 0 \quad \text{il polinomio è divisibile per } x + 1.$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 3 & -5 & -6 \\ -1 & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(2x^2 + x - 6)$$

Troviamo ora i divisori del quoziente ottenuto $2x^2 + x - 6$

$$P(-1) = 2 - 1 - 6 \neq 0$$

$$P(2) = 8 + 2 - 6 \neq 0$$

$$P(-2) = 8 - 2 - 6 = 0 \quad \text{il polinomio è divisibile per } x + 2.$$

$$\begin{array}{r|rr|r} & 2 & 1 & -6 \\ -2 & & -4 & 6 \\ \hline & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\text{In definitiva: } 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(2x^2 + x - 6) = (x + 1)(x + 2)(2x - 3)$$

16 Scomponi col metodo di Ruffini:

a. $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$

b. $2x^3 - 5x^2 + x + 2$

c. $3x^3 - 11x^2 + 5x + 3$

17 ESERCIZIO SVOLTO

Ricordiamo infine la scomposizione della **differenza e della somma di cubi**:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{e} \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ad esempio $a^3 - 8 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$

$$8x^3 + 27y^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

18 Scomponi i seguenti binomi, riconoscendo in essi una somma o una differenza di cubi:

a. $\frac{1}{8}x^3 - 1;$ $125 + a^3$

b. $\frac{8}{27}x^3 + y^3;$ $64b^3 - 1$

c. $1 - y^9;$ $a^3x^3 - 8$

19 Scomponi i seguenti polinomi applicando le regole che hai studiato:

a. $a^2x - 4x;$ $a^3 - a$

b. $a^3 - 4a^2 + 4a;$ $x^2 + x - 2$

- c. $ax + 2bx - 3a - 6b$; $a^3x - x^4$
 d. $ab^2 - 2ab - 3a$; $a^2 - (x^2 - 6x + 9)$
 e. $x^3 + x^2 - 9x - 9$; $8a^3x + b^3x$

20 ESERCIZIO SVOLTO

Dopo aver scomposto i seguenti polinomi, calcoliamo il loro *M.C.D.* ed il loro *m.c.m.*:

$$2y^2 - 3by; \quad 2y^2 + 3by; \quad 4y^2 - 9b^2$$

$$2y^2 - 3by = y(2y - 3b)$$

$$2y^2 + 3by = y(2y + 3b)$$

$$4y^2 - 9b^2 = (2y + 3b)(2y - 3b)$$

$$\text{M.C.D.} = 1 \quad \text{m.c.m.} = y(2y - 3b)(2y + 3b)$$

21 Calcola il *M.C.D.* ed il *m.c.m.* fra i seguenti polinomi:

- a. $x^2 - y^2$; $ax + ay - bx - by$; $ax + ay + bx + by$
 b. $a^3 + b^3$; $7a^2 - 7ab + 7b^2$; $2a^2 - 2b^2$
 c. $x^4 + x^3 - x^2 - x$; $9x + 9$; $7x^2 + 14x + 7$
 d. $b^2 - b - 2$; $b^2 + b - 6$; $b^2 - 4$
 e. $4a + 12x$; $a^3 + 27x^3$; $2a^3 + 18ax^2 + 12a^2x$

Risultati di alcuni esercizi.

2. a. $3x(a^3 - y)$; b. $2a(2b - 4b^2 + 1)$; c. $b^4(a^2 + 1)$;
 d. $x^2(x^3 - 3xy + 1)$; e. $\frac{1}{2}ay\left(ay - \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{3}y\right)$; f. $\frac{1}{5}x^2(y^3 - 4 + 7xy - 6y^2)$;
 g. $(2a - 1)(3x - y)$; h. $3a(2b + z)(2a - 1)$.
 4. a. $(x^2 + y^2)(3a + 2b)$; b. $(3x - 1)(z^2 + 1)$; c. $(x + y)(2a + 3 - z)$;
 d. $(2a + b - 3)(x^2 - y)$; e. $(a - 5b)(a + 5y)$; f. $(2xy^2 - 1)(x^2y - 1)$;
 g. $(3y + 2a + 1)(x - 2y)$.
 6. a. $(b - 5)^2$; $(a^2 + 1)^2$; b. non è un quadrato; $(x - 4y)^2$; c. $(6a - t)^2$; $(x + 2a)^2$;
 d. $\left(\frac{3}{4}a^2 + \frac{2}{3}x^2\right)^2$; $x\left(\frac{3}{5}a - 1\right)^2$; e. $\left(\frac{1}{3}x + 2y\right)^2$; $a\left(3a - \frac{1}{3}b\right)^2$.
 8. a. $(2a - b + c)^2$; b. $(x - 2y - 3)^2$; c. $(a - b + 2)^2$;
 d. $(a + 2b - 1)^2$; e. $(2a - b + 3)^2$.
 10. a. $(2a - 7)(2a + 7)$; $(5x - 3y)(5x + 3y)$; b. $\left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}a + \frac{1}{3}\right)$; $(5ab - 1)(5ab + 1)$;
 c. $\left(\frac{1}{2}x - 3\right)\left(\frac{1}{2}x + 3\right)$; $\left(1 - \frac{7}{2}x\right)$; $\left(1 + \frac{7}{2}x\right)$; d. $\left(\frac{1}{3}x - 10\right)\left(\frac{1}{3}x + 10\right)$; $(0,6 - a)(0,6 + a)$;
 e. $(3x - a - y)(3x + a + y)$; $(2x - 3 - 2y)(2x - 3 + 2y)$; f. $-5a(a + 2b)$.

- 12.** a. $(b-1)^3$; b. $(a-2b)^3$; c. $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^3$;
d. $\left(\frac{1}{3}x-3\right)^3$; e. $\left(-\frac{1}{2}z-2\right)^3$; f. $\left(\frac{1}{2}x^2-y^3\right)^3$.
- 14.** a. $(y-5)(y+1)$; $(y+6)(y-1)$; b. $(x+1)(x+8)$; $(x-2)(x+1)$;
c. $(x+4)(x-3)$; $(a+6)(a+1)$; d. $(b-5)(b-2)$; $(c+8)(c-2)$;
e. $(z+4a)(z+2a)$; $(x-5b)(x+2b)$.
- 16.** a. $(x-1)(x-3)(2x+1)$; b. $(x-1)(x-2)(2x+1)$; c. $(x-1)(x-3)(3x+1)$.
- 18.** a. $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1\right)$; $(5+a)(25-5a+a^2)$;
b. $\left(\frac{2}{3}x+y\right)\left(\frac{4}{9}x^2-\frac{2}{3}xy+y^2\right)$; $(4b-1)(16b^2+4b+1)$;
c. $(1-y)(1+y+y^2)(1+y^3+y^6)$; $(ax-2)(a^2x^2+2ax+4)$.
- 19.** a. $x(a-2)(a+2)$; $a(a-1)(a+1)$; b. $a(a-2)^2$; $(x+2)(x-1)$;
c. $(a+2b)(x-3)$; $x(a-x)(a^2+ax+x^2)$; d. $a(b-3)(b+1)$; $(a-x+3)(a+x-3)$;
e. $(x+1)(x-3)(x+3)$; $x(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$.
- 21.** a. M.C.D. = $x+y$, m.c.m. = $(x-y)(x+y)(a-b)(a+b)$;
b. M.C.D. = 1, m.c.m. = $14(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
c. M.C.D. = $x+1$, m.c.m. = $63x(x+1)^2(x-1)$;
d. M.C.D. = $b-2$, m.c.m. = $(b+1)(b+2)(b-2)(b+3)$;
e. M.C.D. = $a+3x$, m.c.m. = $4a(a+3x)^2(a^2-3ax+9x^2)$.