Il metodo di Cramer per i sistemi con tre incognite

Il metodo di Cramer può essere usato anche per questo tipo di sistemi e la procedura di calcolo è analoga a quella imparata per i sistemi di due equazioni; vediamo come procedere considerando il sistema

$$\begin{cases} y + x - z - 3 = 0 \\ x - \dfrac{3}{2}y = \dfrac{1}{2} \\ 2z - y + 3x - 5 = 0 \end{cases}$$

Scriviamolo innanzi tutto in forma normale mettendo prima le x, poi le y, da ultimo le z e trasportando i termini noti al secondo membro:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - 3y = 1 \\ 3x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

Scriviamo adesso la matrice dei coefficienti del sistema scrivendo nell'ordine la colonna dei coefficienti di x, quella dei coefficienti di y e da ultimo quella dei coefficienti di z (nella seconda equazione la z non c'è e dobbiamo scrivere 0 come coefficiente):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Per calcolare il determinante di questa matrice si procede in questo modo:

- si riscrivono le prime 2 colonne accanto alla matrice; nel nostro caso otteniamo

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right.$$

- si calcola la differenza tra la somma algebrica dei prodotti dei numeri lungo le diagonali principali (segnate in rosso) e la somma algebrica dei prodotti dei numeri lungo le diagonali secondarie (segnate in blu)

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right.$$

$$= [1 \cdot (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot (-1)] - [3 \cdot (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1] =$$

$$= [-6 + 2] - [9 + 4] = -4 - 13 = -17. \text{ Dunque } \Delta = -17.$$

Calcoliamo adesso il determinante Δx della matrice che si ottiene sopprimendo la colonna x della matrice dei coefficienti e sostituendola con quella dei termini noti:

colonna dei termini noti

$$\Delta x = \left|\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{3} & 1 & -1 & 3 & 1 \\ \mathbf{1} & -3 & 0 & 1 & -3 \\ \mathbf{5} & -1 & 2 & 5 & -1 \end{array}\right.$$

$$= [3 \cdot (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1)] - [5 \cdot (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1] =$$

$$= [-18 + 1] - [15 + 2] = -17 - 17 = -34$$

Analogamente, calcoliamo Δy e Δz.

colonna dei termini noti

$$\Delta y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & \mathbf{3} & -1 & 1 & 3 \\ 2 & \mathbf{1} & 0 & 2 & 1 \\ 3 & \mathbf{5} & 2 & 3 & 5 \end{array}\right.$$

$$= [1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 5] - [3 \cdot 1 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3] = -8 - 9 = -17$$

colonna dei termini noti

$$\Delta z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & \mathbf{3} & 1 & 1 \\ 2 & -3 & \mathbf{1} & 2 & -3 \\ 3 & -1 & \mathbf{5} & 3 & -1 \end{array}\right.$$

$$= [1 \cdot (-3) \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot (-1)] - [3 \cdot (-3) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 1] = -18 + 18 = 0$$

Allora, essendo $\Delta \neq 0$ la soluzione del sistema è

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} \\ z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = \dfrac{-34}{-17} = 2 \\ y = \dfrac{-17}{-17} = 1 \\ z = \dfrac{0}{-17} = 0 \end{cases} \quad \text{quindi} \quad S = \{(2,\ 1,\ 0)\}.$$

Il metodo di Cramer per i sistemi con tre incognite

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 15 \\ 6x - 3y + 2z = 4 \\ 4x + 7y = -18 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di Cramer e calcoliamo i tre determinanti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -4 & 5 & 3 & -4 \\ 6 & -3 & 2 & 6 & -3 \\ 4 & 7 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right|$$

$$= [3 \cdot (-3) \cdot 0 + (-4) \cdot 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot 7] - [4 \cdot (-3) \cdot 5 + 7 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \cdot (-4)] = 196$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 15 & -4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \\ -18 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 15 & -4 & 5 & 15 & -4 \\ 4 & -3 & 2 & 4 & -3 \\ -18 & 7 & 0 & -18 & 7 \end{array}\right|$$

$$= [15 \cdot (-3) \cdot 0 + (-4) \cdot 2 \cdot (-18) + 5 \cdot 4 \cdot 7] - [(-18) \cdot (-3) \cdot 5 + 7 \cdot 2 \cdot 15 + 0 \cdot 4 \cdot (-4)] = -196$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 15 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 4 & -18 & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 15 & 5 & 3 & 15 \\ 6 & 4 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & -18 & 0 & 4 & -18 \end{array}\right|$$

$$= [3 \cdot 4 \cdot 0 + 15 \cdot 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot (-18)] - [4 \cdot 4 \cdot 5 + (-18) \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \cdot 15] = -392$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 15 \\ 6 & -3 & 4 \\ 4 & 7 & -18 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -4 & 15 & 3 & -4 \\ 6 & -3 & 4 & 6 & -3 \\ 4 & 7 & -18 & 4 & 7 \end{array}\right|$$

$$= [3 \cdot (-3) \cdot (-18) + (-4) \cdot 4 \cdot 4 + 15 \cdot 6 \cdot 7] - [4 \cdot (-3) \cdot 15 + 7 \cdot 4 \cdot 3 + (-18) \cdot 6 \cdot (-4)] = 392$$

Poichè $\Delta \neq 0$, il sistema è determinato ed ha soluzione:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-196}{196} = -1 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-392}{196} = -2 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{392}{196} = 2 \qquad [S = \{(-1, -2, 2)\}]$$

2 $\begin{cases} 3x + y - 6z = 16 \\ x - 2y - z = 9 \\ 2x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 4x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 9 \\ 2x + 3y - 2z = -6 \end{cases}$ $\quad$ $\left[S = \{(4, -2, -1)\};\ S = \left\{\left(\frac{1}{2}, -1, 2\right)\right\}\right]$

3 $\begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 3y + 12 = x + z \\ 3x - 11 = y - 2z \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 3x + 2y = 1 + 3z \\ 7x = 12 - 2y \\ 5x - 4z = 6 \end{cases}$ $\quad$ $[S = \{(2, -3, 1)\};\ S = \{(2, -1, 1)\}]$

4 $\begin{cases} x - 2y + z = -4 \\ 3x + y = -3 - 2z \\ 2x - 1 = y + z \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ x + z = \frac{3}{2}(y - z + 1) \\ 2y - 5z = x - 1 \end{cases}$ $\quad$ $[S = \{(0, 1, -2)\};\ S = \{(3, 1, 0)\}]$

5 $\begin{cases} x+y=z+4 \\ x-y+2z=-5 \\ 3x-1=-(2z+y) \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-4y=2z-3 \\ 2x-2y=-1 \\ 2x+z=-1 \end{cases}$ $\left[S=\{(0,\,3,\,-1)\};\; S=\left\{\left(-\frac{3}{2},\,-1,\,2\right)\right\}\right]$

6 $\begin{cases} 3x-4y-5z=5 \\ 7z=15+y+2x \\ x+3y+2z+4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+4y-2z+1=0 \\ y-2=x+z \\ 4x+2z=-7 \end{cases}$ $\left[S=\{(1,\,-3,\,2)\};\; S=\left\{\left(-2,\,\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)\right\}\right]$

Sistemi letterali

7 $\begin{cases} (a-b)x+y-z=1-a \\ 2x-y=\dfrac{2-(a-b)(a+b)}{a-b} \\ (a^2-b^2)x-3y+2z=2a \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\frac{1}{a+b},\,a+b,\,2a+b\right)\right\}\right]$

8 $\begin{cases} x+(a-b)y=a+bz \\ ax+by+bz=a^2+ab \\ ax-ay+bz=a^2-b^2 \end{cases}$ $[S=\{(a,\,b,\,a-b)\}]$

9 $\begin{cases} \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=2z \\ x+y=(a+b)z \\ ax-by+2abz=2 \end{cases}$ $\left[S=\left\{\left(\frac{1}{a},\,\frac{1}{b},\,\frac{1}{ab}\right)\right\}\right]$

10 $\begin{cases} \dfrac{1}{x+3a}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+y}{x^2+3ax} \\ \dfrac{x+2z}{y}+\dfrac{1}{2}=0 \\ x-y+z=2a \end{cases}$ $[S=\{(-a,\,-2a,\,a)\}]$

11 $\begin{cases} \dfrac{x+y-z}{4}=a \\ \dfrac{x+a}{x-2a}+\dfrac{y-a}{x+2a}=\dfrac{x^2+xy+2a^2}{x^2-4a^2} \\ \dfrac{2x+z-3a}{y-a}=-2 \end{cases}$ $[S=\{(a,\,2a,\,-a)\}]$