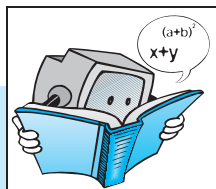


I POLINOMI



Per ricordare

★ La somma di due o più monomi interi che non sono simili si chiama **polinomio**. Anche di un polinomio possiamo definire:

- il **grado complessivo**, che è il più grande fra i gradi dei monomi che lo compongono
- il **grado rispetto ad una lettera**, che il più grande esponente con cui compare quella lettera.

Diciamo poi che un polinomio è:

- **omogeneo** se tutti i suoi monomi sono dello stesso grado che, in tal caso, è anche il grado complessivo del polinomio
- **ordinato** rispetto ad una particolare lettera se le potenze di quella lettera compaiono in ordine crescente o decrescente
- **completo** rispetto ad una lettera se le potenze di quella lettera sono tutte presenti da quella massima al grado zero; il termine di grado zero prende il nome di **termine noto**.

Per esempio, il polinomio $\frac{1}{2}x^4 + 4ax^3 - \frac{3}{2}a^3x^2 - \frac{4}{5}a^2x + \frac{1}{4}a + 1$

- è di grado complessivo 5, è di grado 3 rispetto alla lettera a , è di grado 4 rispetto a x
- non è omogeneo perchè i monomi non hanno tutti lo stesso grado
- è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x ma non è ordinato rispetto alla lettera a
- è completo sia rispetto a x che rispetto ad a .

★ Con i polinomi si possono eseguire le seguenti operazioni:

- **addizione e sottrazione**, sommando algebricamente i monomi simili
- **moltiplicazione per un monomio** applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$$3ab^2 \cdot \left(\frac{2}{3}ab - \frac{1}{2}a^2 + 2b - 1 \right) = 2a^2b^3 - \frac{3}{2}a^3b^2 + 6ab^3 - 3ab^2$$

- **moltiplicazione fra due polinomi:**

$$(2a - 3x^2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}a \right) = 2ax - a^2 - 3x^3 + \frac{3}{2}ax^2$$

- **divisione di un polinomio per un monomio** solo se il monomio è un divisore di tutti i monomi del polinomio; si esegue applicando la proprietà distributiva a sinistra della divisione rispetto all'addizione e dividendo quindi ciascun termine del polinomio per il monomio divisore

$$\left(\frac{1}{3}a^3x^2 - \frac{4}{5}ax^3 + 2a^2x\right) : \left(-\frac{5}{6}ax\right) = -\frac{2}{5}a^2x + \frac{24}{25}x^2 - \frac{12}{5}a$$

★ Alcune operazioni, come l'elevamento a potenza o prodotti particolari, possono essere eseguite tenendo presenti queste regole:

- **quadrato di un binomio:** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
vale a dire: somma dei quadrati dei due termini e del loro doppio prodotto
- **quadrato di un trinomio:** $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
e più in generale: somma dei quadrati di tutti i termini e dei loro doppi prodotti in tutti i modi possibili; nel calcolo dei doppi prodotti fare attenzione al segno
- **cubo di un binomio:** $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3a^2b + 3ab^2$
vale a dire: somma dei cubi dei due termini, ciascuno con il segno che gli compete, e triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo e triplo prodotto del quadrato del secondo termine per il primo
- **somma di due monomi per la loro differenza:** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
vale a dire: differenza fra il quadrato del primo monomio (quello che ha lo stesso segno nei due polinomi) e il quadrato del secondo (quello che ha segno diverso nei due polinomi)

★ La divisione fra due polinomi non dà sempre origine ad un polinomio; in generale, se $P(x)$ e $B(x)$ sono due polinomi ordinati secondo le potenze della lettera x , allora la divisione $P(x) : B(x)$ ha un quoziente $Q(x)$ ed un resto $R(x)$ in modo che

$$P(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Se $P(x)$ ha grado n e $B(x)$ ha grado m , allora $Q(x)$ ha grado $n - m$ e $R(x)$ ha grado minore di m . Per trovare $Q(x)$ e $R(x)$ si segue lo stesso schema della divisione fra numeri.

In particolare, se $B(x) = x - a$, allora il resto R ha grado zero rispetto a x e si ha che $R = P(a)$ (teorema del resto).

Il polinomio $P(x)$ risulta quindi divisibile per il binomio $x - a$ se e solo se $P(a) = 0$ (teorema di Ruffini).

ESERCIZI DI CONSOLIDAMENTO

Semplifica le seguenti espressioni che contengono addizioni e sottrazioni fra polinomi:

$$1 \quad \left(\frac{1}{2}xy + 1\right) - \left[\left(2 + \frac{1}{2}x\right) + \left(\frac{1}{4}x^2y + 2 - \frac{1}{2}x + xy\right)\right] - \left(\frac{3}{2}xy - 3 - \frac{5}{4}x^2y\right) \quad [x^2y - 2xy]$$

$$2 \quad -(b - a) - \left[-(a + 2b - 1) + \left(-\frac{1}{4}ab\right)\right] - \left[\frac{3}{2}a + b - \left(\frac{1}{2}b + 1\right) + \frac{1}{4}ab\right] \quad \left[\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right]$$

$$3 \quad [(b+1) - (b^2 - 1 + a)] + (b+2) - [(b^2 - a) - (ab + a) - 2b^2] - (ab + a) \quad [2b + 4]$$

$$4 \quad \left[-\frac{1}{4}ab + (a^2 - b + 5) - (1 + a^2 - 2b)\right] - \left[\left(-\frac{3}{2}a\right) - \left(-4 - \frac{1}{6}ab\right) + \frac{3}{2}a\right] \quad \left[b - \frac{5}{12}ab\right]$$

$$5 \quad \left[x + y - \left(\frac{4}{3}z - 1\right) + \frac{3}{4}xy + \frac{3}{4} - (-2x)\right] - \left(\frac{2}{3}xy + \frac{3}{4} - \frac{14}{3}z\right) - \left[2z + \left(\frac{4}{3}z + 1\right) + \frac{1}{12}xy\right] \quad [3x + y]$$

$$6 \quad (1 + ab - b) + (b - 2c^2) - \left(\frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}b + c^2\right) - \left\{\frac{1}{2} + \left[\frac{3}{4}ab - \left(\frac{1}{2}b + 3c^2\right)\right]\right\} \quad \left[\frac{1}{2}\right]$$

$$7 \quad -\left(y - \frac{2}{3}\right) - \left[\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + \frac{2}{3}\right] - \left[\left(2y + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{4}x - 3y\right)\right] + \left[3 - \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{4}x - 1\right)\right] \quad \left[-x - \frac{1}{4}\right]$$

$$8 \quad (a^2b + b) - \left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}b + 2\right) - \left[(2b + 1) - \left(\frac{1}{4}a^3 + 3\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) + (a^2b + b) - \frac{1}{4}a^3\right] + 4b \quad \left[\frac{5}{2}b - \frac{1}{2}\right]$$

$$9 \quad \frac{1}{2}xz^3 - \left(\frac{2}{3}y + x\right) - \left[-(1 - x^2) + \left(xz^3 - \frac{2}{3}\right) + (-2xz^3)\right] - \left[\left(-x^2 + \frac{2}{9}xy\right) + 3y - \left(-\frac{3}{2}xz^3 - \frac{6}{27}yx\right)\right] \quad \left[\frac{5}{3} - \frac{11}{3}y - x\right]$$

$$10 \quad \frac{1}{4}x^2y - \left[-(2 - y) + \left(1 + \frac{4}{3}x^2y\right)\right] + 3 - \left\{xy + \frac{1}{4}x^2y + 2 + \frac{1}{2}x - \left[\frac{4}{3}x^2y + \frac{1}{2}x + (-y) - (y + 2)\right]\right\} \quad [-3y - xy]$$

$$11 \quad (ab + c) - \left\{-(c^2 - 1) + ab - \left[c + \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}ab\right)\right]\right\} - \left[\frac{1}{2}ab + \left(2c - \frac{1}{3}\right) - (c^2 - ab)\right] \quad [2c^2 - 2ab]$$

$$12 \quad 4xy^2 - \left[1 - (4xy^2 + 9) - y + \frac{2}{3}y^2\right] - \left[\frac{9}{2}x^2 + 1 + \left(8xy^2 + \frac{5}{2}\right) - xy\right] - \left(\frac{7}{2} + xy - \frac{2}{3}y^2\right) \quad \left[1 + y - \frac{9}{2}x^2\right]$$

Calcola i seguenti prodotti:

$$13 \quad 3ax^2(2x + y) \quad -\frac{3}{5}ax^2y^2(2 + 3x - 5y)$$

$$14 \quad -2xy^3 \cdot (4x^2 - 5x^3y) \quad \frac{3}{2}az \cdot (4a^3z^4 - 2z^5)$$

$$15 \quad 3a^2y^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}ay + \frac{1}{9}a^3y^3\right) \quad \left(\frac{14}{3}a + \frac{7}{2}bx\right) \cdot (-6a^2x)$$

$$16 \quad (a^2 - 2b - 3a) \cdot (-2a^2) \quad \left(x^3 - \frac{5}{4}y^3 + \frac{5}{2}x^2y^2\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}xyz\right)$$

$$17 \quad (x + 4y)(2x - 1) \qquad \left(\frac{2}{3}a^2 - 1\right)\left(\frac{3}{2}a + 2\right)$$

$$18 \quad (x - 3y^2)(x + 2y) \qquad \left(\frac{1}{3}y^2 - 2x\right)\left(\frac{4}{5}x^2 + y\right)$$

19 ESERCIZIO SVOLTO

$$3\left(\frac{3}{2}x + z\right)\left(y + \frac{1}{3}z\right)$$

Moltiplichiamo dapprima i due polinomi lasciando il prodotto fra parentesi:

$$3\left(\frac{3}{2}xy + \frac{1}{2}xz + yz + \frac{1}{3}z^2\right)$$

Poichè non ci sono monomi simili da ridurre, eseguiamo la moltiplicazione per 3:

$$\frac{9}{2}xy + \frac{3}{2}xz + 3yz + z^2$$

$$20 \quad -\frac{1}{2}(x^2 + 1)(x + z) \qquad \frac{1}{3}(x^2 - 1)(x + z + y)$$

$$21 \quad \frac{3}{4}x^2(x - 2y)(3x + y) \qquad 4a(a^2 + a - 1)(a + 1)$$

22 ESERCIZIO SVOLTO

$$(x - 2)(x + 1)(x + 2)$$

Moltiplichiamo i primi due polinomi scrivendo il loro prodotto fra parentesi:

$$(x^2 + x - 2x - 2)(x + 2)$$

Riduciamo i termini simili nel prodotto parziale ottenuto: $(x^2 - x - 2)(x + 2)$

Moltiplichiamo i due polinomi: $x^3 + 2x^2 - x^2 - 2x - 2x - 4$

Riduciamo i monomi simili: $x^3 + x^2 - 4x - 4$

$$23 \quad (4a + 3b)(a + b)\left(\frac{1}{2}a - b\right) \qquad (a - 2b)(2a + b)(a - b)$$

$$24 \quad (x - 2)(x - 1)(x + 1) \qquad \left(\frac{1}{2}x - 2\right)(x + 2)(x - 1)$$

$$25 \quad (x + 2y)(3x - y)(2x + y) \qquad (x + 4y)(x - y)(3x - y)$$

$$26 \quad (a + b - 1)(a - 2b + 1) \qquad (3x + y^2 - xy)(x + xy - y^2)$$

$$27 \quad (ab + a)(b + 1)(b^2 - 1) \qquad (b + 2)(b^2 - 1)(ab + a)$$

$$28 \quad (3x - 2y)\left(\frac{2}{3}y - 4z\right)(-z^2) \qquad (-2y)\left(\frac{2}{5}y - 4z\right)(y^2 - z^2)$$

$$29 \quad (x - 3)(2x + 1)(3x - 1) \qquad (a + b)(2a - b)(a - 3b)$$

$$30 \quad xy(3x - y + 1)(x + y - 2) \qquad (a + 1)(a^2 + 1)(a^2 - 2)$$

Mediante raccoglimento a fattore comune, scrivi i seguenti polinomi sotto forma di prodotto di un polinomio per un monomio:

31 ESERCIZIO SVOLTO

$$2x^3 - 6ax^3 - 4x^2 + 2a^2x^2$$

Il M.C.D. fra i monomi del polinomio è $2x^2$ che è quindi il fattore che si può raccogliere; il polinomio da scrivere come secondo fattore del prodotto si ottiene eseguendo la divisione del polinomio dato per $2x^2$:

$$2x^2 \cdot (x - 3ax - 2 + a^2)$$

$$32 \quad 2x^2y + 2xy^2 + 4xy + 2y^2 + 2y \quad [2y(x^2 + xy + 2x + y + 1)]$$

$$33 \quad \frac{1}{3}x^4 - x^3 + \frac{2}{3}x^2 \quad \left[\frac{1}{3}x^2(x^2 - 3x + 2)\right]$$

$$34 \quad 2a^3 - 2a^2b - 4ab^2 \quad [2a(a^2 - ab - 2b^2)]$$

$$35 \quad a^2b + 4ab^2 + 3b^3 \quad [b(a^2 + 4ab + 3b^2)]$$

$$36 \quad 2x^3z^2 + x^2yz^2 - 2x^3yz - x^2y^2z \quad [x^2z(2xz + yz - 2xy - y^2)]$$

$$37 \quad 2x^3z - 2x^2yz + 2x^2z^2 - 2xyz^2 \quad [2xz(x^2 - xy + xz - yz)]$$

$$38 \quad 3x^3y - 3x^2y^2 + 6x^2yz - 3xy^2z \quad [3xy(x^2 - xy + 2xz - yz)]$$

$$39 \quad \frac{3}{8}x^3z - \frac{3}{4}x^2yz + \frac{1}{4}x^2z - \frac{1}{2}xyz \quad \left[\frac{1}{2}xz\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}xy + \frac{1}{2}x - y\right)\right]$$

$$40 \quad \frac{3}{2}y^2z^2 + 6xy^2z + 9yz^3 + 3xyz^2 \quad \left[3yz\left(\frac{1}{2}yz + 2xy + 3z^2 + xz\right)\right]$$

$$41 \quad a^2b^3 + 2a^2b^2 + a^2b \quad [a^2b(b^2 + 2b + 1)]$$

$$42 \quad a^3b^3 + 2a^3b^2 - a^3b - 2a^3 \quad [a^3(b^3 + 2b^2 - b - 2)]$$

$$43 \quad \frac{1}{2}ab^5 - \frac{1}{2}ab^4 + \frac{1}{2}a^2b^3 + \frac{1}{2}a^2b^2 \quad \left[\frac{1}{2}ab^2(b^3 - b^2 + ab + a)\right]$$

$$44 \quad \frac{1}{2}x^3y^2 - \frac{1}{2}x^2y^2z - \frac{1}{8}xy^2 + \frac{1}{4}xy^2z \quad \left[\frac{1}{2}xy^2\left(x^2 - xz - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z\right)\right]$$

$$45 \quad \frac{2}{5}x^4y^2 + 4x^3y^2 + \frac{6}{5}x^3y^3 - 2x^2y^2 - 8x^2y^3 \quad \left[2x^2y^2\left(\frac{1}{5}x^2 + 2x + \frac{3}{5}xy - 1 - 4y\right)\right]$$

Calcola i seguenti quadrati di binomi.

$$46 \quad (3a + 5)^2 \quad (-2y + 3)^2$$

$$47 \quad (5b - 2)^2 \quad (-3y - 1)^2$$

$$48 \quad (1 - 3x^2)^2 \quad (x^2 - 5y)^2$$

$$49 \quad \left(\frac{1}{2}x - 3y\right)^2 \quad \left(2a - \frac{1}{4}b^2\right)^2$$

$$50 \quad \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}y\right)^2 \qquad \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y^3\right)^2$$

$$51 \quad (1 - b^n)^2 \qquad (a^n - b^2)^2$$

Scrivi i seguenti trinomi come quadrato di un binomio.

52 ESERCIZIO SVOLTO

$$25y^2 + 16 - 40y$$

Dobbiamo individuare i quadrati: $25y^2 = (5y)^2$ $16 = 4^2$

e verificare che il terzo termine sia il loro doppio prodotto $2 \cdot 5y \cdot 4 = 40y$

Allora, poichè il doppio prodotto è negativo:

$$25y^2 + 16 - 40y = (5y - 4)^2$$

Osserviamo inoltre che, poiché un numero ed il suo opposto, elevati al quadrato danno lo stesso risultato, si può anche scrivere

$$(4 - 5y)^2$$

$$53 \quad x^2 - 10x + 25 \qquad a^2 - 6ab + 9b^2 \qquad \left[(x - 5)^2; (a - 3b)^2\right]$$

$$54 \quad y^2 - 6x + 9 \qquad 4x^2 - 4xy + y^2 \qquad \left[(y - 3)^2; (2x - y)^2\right]$$

$$55 \quad 9x^2 - 3x + \frac{1}{4} \qquad 6ab + \frac{9}{4}a^2 + 4b^2 \qquad \left[\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2; \left(\frac{3}{2}a + 2b\right)^2\right]$$

$$56 \quad \frac{1}{9} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^2 \qquad xy + 4x^2 + \frac{1}{16}y^2 \qquad \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x\right)^2; \left(2x + \frac{1}{4}y\right)^2\right]$$

$$57 \quad 9x^2 + 49 + 42x \qquad \frac{9}{16}a^2 + 4b^4 - 3ab^2 \qquad \left[(3x + 7)^2; \left(\frac{3}{4}a - 2b^2\right)^2\right]$$

$$58 \quad 9b^2 + a^4 + 6a^2b \qquad 4y^2 + 9 - 12y \qquad \left[(3b + a^2)^2; (2y - 3)^2\right]$$

Calcola i seguenti quadrati di polinomi.

59 ESERCIZIO SVOLTO

$$\begin{aligned} (2a - x + 3)^2 &= (2a)^2 + x^2 + 9 + 2 \cdot (2a) \cdot (-x) + 2 \cdot (2a) \cdot 3 + 2 \cdot (-x) \cdot 3 = \\ &= 4a^2 + x^2 + 9 - 4ax + 12a - 6x \end{aligned}$$

$$60 \quad (x + 2y - 1)^2 \qquad (a + 3b + 1)^2$$

$$61 \quad (2x - y + 1)^2 \qquad (2a + by - 2)^2$$

$$62 \quad (2x + 2y - 1)^2 \qquad (ab - b^2 + 1)^2$$

$$63 \quad (ax + 2y - a)^2 \qquad (-x - y - 2)^2$$

$$64 \quad \left(-\frac{2}{3}a^2 + 3b + 1\right)^2 \qquad \left(\frac{1}{5}x - 5y + \frac{2}{5}xy\right)^2$$

$$65 \quad \left(-\frac{2}{3}a + 4b + \frac{1}{2}\right)^2 \qquad \left(\frac{1}{3}a + 4b^2 + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$66 \quad \left(\frac{1}{4}x - 3y + \frac{1}{6}\right)^2 \qquad \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 4\right)^2$$

$$67 \quad \left(\frac{1}{3}a + 4ax + \frac{1}{2}x^2\right)^2 \qquad \left(\frac{1}{3}a + b + \frac{1}{3}\right)^2$$

Riconosci nei seguenti polinomi il quadrato di un trinomio.

68 **Esercizio Svolto**

$$x^2 - 4xy + 2x + 4y^2 - 4y + 1$$

Individuiamo i tre quadrati: $x^2 \quad 4y^2 \quad 1 \quad \rightarrow \quad x \quad 2y \quad 1$

Vediamo se i rimanenti termini sono i doppi prodotti:

$$2 \cdot x \cdot 2y = 4xy \qquad 2 \cdot x \cdot 1 = 2x \qquad 2 \cdot 2y \cdot 1 = 4y$$

Quindi, poichè $4xy$ e $4y$ hanno segno negativo, possiamo dire che:

$$x^2 - 4xy + 2x + 4y^2 - 4y + 1 = (x - 2y + 1)^2 \qquad \text{oppure} \qquad (2y - x - 1)^2$$

$$69 \quad a^2 - 6ab + 2a + 9b^2 - 6b + 1 \qquad [(a - 3b + 1)^2]$$

$$70 \quad 4x^2 - 4xy + 4x + y^2 - 2y + 1 \qquad [(2x - y + 1)^2]$$

$$71 \quad 4a^2 - 4aby + 8a + b^2y^2 - 4by + 4 \qquad [(2a - by + 2)^2]$$

$$72 \quad 4x^2 - 8xy + 4x + 4y^2 - 4y + 1 \qquad [(2x - 2y + 1)^2]$$

$$73 \quad a^2b^2 + 2ab^3 + 2ab + b^4 + 2b^2 + 1 \qquad [(ab + b^2 + 1)^2]$$

$$74 \quad \frac{4}{9}a^2 + \frac{16}{3}a^2x + \frac{4}{9}ax^2 + 16a^2x^2 + \frac{8}{3}ax^3 + \frac{1}{9}x^4 \qquad \left[\left(\frac{2}{3}a + 4ax + \frac{1}{3}x^2\right)^2\right]$$

$$75 \quad \frac{1}{9}a^2 - \frac{4}{3}ab - \frac{1}{6}a + 4b^2 + b + \frac{1}{16} \qquad \left[\left(\frac{1}{3}a - 2b - \frac{1}{4}\right)^2\right]$$

Semplifica le seguenti espressioni contenenti quadrati di polinomi:

$$76 \quad (a + a^2 - 1)(x - 1) - [(a + x)^2 - ax + a^2(x - 2)] + x(x + 1) \qquad [1 - a]$$

$$77 \quad 3x(y - 2)^2 + (x + y + 1)(x - y) - [(x + y)(x - y) + 2x] - 3xy(y - 4) \qquad [11x - y]$$

$$78 \quad x^2(y - 1)^2 - [(xy - 2)(xy - 3) - 5x\left(\frac{2}{5}xy - y\right)] - (x - 3)(x + 2) \qquad [x]$$

$$79 \quad \left(\frac{1}{4}x + 2a\right)\left(\frac{1}{3}x + 8a\right) - \left(x + \frac{2}{3}a\right)^2 + (a - x)\left(2a + \frac{1}{3}x\right) + \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{1}{3}a^2 \qquad [18a^2 - x^2]$$

$$80 \quad [(a + 1)(x - 2)^2 - ax^2]\left(\frac{1}{2}a + 2\right) + 5\left[2x\left(a - \frac{1}{5}x\right) + \frac{8}{5}(x - 1)\right] + \frac{1}{2}ax(4a - x) \qquad [10a + 2a^2]$$

$$81 \quad \left[(x+1)^2 - (1-x)^2 \right]^2 \left(-\frac{1}{2}x \right) - 4x^2(1+4x) + 2x(x-1)^2 + 2x(3+x)^2 \quad [20x + 4x^2 - 20x^3]$$

$$82 \quad (a-1)^2 - (a+1+b)^2 + 3b + (2a+b)(b-1) + (a+3)^2 \quad [a^2 + 9]$$

$$83 \quad \left\{ 9 \left[\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b \right)^2 - \frac{1}{3}ab \right]^2 + \frac{7}{16}b^4 \right\} - \left[\left(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \right) \left(\frac{1}{3}a^2 + 2b^2 \right) - (2ab)^2 \right] \quad \left[\frac{11}{3}a^2b^2 \right]$$

$$84 \quad \left(x - a - \frac{1}{2} \right)^2 - \left[- \left(\frac{3}{2}x + a - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \right)^2 \right] - \left[\left(2a - \frac{11}{3} \right) \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \right) + \left(1 - \frac{1}{18} \right) \right] \quad [3x^2 + 2a^2]$$

Calcola i seguenti prodotti notevoli di polinomi.

85 ESERCIZIO SVOLTO

$$\left(3ax - \frac{2}{3}y \right) \left(3ax + \frac{2}{3}y \right) = (3ax)^2 - \left(\frac{2}{3}y \right)^2 = 9a^2x^2 - \frac{4}{9}y^2$$

$$86 \quad \left(ab - \frac{1}{2}b \right) \left(ab + \frac{1}{2}b \right) \quad (ax - 1)(ax + 1)$$

$$87 \quad \left(\frac{5}{2}ab + \frac{1}{4}y \right) \left(-\frac{5}{2}ab + \frac{1}{4}y \right) \quad \left(\frac{2}{3}b + x \right) \left(-\frac{2}{3}b + x \right)$$

$$88 \quad \left(1 - \frac{4}{5}xz \right) \left(-1 - \frac{4}{5}xz \right) \quad \left(\frac{5}{2}x + \frac{3}{4}y \right) \left(\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}y \right)$$

$$89 \quad (xy + y^2)(-xy + y^2) \quad (a^2b^2 - 1)(1 + a^2b^2)$$

$$90 \quad [x - (y + 2)][x + (y + 2)]$$

$$91 \quad (a + b + 3)(a + b - 3)$$

$$92 \quad \left[\left(\frac{1}{3}x + y \right) + (a - 1) \right] \left[\left(\frac{1}{3}x + y \right) - (a - 1) \right]$$

$$93 \quad (x + 2y - 3a)(x - 2y + 3a)$$

$$94 \quad (2a + b - x - 1)(2a + b + x + 1)$$

$$95 \quad (x - 2y - 1 + b)(x - 1 + 2y - b)$$

Scrivi sotto forma di prodotto i seguenti polinomi.

96 ESERCIZIO SVOLTO

$$16x^2 - 9y^2$$

Si tratta della differenza dei quadrati dei monomi $4x$ e $3y$ che è il risultato del prodotto

$$(4x + 3y)(4x - 3y)$$

97	$4a^2 - 9b^2$	$25x^2 - 36y^2$	$[(2a - 3b)(2a + 3b); (5x - 6y)(5x + 6y)]$
98	$\frac{4}{25}a^2 - b^2$	$\frac{1}{4}a^2 - x^2y^2$	$\left[\left(\frac{2}{5}a - b\right)\left(\frac{2}{5}a + b\right); \left(\frac{1}{2}a - xy\right)\left(\frac{1}{2}a + xy\right)\right]$
99	$9x^4 - 16$	$9a^2b^4 - 1$	$[(3x^2 - 4)(3x^2 + 4); (3ab^2 - 1)(3ab^2 + 1)]$
100	$4 - 25x^6$	$\frac{1}{4}a^2 - \frac{9}{25}$	$\left[(2 - 5x^3)(2 + 5x^3); \left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{5}\right)\right]$

Sviluppa i seguenti cubi di binomi.

101 ESERCIZIO SVOLTO

$$\left(2x - \frac{1}{3}b\right)^3$$

$$(2x)^3 + \left(-\frac{1}{3}b\right)^3 + 3(2x)^2\left(-\frac{1}{3}b\right) + 3(2x)\left(-\frac{1}{3}b\right)^2 = 8x^3 - \frac{1}{27}b^3 - 4bx^2 + \frac{2}{3}b^2x$$

102 $\left(a - \frac{1}{2}\right)^3$ $\left(a + \frac{1}{3}b\right)^3$

103 $\left(ax - \frac{1}{3}\right)^3$ $(3x - c)^3$

104 $\left(\frac{3}{2}ab + 2y\right)^3$ $\left(\frac{1}{2}ay + y\right)^3$

105 $\left(\frac{2}{3}b - x^2\right)^3$ $\left(\frac{1}{3}ab + ax\right)^3$

106 $\left(1 - \frac{2}{3}xz\right)^3$ $\left(y - \frac{1}{3}x\right)^3$

107 $\left(-x - \frac{4}{3}y\right)^3$ $\left(\frac{1}{2}x - y^2\right)^3$

Riconosci nei seguenti polinomi il cubo di un binomio.

108 ESERCIZIO SVOLTO

$$8x^3 - y^3 + 6xy^2 - 12x^2y$$

Individuiamo i due cubi: $8x^3 - y^3$ sono i cubi di $2x - y$

Vediamo se i rimanenti termini sono i tripli prodotti:

$$3 \cdot (2x)^2 \cdot (-y) = -12x^2y \quad 3(2x)(-y)^2 = 6xy^2$$

Il polinomio dato è quindi uguale a $(2x - y)^3$

109 $1 - 8x^3 + 12x^2 - 6x$ $27 + x^6 + 9x^4 + 27x^2$ $[(1 - 2x)^3; (3 + x^2)^3]$

$$110 \quad \frac{1}{8}a^3 - 8 - \frac{3}{2}a^2 + 6a \quad -x^3 - \frac{1}{27}a^3 - ax^2 - \frac{1}{3}a^2x \quad \left[\left(\frac{1}{2}a - 2 \right)^3 ; \left(-x - \frac{1}{3}a \right)^3 \right]$$

$$111 \quad 8x^3 + \frac{1}{27}b^3 + 4bx^2 + \frac{2}{3}b^2x \quad x^6 - 8 + 12x^2 - 6x^4 \quad \left[\left(2x + \frac{1}{3}b \right)^3 ; (x^2 - 2)^3 \right]$$

Semplifica le seguenti espressioni.

$$112 \quad (2a - b)^3 - \left[(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2) + (2a - b)^2(a + b) \right] - 3 \left[b(b - 2a)^2 + (a + b)(a^2 - ab + b^2) \right] \quad [21ab^2 - 24a^2b]$$

$$113 \quad \left[\left(x - 2y + \frac{1}{2} \right) \left(x + 2y + \frac{1}{2} \right) - \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^2 - 3(x - 2y)^2 \quad [x^2 + 4y^4 - 4xy^2]$$

$$114 \quad (2a + 3b - 1)(2a - 3b + 1) - 2 \left[(a - 2)(a + 2) + (b - 2)^2 \right] + (3b + 2)^2 - 2(a - b)(a + b) \quad [26b + 3]$$

$$115 \quad (x^3 + 2x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + 1) - x^4(x + 2)^2 \quad [-1]$$

$$116 \quad \left[(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) \right]^3 + (x^6 + y^6)^2 - 3x^4y^4(y^2 + x^2)(y + x)(y - x) \quad [2x^{12} + 2x^6y^6]$$

$$117 \quad (x + y)^3 - (x + 1)^3 - (3xy(x + y) - 3x(x + 1) - y(1 - y)(y + 1)) \quad [y - 1]$$

$$118 \quad \left(x^2 - \frac{3}{2} \right)^3 - 2x^2(x^2 + x - 1)^2 - x^3(3x^2 - 6x + 4) + \left(x^2 + \frac{3}{2} \right)^3 \quad \left[\frac{23}{2}x^2 + 8x^4 - 7x^5 \right]$$

$$119 \quad [(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)]^2 - [(2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 1)]^2 - 20(3 - 4x^4)(3 + 4x^4) \quad [65x^8 + 75]$$

Esegui le seguenti divisioni di un polinomio per un monomio.

120 ESERCIZIO SVOLTO

$$\left(3a^2xy^3 + 4axy^2 - \frac{1}{2}ax^2y \right) : \left(+\frac{2}{3}axy \right)$$

Dividiamo ogni termine del polinomio dividendo per $+\frac{2}{3}axy$:

$$+3a^2xy^3 : \left(+\frac{2}{3}axy \right) = \frac{9}{2}ay^2 \quad +4axy^2 : \left(+\frac{2}{3}axy \right) = 6y \quad -\frac{1}{2}ax^2y : \left(+\frac{2}{3}axy \right) = -\frac{3}{4}x$$

Il quoziente è quindi il polinomio: $\frac{9}{2}ay^2 + 6y - \frac{3}{4}x$

$$121 \quad (9a^2b - 12ab^2) : (+3ab) \quad \left(2ax^2 + \frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{3}{4}ax^3 \right) : \left(-\frac{1}{2}ax \right) \quad \left[3a - 4b; \frac{3}{2}x^2 - ax - 4x \right]$$

$$122 \quad \left(\frac{1}{3}a^3y^3 - \frac{4}{9}a^2y^2 + \frac{1}{15}a^2y \right) : \left(\frac{1}{3}a^2y \right) \quad \left(-bx^4 + \frac{1}{3}b^2x - 6b^3x^2 \right) : \left(-\frac{1}{3}bx \right) \quad \left[ay^2 - \frac{4}{3}y + \frac{1}{5}; 3x^3 - b + 18b^2x \right]$$

123 $(16x^3y^2 - 20x^2y + 24xy^2) : (4xy)$

$(-30a^4b^3 + 4a^3b^2 - 8a^2b) : (2a^2b)$

$[4x^2y - 5 + 6y; -15a^2b^2 + 2ab - 4]$

124 $\left(-\frac{3}{5}x^7b + \frac{6}{5}x^3b^2 - 2x^2b^3\right) : \left(-\frac{1}{5}x^2b\right)$

$\left(3a^4x^3 - \frac{2}{3}a^3x^4 + 4a^5x^5\right) : \left(\frac{2}{3}a^3x^3\right)$

$\left[3x^5 - 6bx + 10b^2; \frac{9}{2}a - x + 6a^2x^2\right]$

Esegui le seguenti divisioni fra polinomi.

125

ESERCIZIO SVOLTO

$x^4 + 2x + 2x^3 - 3 - 2x^2$

Nel preparare lo schema della divisione bisogna scrivere i polinomi ordinati secondo le potenze decrescenti di x :

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 & x^2 + 1 \\
 -x^4 & -x^2 \\
 \hline
 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 & \\
 -2x^3 & -2x \\
 \hline
 -3x^2 & -3 \\
 3x^2 & +3 \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

126 $(2x^4 + x^2 - 1) : (2x^2 - 1)$

$[x^2 + 1]$

127 $(2x^5 - 4x^4 + x^3 + 2x^2 - x) : (2x^2 - 1)$

$[x^3 - 2x^2 + x]$

128 $\left(\frac{3}{2}xy^2 - \frac{3}{2}y^3 + x - y\right) : (x - y)$

$\left[\frac{3}{2}y^2 + 1\right]$

129 $\left(\frac{2}{3}x^3 - x + \frac{4}{3}x^2 - 2\right) : (x + 2)$

$\left[\frac{2}{3}x^2 - 1\right]$

130 $(x^3 - ax^2 - a^2x - 2a^3) : (x - 2a)$

$[x^2 + ax + a^2]$

131 $(2x^4 + 7x^3y - 7x^2y^2 - 14xy^3 + 6y^4) : (x^2 - 2y^2)$

$[2x^2 + 7xy - 3y^2]$

Determina se i seguenti polinomi sono divisibili per i binomi indicati a fianco.

132

ESERCIZIO SVOLTO

$P(x) = x^2 - x - 2 \quad (x + 1); \quad (x - 2); \quad (x - 1)$

Per vedere se $P(x)$ è divisibile per i tre binomi, dobbiamo applicare il teorema del resto:

$P(-1) = 1 + 1 - 2 = 0 \quad \text{è divisibile per } x + 1$

$P(2) = 4 - 2 - 2 = 0 \quad \text{è divisibile per } x - 2$

$P(1) = 1 - 1 - 2 = -2 \quad \text{non è divisibile per } x - 1$

133	$P(x) = x^2 - 1$	$(x + 1);$	$(x + 2);$	$(x - 2)$	[si, no, no]
134	$P(y) = y^2 - 4y + 3$	$(y + 1);$	$(y - 3);$	$(y - 1)$	[no, si, si]
135	$P(t) = t^2 + \frac{5}{2}t + 1$	$\left(t + \frac{1}{2}\right);$	$(t - 2);$	$(t + 2)$	[si, no, si]
136	$P(y) = 2y^3 - 4y + y^2 - 2$	$\left(y + \frac{1}{2}\right);$	$(y - 2);$	$(y + 1)$	[si, no, no]
137	$P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 2x + 3$	$(x - 1);$	$\left(x - \frac{1}{2}\right);$	$\left(x - \frac{3}{2}\right)$	[si, no, no]
138	$P(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2$	$(x - 2);$	$(x + 2);$	$(x - 1)$	[si, no, si]
139	$P(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{4}{3}$	$(x + 1);$	$(x - 2);$	$\left(x + \frac{2}{3}\right)$	[si, si, si]
140	$P(y) = y^3 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + 1$	$\left(y + \frac{1}{2}\right);$	$(y + 2);$	$(y - 1)$	[si, no, si]
141	$P(t) = t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t$	$\left(t + \frac{1}{2}\right);$	$\left(t - \frac{1}{2}\right);$	$(t + 1)$	[no, si, si]

Utilizzando la regola di Ruffini, determina quoziente e resto delle seguenti divisioni:

142 ESERCIZIO SVOLTO

$$(x^3 - 4x^2 + 2) : (x - 2)$$

Il polinomio è già ordinato (se non lo fosse ricorda che prima occorre ordinarlo secondo le potenze decrescenti della variabile). Per preparare lo schema della divisione scriviamo i coefficienti dei suoi termini a partire da quello di grado massimo, facendo attenzione a mettere 0 come coefficiente del termine in x che è mancante e mettiamo il numero 2, che si ricava dal polinomio divisore $x - 2$, sulla sinistra dello schema.

$$a \rightarrow \begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & & 2 & -4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -4 & -6 \end{array}$$

Per trovare i coefficienti del polinomio quoziente, dopo aver abbassato il primo coefficiente, devi moltiplicare ogni volta per 2 e sommare lungo la verticale.

Il polinomio quoziente ha grado 2 ed ha espressione: $x^2 - 2x - 4$

Il resto è -6 .

143	$(y^2 - 4y + 6) : (y - 3)$	[$Q(y) = y - 1; R = 3$]
144	$(x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x - 7) : (x + 2)$	[$Q(x) = x^3 + x^2 + 2x - 3; R = -1$]
145	$(x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 4) : (x - 1)$	[$Q(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 2; R = -2$]
146	$\left(\frac{1}{2}x^5 - \frac{5}{4}ax^4 + \frac{1}{2}a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x - a^5\right) : \left(x - \frac{1}{2}a\right)$	[$Q(x) = \frac{1}{2}x^4 - ax^3 + a^3x + \frac{3}{2}a^4; R = -\frac{1}{4}a^5$]

147 $(x^4 - bx^3 - 2b^2x^2 + 2b^3x - 4b^4) : (x + 2b)$

$[Q(x) = x^3 - 3bx^2 + 4b^2x - 6b^3; R = 8b^4]$

148 $(x^3 - 2bx^2 + 3b^2x - 3b^3) : (x - 2b)$

$[Q(x) = x^2 + 3b^2; R = 3b^3]$

149 $(x^5 - ax^4 - 2a^2x^3 + a^4x - a^5) : (x + a)$

$[Q(x) = x^4 - 2ax^3 + a^4; R = -2a^5]$

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO*Semplifica le seguenti espressioni eliminando le parentesi in una sola volta:***1 ESERCIZIO SVOLTO**

$$\begin{aligned}
 & -\left(-2ab + \frac{1}{4}ab^2\right) - \left[\frac{5}{6}ab - \left(ab^2 + \frac{10}{3}ab\right) - \left(-\frac{7}{3}ab\right)\right] - \left[\frac{4}{3}ab^2 - \frac{2}{3}ab^2 + \left(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{12}ab^2\right)\right] \\
 & = -\underbrace{\left(-2ab + \frac{1}{4}ab^2\right)}_{\text{cambiamo i segni}} - \left[\frac{5}{6}ab - \underbrace{\left(ab^2 + \frac{10}{3}ab\right)}_{\substack{\text{non cambiamo i segni} \\ \text{diventa +}}} - \underbrace{\left(-\frac{7}{3}ab\right)}_{\substack{\text{non cambiamo i segni} \\ \text{diventa +}}}\right] - \left[\frac{4}{3}ab^2 - \frac{2}{3}ab^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}ab + \frac{1}{12}ab^2\right)}_{\substack{\text{cambiamo i segni} \\ \text{diventa -}}}\right] = \\
 & = 2ab - \frac{1}{4}ab^2 - \frac{5}{6}ab + ab^2 + \frac{10}{3}ab - \frac{7}{3}ab - \frac{4}{3}ab^2 + \frac{2}{3}ab^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{12}ab^2 = \frac{5}{3}ab
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{2} \quad & \left(\frac{5}{12}x^2yz + \frac{19}{9}xy^2 + \frac{1}{10}x^3yz\right) - \left(-\frac{20}{9}xy^2z\right) - \left(\frac{4}{5}x^3yz + \frac{5}{3}xy^2z\right) - \left[\left(\frac{1}{2}x^2yz + \frac{1}{9}xy^2 + \right.\right. \\
 & \left.\left. - \frac{3}{10}x^3yz\right) + \left(\frac{5}{9}xy^2z - \frac{3}{4}x^2yz - \frac{2}{5}x^3yz + \frac{2}{3}x^2yz\right)\right] \quad [2xy^2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3} \quad & \left(\frac{4}{3}yz^2 - \frac{1}{3}yz + \frac{2}{3}x^2z^3\right) - \left(xy - \frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{5}yz + \frac{3}{20}y^2\right) - \left[\left(\frac{2}{3}yz^2 + \frac{4}{5}yz^2\right) - \left(\frac{2}{15}yz - x^2z^3 + \right.\right. \\
 & \left.\left. + \frac{1}{3}x^2z^3\right) - \left(-\frac{1}{5}yz\right) - \left(xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{5}y^2\right)\right] \quad \left[-\frac{2}{15}yz^2\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{4} \quad & \frac{5}{2}x^2y - \frac{1}{4}xy + \frac{1}{2}xy^3z - \frac{3}{4}x^2y - \left(\frac{1}{4}xy + \frac{1}{12}xy^3z\right) + \left[\left(\frac{1}{3}xy^3 - 2x^4y - \frac{3}{8}x^2y\right) - \left(\frac{3}{8}x^2y + x^2y\right)\right] + \\
 & -\left(\frac{5}{12}xy^3z - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{3}xy^3 - 3x^4y\right) \quad [x^4y]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{5} \quad & \left(yz^2 + \frac{1}{2}xy + x^2y^2\right) - \left[\left(\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{2}{3}x^2y\right) + \left(\frac{2}{15}x^2z + \frac{1}{5}x^2y^2 + \frac{2}{3}yz^2\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{3}yz^2 - \frac{2}{9}x^2y + \right.\right. \\
 & \left.\left. + \frac{1}{4}xy\right) + \left(\frac{3}{10}x^2y^2 - \frac{1}{3}x^2y\right) - \left(\frac{2}{15}x^2z - \frac{1}{4}xy\right)\right] \quad \left[-\frac{1}{9}x^2y\right]
 \end{aligned}$$

Semplifica le seguenti espressioni:

$$6 \quad \left(\frac{3}{2}a + b\right)\left(\frac{1}{2}b + 1\right) + a\left(\frac{5}{2} + a\right) - \left[(a - b)(a + 2b - 1) + \left(-\frac{1}{4}ab\right)\right] \quad \left[5a + \frac{5}{2}b^2\right]$$

$$7 \quad \left(y - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + \frac{2}{3} - \left[(2y + 1)\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{4}x\right) + \left(1 - \frac{5}{12}\right)(-x)\right] \quad \left[-4y - \frac{5}{2}\right]$$

$$8 \quad \frac{1}{3}a(3a - 5) + a^2b^2 + (ab - 1)\left(\frac{2}{3}ab + \frac{3}{4}\right) - \left[\left(a + \frac{1}{3}\right)(a - 2) + \frac{1}{12}(5ab + 4)(4ab - 3)\right] \quad \left[\frac{11}{12}\right]$$

$$9 \quad (a + b)\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + 2\right) - (2b + 1)\left(\frac{1}{4}a + 3\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)(a + b)(a - b) + 4b + 3 \quad \left[\frac{7}{4}a - \frac{1}{2}ab\right]$$

$$10 \quad \frac{4}{3}a^2 + (x - 3a)(x + 2a) - \left(\frac{1}{2}x^2 - a\right)\left(\frac{2}{3}a + 1\right) - \left[(x + a)\left(\frac{1}{2}x - 3a\right) - \frac{1}{3}a(x^2 - 3)\right] \quad \left[\frac{3}{2}xa - a^2\right]$$

$$11 \quad \left(x - \frac{1}{2}a\right)(x + 1) - ax - \left[\frac{1}{2}(2x + a)(x - a) + (x + 1)(-ax)\right] - a\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \quad \left[x + \frac{1}{2}a^2\right]$$

$$12 \quad (x + y)\left(\frac{2}{3}z - 3\right) + x\left(-\frac{8}{3}z + 1 + 4x\right) - \left[2(2x + z)(x - z) - 2x + \frac{2}{3}y(z - 3)\right] \quad [2z^2 - y]$$

$$13 \quad (a + x)(a - x) + \left(2a - \frac{1}{2}x\right)^2 - \left[\frac{1}{4}(5a - x)(4a + x) - 9a - \frac{1}{2}(x - 1)^2\right] - 9a\left(1 - \frac{1}{4}x\right) \quad \left[\frac{1}{2} - x\right]$$

$$14 \quad \left\{(3x + a)(x - a) + a^2(1 - 2x^2) - \left[(x + 1)(3x - 1) - (-2xa)^2\right] + 2x(a + 1)\right\}(2a^2x^2 - 1) \quad [4a^4x^4 - 1]$$

$$15 \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) - 5ax + (a + 1)^2 - \left[(2x - a)^2 - (x - 1)\left(\frac{2}{3}x + 2a\right) - \frac{1}{3}x(7x + 2)\right] \quad \left[ax + \frac{3}{4}\right]$$

$$16 \quad \frac{1}{4}x^2y + (6y + 2)\left(1 + \frac{4}{3}y^2\right) - \left\{\left(\frac{1}{2}xy + 1\right)\left(2 + \frac{1}{2}x\right) - \left[(-2y)^3 + \frac{1}{2}x + (-3y)\left(\frac{8}{9}y + 2\right)\right]\right\} \quad [-xy]$$

$$17 \quad \left(ax - \frac{1}{2}b + 1\right)\left(ax - 1 + \frac{1}{2}b\right) - \left(ax - 1 + \frac{1}{2}b\right)^2 - (2 - b)\left(ax - 1 + \frac{1}{2}b\right) \quad [0]$$

$$18 \quad \left(1 + \frac{5}{4}ay^2\right)(y - 2) + y\left[x\left(\frac{1}{8}y^2 + a\right) + y\left(\frac{5}{2}a - 1\right)\right] - \frac{11}{8} - \left[(x + 2a)\left(\frac{1}{2}y\right)^3 + (ay - 1)(y^2 + x) + \left(-\frac{3}{2}\right)^3\right] \quad [x + y]$$

$$19 \quad 4\left(\frac{2}{3}y^2 - \frac{1}{2}\right) + (4xy - 1)^2 + x[1 - x(4y^2 + 9) - y] - \left[\left(\frac{9}{2}x^2 + 1\right)\left(\frac{8}{3}y^2 - 2\right) - xy\right] \quad [x - 8xy + 1]$$

$$20 \quad -\frac{1}{2}ax + \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}a\right)\left(\frac{3}{2}a - \frac{4}{3}bx\right) - \left[\left(\frac{1}{4}a + 3x\right)\left(-3a + \frac{8}{3}bx\right) - b\left(\frac{2}{3}x\right)^2\right] - [3x(3a + 2bx) + -2b(x - 2)(x + 2)] \quad [-8b - 12bx^2]$$

$$21 \quad [(a+b)(a+2b-1) - 3ab] \left[\frac{1}{2}a - (a+1)(b-2) \right] - \frac{1}{2}a^3(5-2b) + \frac{1}{2}(a+5b)(a-2b) + \\ + 2b^2(b-1)(a+1) + 2(b+1)^2 + 2a(1-2b^2) \quad [2b+2]$$

$$22 \quad (x+2a)^3 + \left(\frac{3}{4}x^2 - 1 \right) \left(2a - \frac{1}{2}x + 2 \right) - \left[\left(\frac{1}{2}x + a \right)^2 \left(\frac{5}{2}x + 8a + 6 \right) - 6 \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 + 3ax \left(x + \frac{1}{2}a - 2 \right) \right] \\ \left[4a + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right]$$

$$23 \quad 3(x^2+1) + (x-2)(x-1) + x(ax-1)(ax-3) - \left[2(x-2)^2 + x(ax-3)^2 + (2x+5)(x-1) \right] \\ [2ax^2 - 4x + 2]$$

$$24 \quad \left[(x-a)(x+a) - (x-a)^2 + (2a)^2 \right]^2 - \left\{ (2a^2+x^2)^2 - x \left[(-2a)^3 + x^3 + 2 \right] \right\} \quad [2x]$$

$$25 \quad (ax-1)^3 - (x+2)^3 - \left[(ax+3)(2ax-3) - x(x+4)(x+3) + (2ax)^2 \left(\frac{1}{4}ax - \frac{3}{2} \right) \right] - x^2(a-1)(1+a) \\ [2x^2]$$

$$26 \quad \left(\frac{1}{3}ax - \frac{2}{3} \right)^2 (-9a) + (x+a^2)(x-a^2) - [(a^2-1)(4x-a^2) - 4a + x^2(1-a^3)] \quad [4x-a^2]$$

$$27 \quad 2 \left[(a^3-x)^2 + 2a^2(2+ax) - (x-2a)(2a+x) \right] - \left[(a+x-1)(a+1-x) + (x-1)^2 \right]^3 - (-4a)^2 \\ [a^6]$$

$$28 \quad \left(x + \frac{1}{2} \right) (x^2 + 2x + 2) - \left[\left(x - \frac{1}{3} \right) \left(x + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} (5ax - 2a^2) + \frac{3}{4} \right] - \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^3 + x + \right. \\ \left. - \frac{1}{3} (2a+x)(a-3x) + \frac{1}{9} - \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \quad \left[\frac{1}{4}x + \frac{3}{8} \right]$$

$$29 \quad (x+y+z)^2 - (x-y-z)^2 - 2x^2(y+z) + (x-y)^3 - \{ 4xz - 2x(-2y+xz+2y^2) + \\ - [(x^2-3y)(x^2-2y) + y(5x-y)(2x-y)] \} \quad [x^3 + x^4 + 6y^2]$$

$$30 \quad \left[\left(x + \frac{1}{3}a \right)^2 - \frac{1}{9}a^2 \right] \left(x^2 - \frac{2}{3}ax \right) + [(ax+1)(ax-2) - a^2x^2]^2 - [(x-a)(a+x)(2a^2+x^2) + \\ + 4(ax+1) - \left(-\frac{2}{3}ax \right)^2] \quad [2a^4]$$

$$31 \quad \left(x - \frac{3}{2}z \right) \left(x + \frac{1}{2}z \right) - \frac{2}{9}y(-2y+6x-3z) - 2z^2 \left(z - \frac{1}{2} \right) - \left[\left(x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{2}z \right)^2 + (x+z)^3 + \right. \\ \left. - (x^2+z^2)(3z+3x) \right] \quad [2x^3]$$

$$32 \quad (x-z)^2 + \left(\frac{1}{2}y + x - z \right) \left(\frac{1}{2}y + z - x \right) - \left[\left(x + \frac{3}{2}z \right) \left(x + \frac{1}{2}z \right) - (x+3z)(x-z) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2}y - 2z \right) \left(\frac{1}{2}y + 2z \right) \right] \quad \left[\frac{1}{4}z^2 \right]$$

$$33 \quad \left\{ \left[\left(x + \frac{4}{5}y \right) \left(x - \frac{5}{4}y \right) + y^2 \right] : x \right\}^2 - \left(x - \frac{5}{4}y \right)^2 - \frac{2}{5}y \left(4x - \frac{7}{5}y \right) \quad \left[-\frac{4}{5}y^2 \right]$$

$$34 \quad (x+2a)^3 + (x+2a)(2x+a) - \left[\left(\frac{3}{2}x+a \right)^2 - \left(\frac{1}{2}x-a \right) \left(\frac{1}{2}x+a \right) \right] - x[(x+6a)(x+2a) - 2a(x-1)]$$

[8a³]

$$35 \quad \left[\left(\frac{3}{5}ab^2 - \frac{1}{10}ab \right) : \left(\frac{1}{2}ab - \frac{1}{5}ab \right) \right]^2 - (6ab-a) \left(2ab + \frac{1}{3}a \right) : (3a^2)$$

[$\frac{2}{9} - \frac{4}{3}b$]

$$36 \quad \left\{ \left[\left(\frac{1}{3}a-b \right)^2 \left(\frac{1}{3}a+b \right)^2 - b^4 \right] : \left(+\frac{1}{9}a^2 \right) + \left(2b - \frac{1}{3}a \right) \left(2b + \frac{1}{3}a \right) \right\} : \left(-\frac{1}{2}b \right)$$

[-4b]

$$37 \quad [(a^2x^2+1)(a^2x^2-1)+1] : \left(\frac{1}{3}a^3x^3 \right) + [(ax-1)(ax+a) - a(ax-x-1)] : (ax)$$

[4ax]

$$38 \quad \left\{ 5[(ab)^3 : (a^2b^3)] + 2b \right\}^2 + \left[\left(a - \frac{2}{5}ab^2 \right) (5a - 2ab^2) - 5a^2 \right] : \left(\frac{1}{2}ab \right) - (a+2b)(5a+2b)$$

[20a² + $\frac{8}{5}ab^3$]

$$39 \quad \left\{ [(x+2)^3-8] : x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x+3 \right) (x+4) - 6 \right\} : \left(\frac{1}{4}x \right) - (2x-3)^2$$

[15x - 4x² + 5]

$$40 \quad [(ab-ac)^2(bc)^2] : \left[(abc-1)^2 + \frac{1}{2}(2abc-1)(2abc+3) + \frac{1}{2} \right] + \frac{2}{3}bc$$

[$\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}c^2$]

$$41 \quad \left[4a(1-ax) + \left(\frac{1}{3}ax - \frac{2}{3} \right)^2 (-9a) + (x+a^2)(x-a^2) - x^2 \right] : \left(-\frac{1}{2}a^3 \right) - 2 \left(x - \frac{1}{2}a \right) \left(x + \frac{1}{2}a \right)$$

[2a + $\frac{1}{2}a^2$]

$$42 \quad \left[(ax+bx) \left(ax - \frac{1}{2}bx \right)^2 - \frac{1}{4}b^3x^3 \right] : \left[\frac{1}{2}(xa)^5 : (2a^4x^2) \right] + (2b-3a)(3a+2b)$$

[b² - 5a²]

$$43 \quad \left[(xy+xz)^3 : (8x^3) - \left(\frac{1}{2}y-z \right)^3 \right] : \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^3 ((z+10)(z-1) - z^2 + 10) \right] + (y-z)(y+z)$$

[yz - 2z²]

$$44 \quad \left[(x+2z)^3 - 4(3xz^2 + 2z^3) \right] : \left[(4a-x)(x+a) - 3ax - (-2a)^2 \right]$$

[-x - 6z]

$$45 \quad \left\{ [(x+y)^2+x+1] [(x+y)^2-x-1] - (x+y)^4+1 \right\} : (-2x) - \left(\frac{1}{4}x-1 \right)^2$$

[x - $\frac{1}{16}x^2$]

$$46 \quad (x^m+x^n)^2 - (x^m+x^n)(x^m-x^n) - (2x^n-x^m)(x^n-x^m) + x^{2m}$$

[5x^mxⁿ]

$$47 \quad (2a^n-b^n)^2 - (a^n+2b^n)^2 + 8a^n b^n - 3(a^n-2b^n)(a^n+2b^n)$$

[9b²ⁿ]

$$48 \quad (3+x^n)^2 + (2-x^n)(x^n+2) - (1+x^n)(1-x^n+x^{2n}) + (x^n-1)^3$$

[9xⁿ - 3x²ⁿ + 11]

$$49 \quad \left(\frac{1}{2}a+x^n \right) \cdot \left(\frac{1}{2}a-x^n \right) + x^2(1-x^{n-1})^2 - \left(\frac{1}{2}a+x \right) \left(\frac{1}{2}a-x \right)$$

[2x² - 2xⁿ⁺¹]

$$50 \quad \left(\frac{3}{2}x^n - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{3}{2}x^n + \frac{1}{2} \right) + \left[\left(\frac{1}{2}x^n - 1 \right) \left(-1 - \frac{1}{2}x^n \right) \right]^2 - \left(\frac{3}{2}x^n + 1 \right)^2 - \left(\frac{1}{4}x^{2n} \right)^2$$

[-3xⁿ - $\frac{1}{2}x^{2n}$ - $\frac{1}{4}$]

$$51 \quad 3x^n y^{2n} + (x^n - y^n)(x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}) - (x^n - y^n)^3 \quad [3y^n x^{2n}]$$

$$52 \quad \left[(4x^{2n} y^{4m} - 8x^{4n} y^{2m} - x^{4n} y^{4m}) : (2x^{2n} y^{2m}) + (2x^n - y^m)^2 + (-x^n y^m)^2 \right] : y^m \quad \left[3y^m - 4x^n + \frac{1}{2} x^{2n} y^m \right]$$

$$53 \quad \left[(x^n + y^m)(x^{2n} - x^n y^m + y^{2m}) - (x^n + y^m)^3 + 3x^n y^m (x^n - y^m + 1) \right] : (3x^n y^m) \quad [1 - 2y^m]$$

Esegui le seguenti divisioni applicando la regola di Ruffini:

54 ESERCIZIO GUIDATO

$$(2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5) : (2x - 1)$$

Poichè il binomio divisore è $2x - 1$, devi dapprima dividere tutta l'espressione per 2 ottenendo:

$$\left(x^4 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2} \right) : \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

Usa adesso lo schema della divisione con il metodo di Ruffini e moltiplica l'eventuale resto per il valore per cui hai diviso, cioè 2.

$$\left[Q(x) = x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}; R = \frac{21}{4} \right]$$

$$55 \quad (x^3 - 3x^2 + 4x - 1) : (2x - 3) \quad \left[Q(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}; R = \frac{13}{8} \right]$$

$$56 \quad (3x^4 - 6x^2 + x - 9) : (3x + 4) \quad \left[Q(x) = x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{17}{27}; R = -\frac{311}{27} \right]$$

$$57 \quad (2a^3x^3 - 3a^2x^2 + 3ax + 1) : (ax - 1) \quad [Q(x) = 2a^2x^2 - ax + 2; R = 3]$$

$$58 \quad (x^4 + 3bx^3 - 4b^2x^2 + b^3x - 8b^4) : (3x - 2b) \quad \left[Q(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{9}bx^2 - \frac{14}{27}b^2x - \frac{1}{81}b^3; R = \frac{650}{81}b^4 \right]$$

Risolvi i seguenti problemi di vario genere sui polinomi:

$$59 \quad \text{Dato il polinomio } P(x) = x^4 - 2kx^3 + (k+1)x^2 - k + 5, \text{ determina il valore del parametro } k \text{ in modo che sia divisibile per } x + 2. \quad \left[-\frac{25}{19} \right]$$

$$60 \quad \text{Trova per quale valore di } k \text{ il polinomio } P(x) = x^3 + kx^2 - 2kx + 1 \text{ è divisibile per } 2x - 3. \quad \left[\frac{35}{6} \right]$$

$$61 \quad \text{Trova il valore del parametro } a \text{ in modo che il polinomio } P(x) = 2x^3 - (2a+1)x^2 - ax + 3 \text{ abbia resto } 7 \text{ nella divisione per } x - 1. \quad [-1]$$

$$62 \quad \text{Verifica che il polinomio } P(x) = x^2 + (k-1)x + k - 2 \text{ è sempre divisibile per } x + 1 \text{ qualunque sia } k.$$

$$63 \quad \text{Scrivi un polinomio di terzo grado che sia divisibile per } x - 2 \text{ e per } x + 1.$$

Risultati di alcuni esercizi.

17. $2x^2 + 8xy - x - 4y$;

18. $x^2 + 2xy - 3xy^2 - 6y^3$;

20. $-\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2z - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z$;

21. $\frac{9}{4}x^4 - \frac{15}{4}x^3y - \frac{3}{2}x^2y^2$;

23. $2a^3 - 3b^3 - \frac{11}{2}ab^2 - \frac{1}{2}a^2b$;

24. $x^3 - 2x^2 - x + 2$;

25. $6x^3 + 13x^2y + xy^2 - 2y^3$;

26. $a^2 - 2b^2 - ab + 3b - 1$;

27. $ab^4 + 2ab^3 - 2ab - a$;

28. $12xz^3 - 8yz^3 - 2xy^2z + \frac{4}{3}y^2z^2$;

29. $6x^3 - 17x^2 - 4x + 3$;

30. $3xy^2 - 2xy - 5x^2y - xy^3 + 3x^3y + 2x^2y^2$;

60. $x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy - 2x - 4y$;

61. $4x^2 + y^2 + 1 - 4xy + 4x - 2y$;

62. $4x^2 + 4y^2 + 1 + 8xy - 4x - 4y$;

63. $a^2x^2 + 4y^2 + a^2 + 4axy - 2a^2x - 4ay$;

64. $\frac{4}{9}a^4 + 9b^2 + 1 - 4a^2b - \frac{4}{3}a^2 + 6b$;

65. $\frac{4}{9}a^2 + 16b^2 + \frac{1}{4} - \frac{16}{3}ab - \frac{2}{3}a + 4b$;

66. $\frac{1}{16}x^2 + 9y^2 + \frac{1}{36} - \frac{3}{2}xy + \frac{1}{12}x - y$;

67. $\frac{1}{9}a^2 + 16a^2x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{8}{3}a^2x + \frac{1}{3}ax^2 + 4ax^3$;

86. $a^2b^2 - \frac{1}{4}b^2$; $a^2x^2 - 1$.

88. $\frac{16}{25}x^2z^2 - 1$; $\frac{25}{4}x^2 - \frac{9}{16}y^2$.

90. $x^2 - y^2 - 4y - 4$.

92. $\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}xy + y^2 - a^2 + 2a - 1$.

94. $4a^2 + 4ab + b^2 - x^2 - 2x - 1$.

$$a^3 + \frac{4}{3}a^2 - \frac{3}{2}a - 2$$

$$\frac{4}{15}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{8}{5}x^3 - 2xy$$

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2z + \frac{1}{3}x^2y - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z$$

$$8a^3 + 4a^4 - 4a$$

$$2a^3 + 2b^3 + ab^2 - 5a^2b$$

$$\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 4$$

$$3x^3 + 8x^2y - 15xy^2 + 4y^3$$

$$3x^2 - y^4 - 2xy^2 + 2x^2y + 2xy^3 - x^2y^2$$

$$ab^4 + 3ab^3 + ab^2 - 3ab - 2a$$

$$-\frac{4}{5}y^4 + 8y^3z + \frac{4}{5}y^2z^2 - 8yz^3$$

$$2a^3 - 5a^2b - 4ab^2 + 3b^3$$

$$a^5 + a^4 - a^3 - a^2 - 2a - 2$$

$$a^2 + 9b^2 + 1 + 6ab + 2a + 6b$$

$$4a^2 + b^2y^2 + 4 + 4aby - 8a - 4by$$

$$a^2b^2 + b^4 + 1 - 2ab^3 + 2ab - 2b^2$$

$$x^2 + y^2 + 4 + 2xy + 4x + 4y$$

$$\frac{1}{25}x^2 + 25y^2 + \frac{4}{25}x^2y^2 - 2xy + \frac{4}{25}x^2y - 4xy^2$$

$$\frac{1}{9}a^2 + 16b^4 + \frac{1}{4} + \frac{8}{3}ab^2 + \frac{1}{3}a + 4b^2$$

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 16 - \frac{1}{2}xy + 4x - 4y$$

$$\frac{1}{9}a^2 + b^2 + \frac{1}{9} + \frac{2}{3}ab + \frac{2}{9}a + \frac{2}{3}b$$

87. $\frac{1}{16}y^2 - \frac{25}{4}a^2b^2$; $x^2 - \frac{4}{9}b^2$.

89. $y^4 - x^2y^2$; $a^4b^4 - 1$.

91. $a^2 + 2ab + b^2 - 9$.

93. $x^2 - 4y^2 + 12ay - 9a^2$.

95. $x^2 - 2x + 1 - 4y^2 + 4by - b^2$.