Approfondimento

La divisione fra polinomi con più di una variabile

Se un polinomio è funzione di due o più variabili, bisogna sempre specificare rispetto a quale lettera si vuole eseguire la divisione; vediamo un esempio.

$\left(10a^2y + 9a^3 + 6ay^2 + 4y^3\right) : \left(-ay + 2y^2 + 3a^2\right).$

Se consideriamo la lettera y come variabile, dovremo ordinare i polinomi rispetto a tale lettera.

$$\begin{array}{rrrr|l} 4y^3 & +6ay^2 & +10a^2y & +9a^3 & 2y^2-ay+3a^2 \\ \cline{5-5} -4y^3 & +2ay^2 & -6a^2y & & 2y+4a \\ \cline{1-4} & +8ay^2 & +4a^2y & +9a^3 & \\ & -8ay^2 & +4a^2y & -12a^3 & \\ \cline{1-4} & & +8a^2y & -3a^3 & \end{array}$$

Quindi $Q(y) = 2y + 4a \qquad R(y) = 8a^2y - 3a^3$

La divisione si arresta perché il grado dell'ultimo resto parziale è minore di quello del polinomio divisore (rispetto a y, grado del resto 1, grado del divisore 2). Se eseguiamo la divisione rispetto alla lettera a troviamo:

$$\begin{array}{rrrr|l} 9a^3 & +10a^2y & +6ay^2 & +4y^3 & 3a^2-ay+2y^2 \\ \cline{5-5} -9a^3 & +3a^2y & -6ay^2 & & 3a+\dfrac{13}{3}y \\ \cline{1-4} & +13a^2y & & +4y^3 & \\ & -13a^2y & +\dfrac{13}{3}ay^2 & -\dfrac{26}{3}y^3 & \\ \cline{1-4} & & \dfrac{13}{3}ay^2 & -\dfrac{14}{3}y^3 & \end{array}$$

Quindi $Q(a) = 3a + \dfrac{13}{3}y \qquad R(a) = \dfrac{13}{3}ay^2 - \dfrac{14}{3}y^3$

Osserviamo che il quoziente e il resto della divisione sono diversi nei due casi.
Il polinomio dato si può quindi scrivere in uno qualsiasi dei seguenti modi:

$$10a^2y + 9a^3 + 6ay^2 + 4y^3 = \begin{cases} (2y+4a)\left(2y^2 - ay + 3a^2\right) + 8a^2y - 3a^3 \\ \left(3a + \dfrac{13}{3}y\right)\left(3a^2 - ay + 2y^2\right) + \dfrac{13}{3}ay^2 - \dfrac{14}{3}y^3 \end{cases}$$

In generale, eseguendo la divisione rispetto a variabili diverse si ottengono quozienti e resti che sono diversi. Solo se il resto è zero i due quozienti sono uguali, anche se appaiono ordinati in modo diverso:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -6x^2y & +11xy^2 & -6y^3 & x-2y \\ \cline{5-5} -x^3 & +2x^2y & & & x^2-4xy+3y^2 \\ \cline{1-4} & -4x^2y & +11xy^2 & -6y^3 & \\ & +4x^2y & -8xy^2 & & \\ \cline{1-4} & & 3xy^2 & -6y^3 & \\ & & -3xy^2 & +6y^3 & \\ \cline{1-4} & & & 0 & Q(x) = x^2-4xy+3y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} -6y^3 & +11xy^2 & -6x^2y & +x^3 & -2y+x \\ \cline{5-5} +6y^3 & -3xy^2 & & & 3y^2-4xy+x^2 \\ \cline{1-4} & 8xy^2 & -6x^2y & +x^3 & \\ & -8xy^2 & +4x^2y & & \\ \cline{1-4} & & -2x^2y & +x^3 & \\ & & +2x^2y & -x^3 & \\ \cline{1-4} & & & 0 & Q(y) = 3y^2-4xy+x^2 \end{array}$$

Calcola il quoziente e il resto delle seguenti divisioni tra polinomi con più di una variabile.

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

$(2ax^2 + a^2x + a^3) : (2x - a)$

Consideriamo la x come variabile e impostiamo la tabella mettendo i polinomi in ordine decrescente rispetto alla x.

$$\begin{array}{lr|l}
 & 2ax^2 + a^2x + a^3 & 2x - a \\ \cline{3-3}
 & -2ax^2 + a^2x & ax + a^2 \\ \cline{2-2}
\text{primo resto} \rightarrow & +2a^2x + a^3 & \uparrow\ \uparrow\ \text{primo e secondo quoziente} \\
 & -2a^2x + a^3 & \\ \cline{2-2}
 & 2a^3 & \rightarrow \text{secondo resto}
\end{array}$$

Osserviamo che il resto, rispetto alla lettera x, è di grado zero e quindi la divisione è terminata.
Avremo dunque: $Q(x) = ax + a^2$ e $R = 2a^3$.

2 $(x^3 - bx^2 + 2b^2x + b^3) : (x^2 + 2b^2)$ $[Q(x) = x - b,\ R = 3b^3]$

3 $(2x^2 - bx + 2b^2) : (x - b)$ $[Q(x) = 2x + b,\ R = 3b^2]$

4 $(bx^4 + b^3x^2 - 2b^5) : (-bx^2 + b^3)$ $[Q(x) = -x^2 - 2b^2,\ R = 0]$

5 $(ax^3 + 2a^2x^2 + a^3x + a^4) : (x^2 - ax + a^2)$ $[Q(x) = ax + 3a^2,\ R = 3a^3x - 2a^4]$

Esegui le seguenti divisioni esatte fra polinomi a coefficienti letterali.

6 $\left(\frac{3}{2}m^3v + m^4 + v + \frac{1}{2}m^2v^2 + mv^3\right) : (m + v)$ $\left[Q(m) = m^3 + \frac{1}{2}m^2v + v^3\right]$

7 $(x^4 - 3ax^3 - 2a^2x^2 + 9a^3x - 3a^4) : (x^2 - 3a^2)$ $[Q(x) = x^2 - 3ax + a^2]$

8 $(a^5 - 4a^4 + 6a^3 - 9a^2 + 14a - 8) : (a^2 - 3a + 2)$ $[Q(a) = a^3 - a^2 + a - 4]$

9 $(6x^4 - 19x^3y + 12x^2y^2 - 7xy^3 + 5y^4) : (2x - 5y)$ $[Q(x) = 3x^3 - 2x^2y + xy^2 - y^3]$

10 $\left[x^3 + 2x^2 - (a^2 - 6a + 2)x - 2a^2 + 5a + 3\right] : (x - a + 3)$ $[Q(x) = x^2 + (a - 1)x + 2a + 1]$

11 $(3x^4 - 9ax^3 + 11a^2x^2 + 3a^3x - 4a^4) : (3x^2 - a^2)$ $[Q(x) = x^2 - 3ax + 4a^2]$