Concetti chiave e regole

I numeri razionali

Una frazione si ottiene combinando in modo ordinato coppie di numeri naturali; diciamo che due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono **equivalenti** se $ad = bc$. Si chiama **numero razionale** ogni sottoinsieme di frazioni tra loro equivalenti.
Per rappresentare un numero razionale si può usare una qualunque delle frazioni tra loro equivalenti oppure il numero decimale, finito o periodico, corrispondente.
Se, con le stesse convenzioni adottate per i numeri interi, associamo ad ogni numero razionale assoluto un segno $+$ e un segno $-$ (tranne che allo zero cui non si attribuisce segno) otteniamo l'insieme Q dei numeri razionali relativi.

Le potenze e le proprietà delle potenze

La potenza di un numero razionale si definisce in modo analogo a quella di un numero intero:

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n \text{ volte}}$ se $n > 1$

In Q è possibile dare un significato anche alle potenze con esponente negativo; assumendo $n > 0$:

- $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

Si pone poi: $a^1 = a$ per ogni a $\quad a^0 = 1$ se $a \neq 0$ $\quad$ non si attribuisce significato alla scrittura 0^0.
Se n e m sono due numeri interi, tenendo presenti le considerazioni fatte sulla base della potenza, valgono le seguenti proprietà:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\quad a^n : a^m = a^{n-m}$ $\quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$ $\quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\quad (a : b)^n = a^n : b^n$

Percentuali, rapporti e proporzioni

La percentuale $p\%$ equivale alla frazione $\frac{p}{100}$: $\quad 30\%$ è la stessa cosa di $\frac{30}{100}$

Rapporto fra due numeri a e b, con $b \neq 0$, è il quoziente $a : b$.

Una **proporzione** è l'uguaglianza fra due rapporti $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ (con b, $d \neq 0$) e si scrive $a : b = c : d$

Per essa vale la proprietà fondamentale $a \cdot d = b \cdot c$

A partire dalla proporzione $a : b = c : d$ (dove supponiamo che i quattro numeri siano diversi da zero) se ne possono ottenere altre applicando le seguenti proprietà:

- permutare: $a : c = b : d \qquad d : b = c : a$
- invertire: $b : a = d : c$
- comporre: $(a + b) : a = (c + d) : c \qquad (a + b) : b = (c + d) : d$
- scomporre: $(a - b) : a = (c - d) : c \qquad (a - b) : b = (c - d) : d$.

I numeri reali

Ci sono operazioni, come per esempio l'estrazione di radice, che portano a considerare numeri che non sono razionali. Si chiamano **irrazionali** quei numeri che si possono esprimere mediante un numero decimale illimitato non periodico, vale a dire un numero le cui cifre decimali si susseguono senza mai ripetersi in successione costante.
L'unione fra l'insieme dei numeri razionali e l'insieme dei numeri irrazionali dà origine all'**insieme dei numeri reali**. Un numero reale è quindi un numero che è razionale oppure irrazionale.