CAPITOLO 1

Luoghi, sistemi di riferimento e curve

Obiettivi

- riferire l'equazione di una curva ad un sistema di riferimento diverso da quello cartesiano
- scrivere l'equazione di una curva in coordinate logaritmiche
- scrivere l'equazione di una curva in forma parametrica
- individuare metodi per valutare errori di misura e saper gestire la loro propagazione

1. I LUOGHI DI PUNTI E IL SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 19

Conosciamo, per averlo più volte espresso, il concetto di luogo di punti.

Luogo di punti è l'insieme di tutti e soli i punti che possiedono una medesima proprietà che viene detta *proprietà caratteristica del luogo*.

Per esempio, nel piano:

- la parabola è il luogo dei punti equidistanti dal fuoco e dalla direttrice
- la circonferenza è il luogo dei punti equidistanti dal centro
- l'asse di un segmento è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento

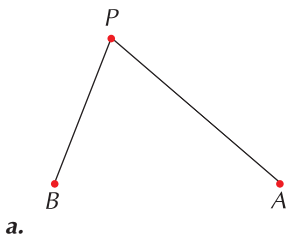
e così via.

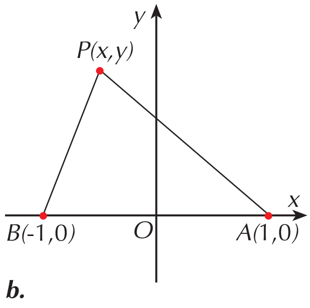
Un luogo di punti è sempre una figura geometrica e i luoghi ricordati ne sono un esempio. Se il luogo si riferisce ai punti di un piano, fissando un sistema di riferimento cartesiano ortogonale si può scrivere l'equazione del luogo che ne costituisce il modello algebrico.
Cerchiamo, per esempio, l'equazione del luogo dei punti del piano per i quali è costante ed è uguale a 2 il rapporto delle distanze da due punti fissi A e B. Con riferimento alla ***figura 1a***, dobbiamo cercare il luogo dei punti P per i quali $\dfrac{PA}{PB} = 2$.
Lavoriamo nel piano cartesiano e fissiamo il sistema di riferimento in modo che l'origine O sia il punto medio del segmento AB e scegliamo come unità di misura il segmento OA; in questo modo (***figura 1b***):

$$A(1,\ 0) \qquad\qquad B(-1,\ 0)$$

P è il punto che descrive il luogo ed ha quindi coordinate variabili $(x,\ y)$.

Figura 1





Essendo: $\overline{PA} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ $\qquad$ $\overline{PB} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

l'equazione del luogo è: $\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = 2$

che, svolgendo i calcoli, diventa:

$$3x^2 + 3y^2 + 10x + 3 = 0 \qquad \text{cioè} \qquad x^2 + y^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0$$

Il luogo cercato è quindi una circonferenza avente centro in $C\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ e raggio $r = \frac{4}{3}$.

Per trovare l'equazione di un luogo di punti nel piano è quindi necessario:
- individuare la regola che esprime la proprietà caratteristica
- fissare un sistema di riferimento nel piano
- scrivere l'equazione che rappresenta il modello algebrico della regola individuata.

Di seguito presentiamo altri esempi.

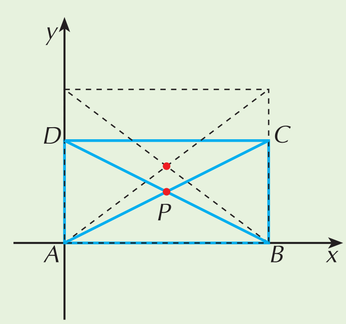
ESEMPI

1. Un rettangolo $ABCD$ ha un lato variabile e un lato di lunghezza fissa 4; qual è il luogo dei punti d'intersezione delle sue diagonali?

Regola che esprime la proprietà caratteristica: essere il punto di intersezione delle diagonali di un rettangolo.

Fissiamo il sistema di riferimento cartesiano in modo che il rettangolo abbia il lato fisso sull'asse x, ponendo per esempio il primo vertice A nell'origine; in questo modo $A(0, 0)$ e $B(4, 0)$ (***figura 2***).

Figura 2



Gli altri due vertici C e D del rettangolo hanno l'ascissa uguale rispettivamente a quelle dei punti B ed A e ordinate variabili, uguali tra loro, che indichiamo con k; quindi: $C(4, k)$ e $D(0, k)$.

Il punto d'intersezione delle diagonali si determina risolvendo il sistema delle rette AC e BD:

- equazione della retta AC: $\quad y = \frac{k}{4}x$
- equazione della retta BD: $\quad y = -\frac{k}{4}x + k$
- punto d'intersezione: $\quad \begin{cases} y = \frac{k}{4}x \\ y = -\frac{k}{4}x + k \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2}k \end{cases} \quad \rightarrow \quad P\left(2, \frac{1}{2}k\right)$

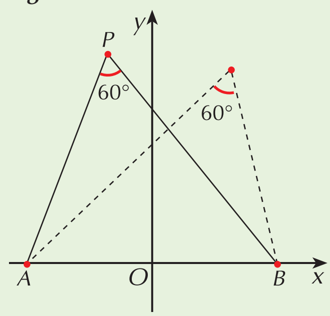
L'ascissa del punto P è fissa e vale 2, mentre la sua ordinata è variabile; questo ci dice che P appartiene alla retta $x = 2$ qualunque sia il valore di k.
Il luogo dei punti cercato è quindi la retta asse del segmento AB.

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

2. Due punti A e B devono essere visti da un punto P sotto un angolo di $60°$. Qual è il luogo dei punti P?

Regola che esprime la proprietà caratteristica: l'angolo $\widehat{APB}$ deve essere di $60°$ (***figura 3a***).
Fissiamo il sistema di riferimento in modo che i punti A e B appartengano all'asse x e l'origine sia il punto medio del segmento AB; scegliendo come unità di misura il segmento OB, avremo che $A(-1, 0)$ e $B(1, 0)$.
Il luogo cercato è quello per il quale le rette PA e PB formano un angolo di $60°$; l'angolo α formato da due rette di coefficienti angolari m e m' soddisfa la relazione

Figura 3a



$$\tan \alpha = \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}$$

nella quale viene definita la tangente sia dell'angolo acuto che dell'angolo ottuso che le due rette formano; se si vuole considerare solo l'angolo acuto (cioè valori positivi della tangente) occorre considerare il modulo dell'espressione al secondo membro.
Posto $P(x, y)$, abbiamo che:

- i coefficienti angolari delle rette PA e PB sono rispettivamente: $m_{PA} = \dfrac{y-0}{x+1}$ $\qquad m_{PB} = \dfrac{y-0}{x-1}$
- $\tan 60° = \sqrt{3}$

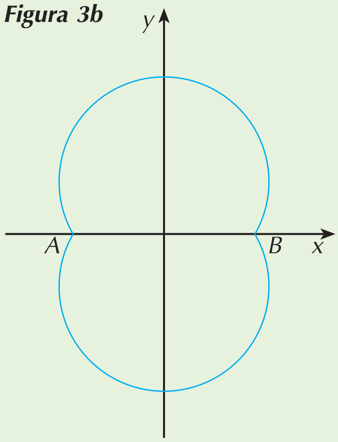
Il luogo cercato ha quindi equazione: $\sqrt{3} = \left| \dfrac{\dfrac{y}{x+1} - \dfrac{y}{x-1}}{1 + \dfrac{y}{x+1} \cdot \dfrac{y}{x-1}} \right| \quad \rightarrow \quad \sqrt{3} = \left| \dfrac{-2y}{x^2 + y^2 - 1} \right|$

Tenendo presente che, per questioni geometriche, i punti P rendono positivo il denominatore di questa relazione (i punti che rendono positivo il denominatore sono quelli esterni alla circonferenza avente centro nell'origine e raggio unitario, quindi tutti i punti P tali che $\widehat{APB} < 90°$), l'equazione del luogo è:

$$\sqrt{3} = \frac{2|y|}{x^2 + y^2 - 1} \qquad \text{cioè} \qquad x^2 + y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}|y| - 1 = 0$$

Per $y \geq 0$ essa diventa $x^2 + y^2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}y - 1 = 0$ e rappresenta l'arco di circonferenza di centro $C\left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e raggio $r = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ che appartiene al semipiano positivo delle ordinate.
Per $y < 0$ essa diventa $x^2 + y^2 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}y - 1 = 0$ ed ottieniamo l'arco simmetrico del precedente che si trova nel semipiano negativo delle ordinate.
Il grafico di questo luogo è quello in ***figura 3b***.

Figura 3b



VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Quali tra i seguenti sono esempi di luoghi di punti?

a. l'ellisse
b. un ramo di iperbole
c. un arco di circonferenza
d. la bisettrice di un angolo.

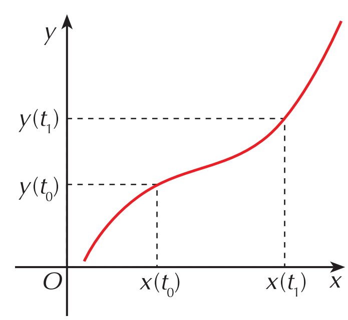
2. Nel piano cartesiano, il luogo dei punti equidistanti dall'origine e dal punto $A(2, 2)$ è:
a. la retta di equazione $y = x + 2$ **b.** la retta di equazione $y = -x + 2$
c. la circonferenza di centro $(1, 1)$ e raggio 1 **d.** l'ellisse di centro O che passa per A.

2. EQUAZIONI PARAMETRICHE E CURVE IN CINEMATICA

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 20

La cinematica si occupa di studiare i moti descrivendo tramite modelli matematici la posizione di un corpo in un fissato sistema di riferimento. Consideriamo un punto che si muove su un piano descrivendo una certa curva; fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, la sua posizione è individuata, istante dopo istante, da una coppia di coordinate (x, y) ciascuna delle quali dipende dal tempo t.
Per esempio, se il punto P si muove lungo la linea rappresentata in ***figura 4***, all'istante t_0 l'ascissa di P è $x_0 = x(t_0)$ e la sua ordinata è $y_0 = y(t_0)$; all'istante t_1 l'ascissa P è $x_1 = x(t_1)$ e la sua ordinata è $y_1 = y(t_1)$, e così via. In casi come questo l'ascissa e l'ordinata di un punto che appartiene a una curva sono date in funzione di un parametro t.
Il moto di una pallina che viene lanciata con una certa velocità è un esempio di un moto di questo tipo; se la velocità di lancio è di $4m/s$ ed ha un'inclinazione di 30° rispetto alla linea orizzontale (***figura 5a***), il moto lungo l'asse x è rettilineo uniforme con velocità $v_x = 2\sqrt{3}$m/s, quello lungo l'asse y è uniformemente accelerato con accelerazione $g = 9{,}8\text{m/s}^2$ e velocità iniziale $v_y = 2$m/s.

Figura 4



Se il sistema di riferimento è fissato come in ***figura 5b***:

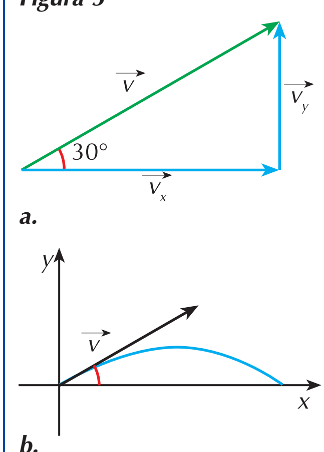
- il moto in orizzontale è descritto dalla legge

$$x = v_x \cdot t \qquad \text{cioè} \qquad x = 2\sqrt{3}t$$

- il moto in verticale è descritto dalla legge

$$y = v_y \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{cioè} \qquad y = 2t - 4{,}9t^2$$

Figura 5



La posizione del punto P nel piano dove avviene il moto è quindi descritta da entrambe le equazioni contemporaneamente, cioè dal sistema:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{3}t \\ y = 2t - 4{,}9t^2 \end{cases}$$

Molti fenomeni, per essere descritti in modo completo, hanno bisogno di una rappresentazione algebrica di questo tipo nel quale le coordinate di un punto dipendono entrambe da uno stesso parametro. In generale, possiamo dire che:

L'EQUAZIONE PARAMETRICA DI UNA CURVA

fissato un sistema di riferimento cartesiano, l'equazione di una curva si può esprimere in forma parametrica mediante il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

dove le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ esprimono le coordinate di un punto P della curva in funzione di t.

Vediamo come si possono esprimere in forma parametrica le equazioni dei principali luoghi di punti.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Le equazioni parametriche di una retta

Sappiamo che l'equazione di una retta che passa per due punti assegnati di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) ha la forma

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

che, se poniamo $x_2-x_1=\ell$ e $y_2-y_1=p$, possiamo scrivere in questo modo

$$\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{p}$$

Se ora indichiamo con t il valore comune delle due espressioni, se poniamo cioè $\frac{x-x_1}{\ell}=t$ e $\frac{y-y_1}{p}=t$, otteniamo le equazioni parametriche della retta.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=\ell t+x_1} \\ \boldsymbol{y=pt+y_1} \end{cases}$$

Per esempio, la retta che passa per i punti $A(1,\,-2)$ e $B(-3,\,0)$, ha equazione:

- considerando A come primo punto e B come secondo

  $\ell=x_2-x_1=-3-1=-4 \qquad p=y_2-y_1=0+2=2 \qquad \begin{cases} x=-4t+1 \\ y=2t-2 \end{cases}$

- considerando B come primo punto e A come secondo

  $\ell=1+3=4 \qquad p=-2-0=-2 \qquad \begin{cases} x=4t-3 \\ y=-2t \end{cases}$

Le equazioni parametriche di una retta non sono definite in modo unico perché basta prendere i punti in ordine inverso oppure scegliere altri due punti della retta per ottenere equazioni diverse.

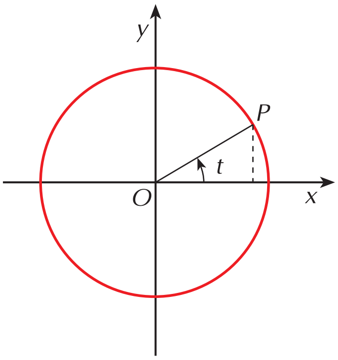
Le equazioni parametriche di una conica

La circonferenza

Consideriamo la circonferenza di raggio r avente centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali (***figura 6***). Le coordinate di un punto P della circonferenza, indicando con t l'angolo orientato che la semiretta OP forma con il semiasse positivo delle ascisse, sono date dalle relazioni

$$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases} \qquad \text{con} \quad t\in[0,\,2\pi)$$

Figura 6



Queste dunque sono le equazioni parametriche di una circonferenza avente centro nell'origine; se il centro è un punto di coordinate $(a,\,b)$, basta applicare alle precedenti equazioni la traslazione di vettore $\vec{v}(a,\,b)$ ottenendo

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=a+r\cos t} \\ \boldsymbol{y=b+r\sin t} \end{cases}$$

Per esempio, la circonferenza di centro $C\left(-\frac{1}{2},\,1\right)$ e raggio $r=3$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}+3\cos t \\ y=1+3\sin t \end{cases}$$

La parabola

Per scrivere le equazioni parametriche di una parabola basta porre uguale a t la variabile indipendente dell'equazione; abbiamo così:

- $\begin{cases} \boldsymbol{x = t} \\ \boldsymbol{y = at^2 + bt + c} \end{cases}$ se la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse $\boldsymbol{y}$

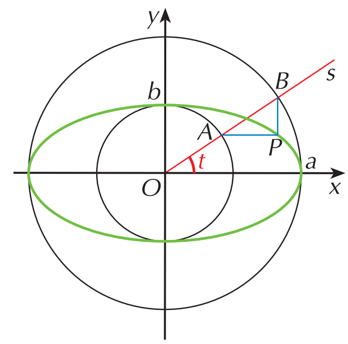
- $\begin{cases} \boldsymbol{x = at^2 + bt + c} \\ \boldsymbol{y = t} \end{cases}$ se la parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse $\boldsymbol{x}$

L'ellisse

La costruzione di un'ellisse può essere fatta con riga e compasso disegnando due circonferenze concentriche aventi come raggi i semiassi dell'ellisse (***figura 7***); una semiretta s uscente dall'origine (centro comune delle due circonferenze) le interseca in A e B.
Tracciata da A la parallela all'asse x e da B la parallela all'asse y, il loro punto di intersezione P appartiene all'ellisse.
Indicato con t l'angolo formato dal semiasse positivo delle ascisse con la semiretta s, i punti A e B hanno coordinate

$$A(b\cos t,\ b\sin t) \qquad\qquad B(a\cos t,\ a\sin t)$$

Figura 7



Il punto P ha la stessa ascissa di B e la stessa ordinata di A:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_P = a\cos t} \\ \boldsymbol{y_P = b\sin t} \end{cases} \qquad \text{con} \quad t \in [0,\ 2\pi)$$

Al variare di t, queste equazioni descrivono l'ellisse.
Per esempio, l'ellisse di semiassi $a = 3$ e $b = 2$ ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

L'iperbole

Si dimostra che le equazioni parametriche di un'iperbole sono:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = b\tan t \end{cases} \qquad \text{con} \quad t \in [0,\ 2\pi] \ \wedge \ t \neq \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

dove a è il semiasse trasverso e b quello non trasverso.
Per esempio, l'iperbole di semiasse trasverso $a = 1$ e semiasse non trasverso $b = 3$ ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t} \\ y = 3\tan t \end{cases}$$

ESEMPI

1. Scriviamo le equazioni parametriche della retta di coefficiente angolare 2 che passa per il punto $A(3,\ -1)$.

Osserviamo che, avendo posto $x_2 - x_1 = \ell$ e $y_2 - y_1 = p$, il coefficiente angolare della retta è proprio il rapporto $\frac{p}{\ell}$; possiamo quindi porre $p = 2$ e $\ell = 1$ (oppure $p = 4$ e $\ell = 2$ e così via, in modo che il rapporto sia sempre 2) e scrivere l'equazione della retta: $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

2. Determiniamo la forma parametrica dell'equazione della circonferenza che ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 2 = 0$.

Troviamo innanzi tutto centro e raggio della circonferenza: $C(1, -3)$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 36 - 8} = 2\sqrt{2}$.

L'equazione in forma parametrica è quindi $\begin{cases} x = 1 + 2\sqrt{2} \cos t \\ y = -3 + 2\sqrt{2} \sin t \end{cases}$

3. Il moto di un punto nel piano è descritto dalle equazioni $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$; dopo aver individuato il tipo di traiettoria, scriviamone l'equazione cartesiana.

La forma dell'equazione indica che si tratta di un'ellisse di semiassi $a = 2$ e $b = 1$. La traiettoria descritta dal punto è quindi l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

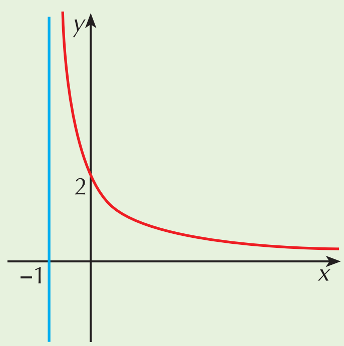
4. Individuiamo la traiettoria descritta da un punto la cui posizione in un sistema di riferimento cartesiano è descritta dalle equazioni $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$.

Dobbiamo eliminare il parametro t dalle equazioni; ricaviamo la sua espressione dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda:

$$t = \frac{x+1}{2} \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{2}{x+1}$$

Tenendo presente che deve essere $t \geq 0$, quindi $x \geq -1$, e considerando che la funzione non è definita per $x = -1$, la traiettoria è l'arco di iperbole equilatera avente per asintoti l'asse x e la retta $x = -1$ in ***figura 8***.

Figura 8



VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. La retta che passa per i punti di coordinate $(1, -1)$ e $(2, 3)$ ha equazione (sono possibili più alternative):

a. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 4t \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -4t - 1 \end{cases}$

2. La circonferenza che ha centro nell'origine e raggio 3 ha equazione parametrica:

a. $\begin{cases} x = 9 \cos t \\ y = 9 \sin t \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x = 3 \sin t \\ y = 3 \cos t \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

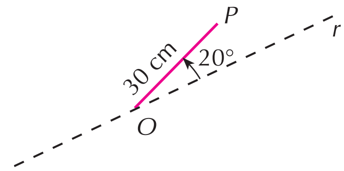
3. IL SISTEMA DI RIFERIMENTO POLARE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 22

Il sistema di riferimento cartesiano non è il solo modo per individuare la posizione di un punto nel piano.
Pensiamo ad una situazione reale: dobbiamo dare delle indicazioni precise ad un robot che deve tracciare il percorso di un utensile su un piano. Supponiamo che il robot stia procedendo in modo rettilineo in una certa direzione r; per indicargli che deve raggiungere un punto P dalla posizione O in cui si trova

(***figura 9***) basta ad esempio dirgli in modo opportuno: «Gira a sinistra di 20° e vai avanti di 30cm». In sostanza, basta fornirgli un numero reale che rappresenta la distanza di P da O (cioè il modulo del vettore $\overrightarrow{OP}$) e l'ampiezza dell'angolo che la direzione r precedente forma con $\overrightarrow{OP}$.

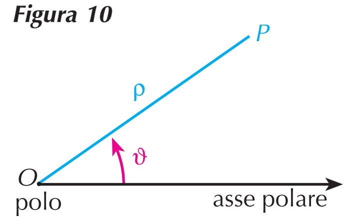
Figura 9



Per individuare un punto nel piano si può far riferimento ad un altro sistema di coordinate, che chiameremo **coordinate polari**, e che viene definito in questo modo. In un piano fissiamo (***figura 10***):

- un punto O che chiamiamo **polo**
- una semiretta orientata avente origine in O, detta **asse polare**
- una unità di misura per i segmenti
- il verso antiorario come verso positivo per la misura degli angoli orientati.

Figura 10



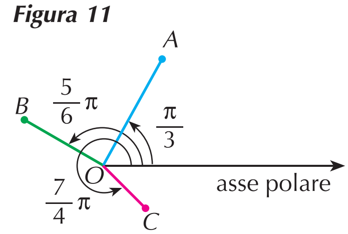
In questo modo, un qualsiasi punto P del piano può essere individuato assegnando la misura ρ del segmento OP e quella ϑ dell'angolo orientato che la semiretta OP forma con l'asse polare. E' evidente che l'angolo ϑ è definito a meno di multipli dell'angolo giro; infatti ogni punto P è definito sia dalla coppia $(\rho,\ \vartheta)$ sia dalla coppia $(\rho,\ \vartheta + 2k\pi)$.

Viceversa, dati due numeri reali $(\rho,\ \vartheta)$, dove $\rho > 0$ e ϑ è definito a meno di multipli di 2π, il punto P ad essi associato si determina disegnando la semiretta uscente da O che forma l'angolo ϑ con l'asse polare e prendendo su di essa il punto P tale che $\overline{OP} = \rho$. Possiamo quindi dire che:

> qualunque punto P del piano diverso da O è individuato da una coppia di numeri reali $(\rho,\ \vartheta)$, dove $\rho > 0$, che costituiscono le sue **coordinate polari**. Il numero ρ si dice **modulo** di P e il numero ϑ si dice **anomalia**.

L'angolo ϑ per il quale vale la relazione $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ costituisce l'**anomalia principale** del punto P.
Per completare la definizione includendo anche il punto O in questo sistema, si conviene poi che O abbia modulo 0 e anomalia indefinita; il punto O è quindi definito da una qualunque coppia $(0,\ \vartheta)$.
Per esempio, fissato un sistema di riferimento polare, i punti $A\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{6}\pi\right)$, $C\left(1,\ \frac{7}{4}\pi\right)$ si rappresentano come in ***figura 11***.

Figura 11

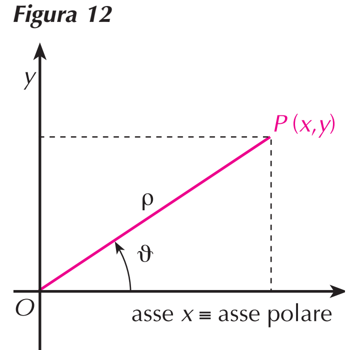


Relazioni fra coordinate polari e coordinate cartesiane

Consideriamo un punto P avente coordinate polari $(\rho,\ \vartheta)$ e fissiamo il sistema cartesiano in modo che l'origine coincida con il polo O e l'asse delle ascisse coincida con l'asse polare (***figura 12***).
Se $(x,\ y)$ sono le coordinate cartesiane di P, allora sussistono le seguenti relazioni

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}} \qquad (\mathbf{A})$$

Figura 12



Viceversa, se sono note le coordinate cartesiane $(x,\ y)$ di P, da queste relazioni e applicando il teorema di Pitagora, ricaviamo che le sue coordinate polari $(\rho,\ \vartheta)$ sono espresse dalle relazioni:

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\vartheta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \sin\vartheta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (\mathbf{B})$$

Per esempio:

- se $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ sono le coordinate polari di un punto A, le sue coordinate cartesiane sono

$$x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \qquad y = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

quindi $A\left(\sqrt{3}, 1\right)$;

- se un punto B ha coordinate cartesiane $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$, le sue coordinate polari sono

$$\rho = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4 \qquad \cos\vartheta = -\frac{1}{2} \qquad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

quindi $B\left(4, \frac{2}{3}\pi\right)$.

L'equazione di una curva in coordinate polari

Il grafico di una curva si può descrivere mediante un'equazione che lega le coordinate dei suoi punti una volta che sia stato fissato un sistema di riferimento. Se l'equazione della curva è data in forma cartesiana, la si può scrivere in coordinate polari applicando le formule di trasformazione (**A**) precedenti; viceversa, se l'equazione è data in forma polare, si può trovare la corrispondente equazione cartesiana applicando le trasformazioni (**B**). Per esempio:

- la circonferenza avente equazione cartesiana $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$ ha come equazione polare la seguente:

$$(\rho\cos\vartheta)^2 + (\rho\sin\vartheta)^2 + 2(\rho\cos\vartheta) - 4(\rho\sin\vartheta) - 1 = 0$$

cioè, sviluppando i calcoli $\quad \rho^2 + \rho(2\cos\vartheta - 4\sin\vartheta) - 1 = 0$

- la curva di equazione polare $2\cos\vartheta = \rho\sin^2\vartheta$ ha equazione cartesiana:

$$2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2$$

cioè, sviluppando i calcoli $\quad x = \frac{1}{2}y^2 \quad$ che corrisponde a una parabola con vertice nell'origine e asse di simmetria coincidente con l'asse x.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Il punto che nel piano cartesiano ha coordinate $\left(-6, 2\sqrt{3}\right)$, in un sistema di riferimento polare ha coordinate:

a. $\left(2\sqrt{3}, \frac{2}{3}\pi\right)$ **b.** $\left(4\sqrt{3}, \frac{5}{6}\pi\right)$ **c.** $\left(4, \frac{5}{6}\pi\right)$ **d.** $\left(4\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

2. La retta che in coordinate cartesiane ha equazione $x - 2y = 1$ in coordinate polari ha equazione:

a. $\rho\,(\cos\vartheta - 2\sin\vartheta) = 2$ **b.** $\rho\,(\cos\vartheta + 2\sin\vartheta) = 2$

c. $\rho\,(\cos\vartheta + 2\sin\vartheta) = 1$ **d.** $\rho\,(\cos\vartheta - 2\sin\vartheta) = 1$

4. LA SCALA LOGARITMICA

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 24

Se un numero k è maggiore di 10, il suo logaritmo in base 10 è molto più piccolo del numero stesso:

$\log 20 = 1{,}30...$ $\log 400 = 2{,}60...$ $\log 5000 = 3{,}69...$

e così via.

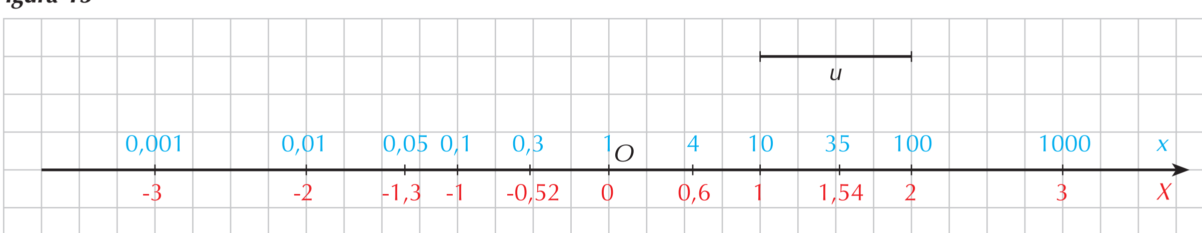
Quando si devono rappresentare numeri che spaziano in un range molto grande di valori, come per esempio le distanze interstellari o le frequenze di udibilità del suono (da 20Hz a 20000Hz), si ricorre ad una scala logaritmica, vale a dire che, dato un numero reale positivo x (altrimenti il logaritmo non esiste), si valuta il suo logaritmo decimale. Di conseguenza:

- se $0 < x < 1$ $\rightarrow$ $\log x < 0$
- se $1 \leq x < 10$ $\rightarrow$ $0 \leq \log x < 1$
- se $10 \leq x < 100$ $\rightarrow$ $1 \leq \log x < 2$
- se $100 \leq x < 1000$ $\rightarrow$ $2 \leq \log x < 3$

e così via.

Sulla retta dei numeri, la scala logaritmica viene rappresentata tenendo presenti le considerazioni precedenti. Fissata un'origine O e un'unità di misura ω si procede in questo modo (segui la ***figura 13***).

Figura 13



- Poiché $\log 10^0 = \log 1 = 0$, al punto O facciamo corrispondere la potenza $10^0 = 1$
- Alla destra del punto O :
  - poiché $\log 10^1 = 1$, al punto che si trova a distanza 1 da O facciamo corrispondere la potenza $10^1 = 10$
  - poiché $\log 10^2 = 2$, al punto che si trova a distanza 2 da O facciamo corrispondere la potenza $10^2 = 100$

  e così via.
- Alla sinistra del punto O :
  - poiché $\log 10^{-1} = -1$, al punto che si trova a distanza -1 da O facciamo corrispondere la potenza $10^{-1} = 0{,}1$

Nella figura:
- *i numeri in blu sono i valori di x*
- *i numeri in rosso sono i valori $X = \log x$*

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

- poiché $\log 10^{-2} = -2$, al punto che si trova a distanza -2 da O facciamo corrispondere la potenza $10^{-2} = 0,01$

e così via.

I valori intermedi tra una potenza di 10 e la successiva si collocano nel corrispondente valore di logaritmo; per esempio:

- il numero 4 che si trova tra 1 e 10 viene posto in corrispondenza di $\log 4 \approx 0,6$
- il numero 35 che si trova tra 10 e 100 viene posto in corrispondenza di $\log 35 \approx 1,54$
- il numero 0,3 che si trova tra 0,1 e 1 viene posto in corrispondenza di $\log 0,3 \approx -0,52$
- il numero 0,05 che si trova tra 0,01 e 0,1 viene posto in corrispondenza di $\log 0,05 \approx -1,3$.

In pratica, indicata con x l'ascissa di un punto P e con X la sua coordinata logaritmica, tra queste due variabili sussiste la relazione

$$X = \log x$$

In scala logaritmica si possono quindi rappresentare solo valori x positivi, mentre i valori di X dei corrispondenti logaritmi decimali sono positivi se $x > 1$, negativi se $0 < x < 1$; il valore 0 viene assunto in corrispondenza di $x = 1$.

IL SISTEMA DI COORDINATE LOGARITMICHE

Quando in un piano si introduce un sistema di riferimento cartesiano, su ciascuno dei due assi si può fissare una scala logaritmica; si parla in questo caso di **coordinate logaritmiche**.
L'unità di misura scelta per i due assi può essere la stessa, ma si possono anche usare unità diverse (esattamente come nel piano cartesiano si può avere un sistema monometrico oppure dimetrico).
Se indichiamo con (X, Y) le coordinate logaritmiche di un punto P, e con (x, y) le sue coordinate cartesiane consuete, abbiamo che:

$$X = \log x \qquad \text{e} \qquad Y = \log y$$

Grazie alle proprietà dei logaritmi, l'uso di questo tipo di coordinate può semplificare la rappresentazione grafica di alcune curve; ricordiamo infatti che un prodotto tra due numeri si trasforma nella somma dei loro logaritmi, mentre una potenza si trasforma nel prodotto tra l'esponente e il logaritmo della base.
Supponiamo, per esempio, di dover rappresentare la curva di equazione

$$y = x^{\frac{3}{4}} \qquad \text{con } x > 0$$

Se consideriamo i logaritmi decimali dei due membri abbiamo che

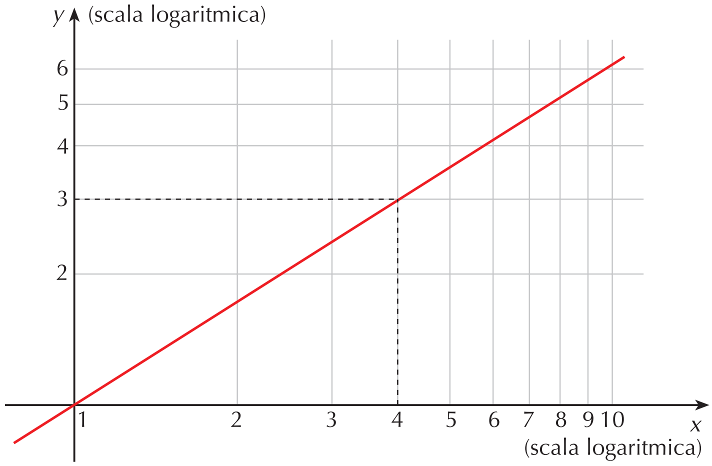
$$\log y = \log x^{\frac{3}{4}} \qquad \text{cioè} \qquad \log y = \frac{3}{4} \log x$$

Ponendoci in una sistema di coordinate logaritmiche si ottiene:

$$Y = \frac{3}{4} X$$

che rappresnta una retta di coefficiente angolare $\frac{3}{4}$ che passa per l'origine (il grafico è in ***figura 14*** di pagina seguente).

Viceversa, data la retta che in coordinate logaritmiche ha equazione $Y = -X + 3$, ci chiediamo quale sia la relazione funzionale tra x e y.



Ponendo log x al posto di X e log y al posto di Y otteniamo:

$$\log y = -\log x + 3 \qquad \text{cioè} \qquad \log y = \log \frac{10^3}{x}$$

La relazione funzionale cercata ha quindi equazione $y = \dfrac{1000}{x}$ e rappresenta un'iperbole equilatera.

IL SISTEMA DI COORDINATE SEMILOGARITMICHE

Oltre ad un sistema di riferimento dove su entrambi gli assi cartesiani si è fissata una scala logaritmica, si può anche pensare ad uno nel quale questa scala sia fissata su uno solo dei due assi, per esempio l'asse y. Si parla in questo caso di **riferimento semilogaritmico**. In sostanza, sull'asse delle ascisse si mantiene una scala lineare e sull'asse y una scala logaritmica (***figura 15***):

$$X = x \qquad \text{e} \qquad Y = \log y$$

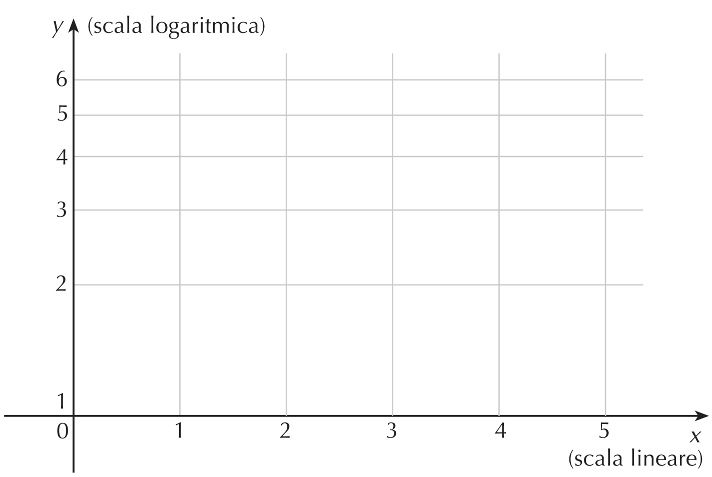
Per esempio:

- la funzione $y = 1000 \cdot 2^x$ diventa:

  $\log y = \log(1000 \cdot 2^x) \quad \rightarrow \quad \log y = \log 1000 + x\log 2 \qquad \text{cioè} \qquad Y = 3 + x\log 2$

- viceversa, la funzione $Y = \log 2 + x \log 5$ diventa:

  $\log y = \log(2 \cdot 5^x) \qquad \text{cioè} \qquad y = 2 \cdot 5^x$



 © ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

5. Misure ed errori

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 25

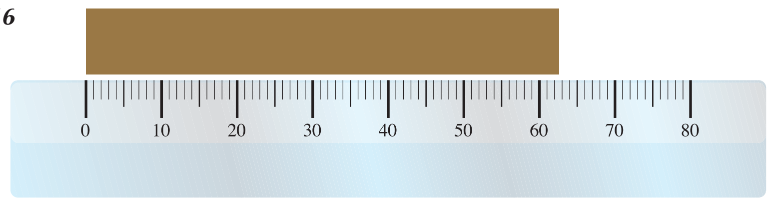
Misurare è una delle attività che si fanno con maggiore frequenza e in alcuni casi è anche un'attività molto delicata che, se fatta in modo errato, può portare a conclusioni sbagliate e a volte dannose. Scopo di questo paragrafo è comprendere come sia possibile eseguire correttamente una misura, valutarne la precisione ed usare il valore ottenuto per ottenere altre misure.

5.1 La valutazione degli errori

Per misurare si devono utilizzare degli strumenti i quali, per come vengono costruiti, hanno una fissata *sensibilità*. Per esempio, di un comune righello che ha una suddivisione in millimetri diciamo che è sensibile al millimetro, di un contenitore per liquidi che ha una scala graduata in decilitri diciamo che è sensibile al decilitro.
Il valore numerico che si ottiene come risultato di una misura non è mai un valore esatto perché si deve tenere conto, tra le altre cose, anche della sensibilità dello strumento; se misurando con il righello la larghezza di un oggetto rettangolare come quello in ***figura 16*** troviamo che essa cade tra 62 e 63 millimetri, possiamo affermare che la misura probabile ℓ di quell'oggetto appartiene all'intervallo definito dalla relazione

$$62 < \ell < 63$$

Figura 16



Come misura della lunghezza si assume di solito il valore centrale dell'intervallo assumendo come errore la semiampiezza dell'intervallo stesso; nel nostro caso diciamo che $\ell = 62{,}5\text{mm}$ con un errore pari a $0{,}5\text{mm}$.
La misura, corredata del suo errore, viene quindi scritta nella forma

$$\ell = \left(\underbrace{62{,}5}_{\text{valore probabile}} \pm \underbrace{0{,}5}_{\text{errore}}\right)\text{mm}$$

L'errore di misura legato allo strumento viene detto **errore di sensibilità**.

Oltre a quello dovuto alla sensibilità dello strumento, altri errori possono influenzare una misura; essi si distinguono in due categorie fondamentali.

- Chiamiamo **errori sistematici** quelli dovuti a strumenti difettosi (per esempio una bilancia che non è posizionata correttamente sullo zero) o a un errato uso dello strumento (per esempio gli errori di parallasse che si commettono quando si legge una misura ponendosi a lato dello strumento). Questo tipo di errore si può eliminare facilmente cambiando lo strumento o mettendo in atto un procedimento corretto.
- Chiamiamo **errori accidentali** quelli dovuti a circostanze casuali o non prevedibili come per esempio misurare una temperatura senza accorgersi che c'è una fonte di calore nelle vicinanze, oppure nella misurazione di un tem-

po far partire il cronometro leggermente in ritardo o leggermente in anticipo. Questo tipo di errore non può essere completamente eliminato anche se può essere ridotto effettuando misure ripetute e più accurate.

Un possibile modo di ridurre la naturale imprecisione di una misura può essere quello di utilizzare strumenti sofisticati; un cronometro con una sensibilità al centesimo di secondo darà una misura con un errore più piccolo di un cronometro sensibile al decimo di secondo; misurando per esempio un tempo potremmo ottenere:

- con un cronometro al decimo di secondo: $(15{,}3 \pm 0{,}1)s$
- con un cronometro al centesimo di secondo: $(15{,}32 \pm 0{,}01)s$

L'errore è minore nel secondo caso.
Non si può tuttavia pensare di costruire strumenti con una sensibilità sempre più alta sia per i limiti imposti dalla tecnologia, sia perché a volte risulta inutile; strumenti ad alta sensibilità producono misure spesso differenti tra loro in quanto soggette ad errori casuali e la maggiore precisione acquisita non si traduce in un effettivo miglioramento della misura stessa.

Spesso la misura di una grandezza viene fatta una sola volta; non si può per esempio misurare più volte il tempo dei discesisti in una gara di sci. In questi casi l'errore che viene attribuito è l'errore di sensibilità dello strumento.
In altri casi, per esempio quando si vogliono verificare i risultati di un esperimento, la misura di una stessa grandezza viene ripetuta più volte.
Supponiamo, per esempio, che in un esperimento di laboratorio si voglia misurare il tempo che impiega un oggetto a scendere lungo un piano inclinato; per avere un valore della misura si decide di far cronometrare il tempo di discesa a cinque persone alle quali viene affidato un cronometro con la sensibilità di un decimo di secondo; i risultati ottenuti sono visibili nella seguente tabella:

I misura	II misura	III misura	IV misura	V misura
17,5	17,4	18,2	18,1	17,6

Le cinque persone hanno ottenuto valori leggermente diversi ed è ragionevole considerare come misura la media dei valori ottenuti con il corretto numero di cifre significative:

$$\frac{17{,}5 + 17{,}4 + 18{,}2 + 18{,}1 + 17{,}6}{5} = 17{,}8$$

L'errore non può essere però valutato in base alla sensibilità dello strumento perché la differenza tra il valore minimo rilevato e quello massimo è maggiore della sensibilità: $18{,}2 - 17{,}4 = 0{,}8$.
Si conviene allora di assumere come errore la **semidispersione**, cioè la semidifferenza tra questi valori; nel nostro caso: errore $= \frac{0{,}8}{2} = 0{,}4$.

Semidispersione $= \dfrac{\text{valore massimo} - \text{valore minimo}}{2}$

Il modo corretto di esprimere la misura è quindi: $(17{,}8 \pm 0{,}4)s$.

Un secondo modo di valutare l'errore è quello di considerare le misure rilevate come dati statistici e calcolare il loro scarto quadratico medio. Nell'esempio precedente lo scarto quadratico medio è dato da:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(17{,}5-17{,}8)^2+(17{,}4-17{,}8)^2+(18{,}2-17{,}8)^2+(18{,}1-17{,}8)^2+(17{,}6-17{,}8)^2}{5}} = 0{,}328633...$$

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

cioè, considerando la significatività delle cifre, 0,3s. In questo caso il modo corretto di esprimere la misura è: $(17{,}8 \pm 0{,}3)$s.

Nella valutazione di una misura si deve quindi, in generale, procedere in questo modo.

- Se viene eseguita una sola misurazione, ad essa viene attribuito come errore l'errore di sensibilità dello strumento, cioè la semiampiezza del più piccolo intervallo apprezzabile con quello strumento.
- Se vengono eseguite più misure, si assume come misura più probabile la media aritmetica M dei valori rilevati x_i :

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

e come errore la semidispersione oppure lo scarto quadratico medio dei valori rilevati.

Lo scarto quadratico medio di n dati x_i aventi media M è definito dall'espressione

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M)^2}{n}}$$

L'errore che esprime l'incertezza della misura prende il nome di **errore assoluto** e si indica con il simbolo e_a; si tratta di una grandezza omogenea con quella misurata, che si esprime quindi nella stessa unità di misura.

La precisione di una misura

Supponiamo di aver misurato due lunghezze e di avere ottenuto i seguenti valori:

$$(152{,}8 \pm 0{,}6)\text{m} \qquad (1415 \pm 3)\text{m}$$

La prima misura è affetta da un errore di 0,6m mentre nella seconda l'errore è di 3m. Ma quale delle due misure è la più precisa?
Per rispondere a questa domanda dobbiamo considerare che l'errore di 0,6m viene fatto su una lunghezza di poco più di 152m, mentre quello di 3m, che è cinque volte maggiore del primo, viene fatto su una grandezza assai più lunga.
La precisione di una misura si deve riferire quindi al rapporto tra l'errore rilevato e la misura stessa; nel nostro caso:

$$\frac{0{,}6}{152{,}8} = 0{,}0039267\ldots \qquad \frac{3}{1415} = 0{,}0021201\ldots.$$

Dobbiamo concludere che la seconda misura, pur avendo un errore assoluto maggiore, è più precisa della prima.

La precisione di una misura è legata all'*errore relativo* della misura che definiamo in questo modo.

Errore relativo di una misura è il rapporto tra l'errore assoluto e la misura stessa:

$$e_r = \frac{e_a}{M}$$

L'errore relativo è un numero adimensionale che si esprime di solito in forma percentuale.
Per esempio, gli errori relativi delle due precedenti misure sono pari allo 0,39% e allo 0,21%.

5.2 La propagazione degli errori

Non tutte le misure possono essere eseguite direttamente:

- nella valutazione del perimetro di un terreno si misura ogni lato e poi si sommano le misure ottenute
- nella valutazione di un'area, supponiamo di forma rettangolare, normalmente si misurano le lunghezze dei due lati e poi si moltiplicano tra loro
- nella valutazione di una velocità si misurano lo spazio percorso ed il tempo impiegato a percorrerlo e poi si esegue una divisione.

Quando si eseguono delle operazioni di calcolo tra numeri che rappresentano misure, gli errori si propagano ed è necessario valutare l'errore del risultato; le regole sono le seguenti.

Se indichiamo con M_1 e M_2 le misure di due grandezze omogenee, e_{a1} ed e_{a2} i rispettivi errori assoluti, e_{r1} ed e_{r2} i rispettivi errori relativi allora, indicato con M il risultato dell'operazione, con e_a il corrispondente errore assoluto e con e_r quello relativo, si ha che:

- **errore sulla somma e sulla differenza**

  $M = M_1 + M_2 \qquad e_a = e_{a1} + e_{a2}$

  $M = M_1 - M_2 \qquad e_a = e_{a1} + e_{a2}$

  In pratica, l'errore assoluto sulla somma e sulla differenza è uguale alla somma degli errori assoluti delle singole misure.

- **errore sul prodotto e sul quoziente**

  $M = M_1 \cdot M_2 \qquad e_r = e_{r1} + e_{r2}$

  $M = \dfrac{M_1}{M_2} \qquad e_r = e_{r1} + e_{r2}$

  In pratica, l'errore relativo sul prodotto e sul quoziente è uguale alla somma degli errori relativi delle singole misure.

In una somma o differenza si sommano gli errori assoluti.
In un prodotto o quoziente si sommano gli errori relativi.

Vediamo alcuni esempi di applicazione di queste regole.

ESEMPI

1. Misurando i lati di una lamina rettangolare si sono ottenuti i seguenti valori:

$\ell_1 = (15{,}32 \pm 0{,}12)\text{cm} \qquad \ell_2 = (8{,}74 \pm 0{,}15)\text{cm}$

Calcoliamo il perimetro e l'area della lamina con i corrispondenti errori assoluti e relativi.

L'errore relativo sulla prima misura è: $e_{a1} = \dfrac{0{,}12}{15{,}32} = 0{,}0078$ in forma percentuale 0,78%

L'errore relativo sulla seconda misura è: $e_{a1} = \dfrac{0{,}15}{8{,}74} = 0{,}0172$ in forma percentuale 1,72%

Valutiamo il perimetro.

Somma dei lati: $2p = 15{,}32 + 15{,}32 + 8{,}74 + 8{,}74 = 48{,}12\text{cm}$

L'errore assoluto sul perimetro si calcola sommando gli errori assoluti:

$e_a = 0{,}12 + 0{,}12 + 0{,}15 + 0{,}15 = 0{,}54$

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

L'errore relativo sul perimetro è: $e_r = \dfrac{0{,}54}{48{,}12} = 0{,}0112$ in forma percentuale 1,12%

La misura del perimetro, corredata dall'errore è quindi: $(48{,}12 \pm 0{,}54)\text{cm}$

Valutiamo l'area.

Prodotto dei lati: $\text{area} = 15{,}32 \cdot 8{,}74 = 133{,}9\text{cm}^2$

L'errore relativo sull'area si calcola sommando gli errori relativi:

$e_r = 0{,}0078 + 0{,}0172 = 0{,}025 \quad \rightarrow \quad 2{,}5\%$

L'errore assoluto sull'area si ottiene moltiplicando l'errore relativo per la misura dell'area ed è:

$e_a = 133{,}9 \cdot 0{,}025 = 3{,}35\text{cm}^2$

La misura dell'area, corredata dall'errore, è quindi: $(133{,}9 \pm 3{,}35)\text{cm}^2$

2. La densità di una sostanza viene definita mediante il rapporto tra la sua massa e il suo volume; se una massa di $(5{,}2 \pm 0{,}3)$kg di un gas occupa un volume di $(1{,}8 \pm 0{,}1)\text{dm}^3$, qual è la sua densità?

La densità si esprime normalmente in kg/m^3 oppure in g/dm^3; scegliamo la seconda modalità e trasformiamo prima la massa in grammi:

$$5{,}2\text{kg} = 5200\text{g}$$

La densità del gas è quindi: $\dfrac{5200}{1{,}8} = 2{,}9 \cdot 10^3\text{g/dm}^3$

Valutiamo l'errore:

- errore relativo sulla massa: $\dfrac{0{,}3}{5{,}2} = 0{,}05769$
- errore relativo sul volume: $\dfrac{0{,}1}{1{,}8} = 0{,}05556$
- errore relativo sulla densità: $e_r = 0{,}05769 + 0{,}05556 = 0{,}11325$

L'errore assoluto è quindi uguale a: $2{,}9 \cdot 10^3 \cdot 0{,}11325 = 0{,}3 \cdot 10^3\text{g/dm}^3$

Il modo corretto di esprimere la misura della densità è quindi: $(2{,}9 \pm 0{,}3) \cdot 10^3\text{g/dm}^3$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. La misura di una massa viene fatta con una bilancia che è sensibile al grammo; l'errore di sensibilità è uguale a:

a. 1g **b.** 0,5g **c.** 0,2g **d.** le informazioni sono insufficienti

2. Gli errori assoluti di due misure di lunghezza sono rispettivamente di 0,2cm e 0,3cm; si può dire che:

a. l'errore assoluto sulla somma delle due lunghezze è pari a 0,5cm V F

b. l'errore relativo sulla somma è del 5% V F

c. l'errore assoluto sul prodotto è pari a $0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}6$ V F

d. le informazioni date sono insufficienti per calcolare qualunque errore relativo. V F

I concetti e le regole

I luoghi di punti

Un luogo di punti è l'insieme di tutti e soli i punti che godono di una medesima proprietà. Fissato un opportuno sistema di riferimento, ad ogni luogo geometrico si può associare un'equazione che si ottiene applicando la proprietà del luogo stesso.

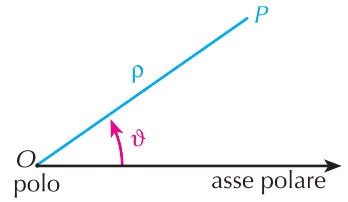
L'equazione parametrica di una curva

L'equazione di una curva è in forma parametrica se è data nella forma

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

dove le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ esprimono le coordinate di un suo punto P in funzione del parametro t.

Il sistema di riferimento polare



Un sistema di coordinate polari nel piano è fissato quando vengono dati una semiretta orientata detta **asse polare** la cui origine O è detta **polo** e una unità di misura per i segmenti.

Ad ogni punto P del piano si può associare la coppia ordinata di numeri (ρ, ϑ) dove:

- ρ rappresenta la misura del segmento OP rispetto all'unità prefissata (**modulo** di P)
- ϑ rappresenta la misura in radianti dell'angolo orientato che l'asse polare forma con la semiretta OP (**anomalia** di P).

Le formule per il passaggio da coordinate polari (ρ, ϑ) a coordinate cartesiane (x, y) e viceversa sono le seguenti:

- da coordinate polari a coordinate cartesiane: $x = \rho \cos \vartheta \qquad y = \rho \sin \vartheta$
- da coordinate cartesiane a coordinate polari: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \cos \vartheta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \sin \vartheta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

La scala logaritmica

Fissata un'unità di misura su una semiretta orientata, ad ogni numero x positivo si può associare il numero $X = \log x$; i valori che si ottengono sono la rappresentazione in scala logaritmica dei numeri x.
Un sistema di coordinate logaritmiche è un sistema di riferimento cartesiano sui cui assi viene fissato un sistema di coordinate logaritmiche.

Gli errori e la loro propagazione

Ad ogni misura è sempre associato un errore che esprime l'incertezza della misura stessa e che prende il nome di **errore assoluto**. L'errore assoluto e_a si valuta:

- mediante l'incertezza dello strumento di misura se viene eseguita una sola misura
- mediante la semidispersione oppure lo scarto quadratico medio se vengono eseguite più misure della stessa grandezza.

Ad ogni errore assoluto corrisponde un **errore relativo** che viene definito come il rapporto tra l'errore assoluto e il valore M della misura: $e_r = \dfrac{e_a}{M}$.

Eseguendo le operazioni fondamentali sulle misure di due o più grandezze gli errori si propagano secondo le seguenti regole:

- nell'esecuzione di addizioni e sottrazioni si sommano gli errori assoluti
- nell'esecuzione di prodotti o quozienti si sommano gli errori relativi.

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

ESERCIZI CAPITOLO 1

Luoghi, sistemi di riferimento e curve

I LUOGHI DI PUNTI E IL SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO

la teoria è a pag. 1

Comprensione

1 Un luogo di punti è:
a. un insieme di punti che hanno una determinata proprietà
b. l'insieme di tutti i punti che hanno una determinata proprietà
c. l'insieme di tutti e soli i punti che hanno una determinata proprietà.

2 Sono luoghi di punti:
a. una parabola
b. l'asse di un segmento
c. un arco di iperbole
d. un segmento perpendicolare a un altro segmento condotto per il suo punto medio.

3 Il luogo dei punti del piano che sono equidistanti da una retta data è:
a. una retta parallela a quella data
b. una retta perpendicolare a quella data
c. una parabola
d. una circonferenza.

4 Il luogo dei vertici di un triangolo avente per base un segmento AB e area assegnata è:
a. un segmento congruente e parallelo ad AB
b. una retta parallela ad AB
c. una circonferenza avente centro nel punto medio di AB
d. una parabola avente per asse la retta AB.

Applicazione

Applicando la definizione di luogo, trova l'equazione dei luoghi indicati in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

5 **ESERCIZIO GUIDA**

Scrivi l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti dalle rette $r: y = \frac{1}{2}x - 2$ e $s: y = 3x + 1$.

Sia $P(x, y)$ il punto che descrive il luogo; la proprietà espressa dal luogo è che P deve avere la stessa distanza dalla retta r e dalla retta s.
Per applicare la formula della distanza scriviamo innanzi tutto l'equazione delle due rette in forma implicita:

$$r: \quad x - 2y - 4 = 0 \qquad\qquad s: \quad 3x - y + 1 = 0$$

Calcoliamo le due distanze e imponiamo che siano uguali:

$$\frac{|x-2y-4|}{\sqrt{5}}=\frac{|3x-y+1|}{\sqrt{10}}$$

Otteniamo così le due rette:

$\sqrt{2}(x-2y-4)=3x-y+1 \quad \rightarrow \quad x\left(\sqrt{2}-3\right)+y\left(1-2\sqrt{2}\right)-4\sqrt{2}-1=0$

$\sqrt{2}(x-2y-4)=-(3x-y+1) \quad \rightarrow \quad x\left(\sqrt{2}+3\right)+y\left(-2\sqrt{2}-1\right)-4\sqrt{2}+1=0$

Si tratta delle due bisettrici degli angoli formati dalle rette date.

6 Scrivi l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti dalle rette $x-2y+3=0$ e $2x+y=0$. $[x+3y-3=0,\ 3x-y+3=0]$

7 Scrivi l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti dagli estremi del segmento AB essendo $A(4,\ 3)$ e $B(-2,\ 1)$. $[3x+y-5=0]$

8 Scrivi l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti dagli estremi del segmento AB essendo $A\left(\frac{3}{2},\ 1\right)$ e $B\left(3,\ -\frac{3}{2}\right)$. $[3x-5y-8=0]$

9 Scrivi l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti dalle due rette parallele $r: x-2y=0$ e $2x-4y+1=0$. $[4x-8y+1=0]$

10 Dati i punti $A(1,\ 3)$ e $B(4,\ -1)$, scrivi l'equazione del luogo dei punti P per i quali il rapporto delle distanze dai punti A e B è uguale a 1. $[6x-8y-7=0]$

11 Dato il punto $A(2,\ 1)$ e la retta r di equazione $x=3$, scrivi l'equazione del luogo dei punti P del piano per i quali è uguale a 2 il rapporto $\frac{PH}{PA}$, essendo H la proiezione di P sulla retta r. $[3x^2+4y^2-8y-10x+11=0]$

12 Date le rette r e s rispettivamente di equazioni $x=3$ e $y=x$, scrivi l'equazione del luogo dei punti P del piano per i quali è uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ il rapporto $\frac{PH}{PK}$, essendo PH la distanza di P da r e PK la distanza di P da s. $[3x-y-6=0,\ x+y-6=0]$

EQUAZIONI PARAMETRICHE E CURVE IN CINEMATICA

la teoria è a pag. 4

RICORDA

- L'equazione parametrica di una retta che passa per due punti assegnati è $\begin{cases} x=\ell t+x_1 \\ y=pt+y_1 \end{cases}$

  dove ℓ rappresenta la differenza x_2-x_1 fra le ascisse dei due punti e p la differenza y_2-y_1 fra le ordinate.

- L'equazione parametrica di una circonferenza di centro $(a,\ b)$ e raggio r è $\begin{cases} x=a+r\cos t \\ y=b+r\sin t \end{cases}$

- L'equazione parametrica di una parabola con asse parallelo all'asse y è $\begin{cases} x=t \\ y=at^2+bt+c \end{cases}$

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

- L'equazione parametrica di un'ellisse di semiassi a e b è $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

- L'equazione parametrica di un'iperbole di semiassi a e b è $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = b\tan t \end{cases}$

Applicazione

13 Costruisci per punti le curve che hanno le seguenti equazioni parametriche e riconoscine il tipo

a. $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 2t^3 - t^2 \\ y = t^3 - t + 1 \end{cases}$

14 Scrivi l'equazione cartesiana delle rette di equazioni parametriche

a. $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t - 2 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{2}{3}t + \dfrac{4}{3} \end{cases}$ $[3x - 2y - 1 = 0;\ 2x - 3y + 4 = 0]$

15 Scrivi una possibile equazione parametrica della retta $x + y - 2 = 0$. $\left[\begin{cases} x = t \\ y = -t + 2 \end{cases}\right]$

16 Scrivi un'equazione parametrica della retta che passa per i punti $A(1,\ -3)$ e $B(2,\ 5)$. $\left[\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 8t - 3 \end{cases}\right]$

17 Trova le coordinate del punto di intersezione della retta di equazione cartesiana $2x - 3y = 5$ con la retta di equazione parametrica $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$. $\left[\left(\dfrac{25}{7},\ \dfrac{5}{7}\right)\right]$

18 Scrivi l'equazione parametrica della retta che passa per $A(0,\ 1)$ ed è parallela a quella di equazione cartesiana $y = 3x - 5$.
(Suggerimento: ricorda che $m = \dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{p}{\ell}$) $\left[\begin{cases} x = t \\ y = 3t + 1 \end{cases}\right]$

19 Scrivi l'equazione parametrica della retta che passa per $A(2,\ 7)$ ed è perpendicolare alla bisettrice del secondo e quarto quadrante. $\left[\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 7 \end{cases}\right]$

20 Trova le coordinate dei punti di intersezione fra la circonferenza avente centro nell'origine e raggio 2 e la retta di equazione parametrica $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2(t - 1) \end{cases}$. $[(2,\ 0);\ (0,\ -2)]$

21 Data la curva di equazione parametrica $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$, riconoscine il tipo e scrivi la sua equazione in coordinate cartesiane. $\left[\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1\right]$

22 Data la curva di equazione parametrica $\begin{cases} x = \dfrac{5}{\cos t} \\ y = 3\tan t \end{cases}$, riconoscine il tipo e scrivi la sua equazione in coordinate cartesiane. $\left[\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1\right]$

23 Scrivi l'equazione parametrica dell'ellisse con centro nell'origine di semiassi $a = 6$ e $b = 4$. $\left[\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}\right]$

24 Scrivi l'equazione parametrica della circonferenza avente centro nell'origine e raggio 6. Successivamente trova le coordinate dei punti di intersezione con la retta $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases}$. $[(\pm 3, \ \pm 3\sqrt{3})]$

25 Scrivi l'equazione parametrica della circonferenza avente centro nel punto $C(1, 4)$ e raggio 5. Trova poi la lunghezza della corda intercettata sull'asse delle ascisse. $\left[\begin{cases} x = 1 + 5\cos t \\ y = 4 + 5\sin t \end{cases}; 6\right]$

26 Scrivi l'equazione parametrica dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti che ha vertice in $V(\sqrt{6}, \sqrt{6})$. $\left[\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{6}{t} \end{cases}\right]$

Le seguenti equazioni parametriche rappresentano il moto di un punto in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale; trova l'equazione cartesiana della traiettoria descritta.

27 $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = \dfrac{2t - 1}{t - 5} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = t + 1 \\ y = \dfrac{t}{t - 1} \end{cases}$ $\left[y = \dfrac{2x - 3}{x - 6}, x \geq 1 \ \wedge \ x \neq 6; y = \dfrac{x - 1}{x - 2}, x \geq 1 \ \wedge \ x \neq 2\right]$

28 $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{4}{7}t \\ y = \dfrac{7}{t} \end{cases}$ $[y = x^2 - 6x + 8, x \geq 3; xy = 4, x > 0]$

29 $\begin{cases} x = \dfrac{2(1 - t^2)}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1 + t^2} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{1 - t}{1 + t} \\ y = \dfrac{2t}{t + 1} \end{cases}$ $\left[y = \dfrac{2 - x}{4}, -2 < x \leq 2; y = 1 - x, \ -1 < x \leq 1\right]$

30 $\begin{cases} x = \dfrac{1 + t^2}{1 - t^2} \\ y = \dfrac{4t^2}{1 - t^2} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t \\ y = \dfrac{1}{2t} \end{cases}$ $\left[y = 2x - 2, x < -1 \ \vee \ x \geq 1; xy = \dfrac{1}{4}, x > 0\right]$

31 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 1 + \sin t \\ y = 2 + \cos t \end{cases}$ $\left[\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1; x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0\right]$

32 Scrivi l'equazione della traiettoria descritta dal punto P le cui coordinate in funzione del tempo t sono le seguenti $\left(\dfrac{1}{2}t; t^2 + 1\right)$. $[y = 4x^2 + 1, x \geq 0]$

33 Le equazioni $\begin{cases} x = 2\cos \omega t \\ y = 2\sin \omega t \end{cases}$, al variare del tempo t, rappresentano la posizione di un punto P che si muove di moto circolare uniforme con velocità angolare ω. Scrivi l'equazione della traiettoria. $[x^2 + y^2 = 4]$

IL SISTEMA DI RIFERIMENTO POLARE

la teoria è a pag. 7

RICORDA

- Per passare dal sistema di riferimento polare a quello cartesiano devi applicare le formule:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

- Per passare dal sistema cartesiano a quello polare devi applicare le formule:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \cos\vartheta=\frac{x}{\rho}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \sin\vartheta=\frac{y}{\rho}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

da cui si ricava che è: $\tan\vartheta=\dfrac{y}{x}$

Applicazione

In un sistema di riferimento polare, individua i punti che hanno le seguenti coordinate.

34 $P\left(2,\ \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad Q\left(3,\ \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad R\left(7,\ -\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad S\left(1,\ \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad T\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\pi}{4}\right)$

35 $P\left(6,\ \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad Q\left(4,\ -\frac{3}{4}\pi\right)$ $\quad R\left(1,\ -\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad S\left(\sqrt{2},\ \frac{5}{6}\pi\right)$ $\quad T\left(\frac{3}{4},\ -\frac{2}{3}\pi\right)$

Determina le coordinate cartesiane dei punti che hanno le seguenti coordinate polari.

36 $P\left(5,\ \frac{3}{4}\pi\right)$ $\quad Q\left(-2,\ \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad R\left(\frac{3}{4},\ \frac{5}{4}\pi\right)$ $\quad S\left(\sqrt{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$

37 $P\left(1,\ \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad Q(1,\ \pi)$ $\quad R\left(4,\ \frac{2}{3}\pi\right)$ $\quad S\left(10,\ -\frac{3}{4}\pi\right)$

38 $P\left(2,\ -\frac{\pi}{4}\right)$ $\quad Q\left(3,\ \frac{\pi}{6}\right)$ $\quad R\left(4,\ \frac{5}{6}\pi\right)$ $\quad S\left(2,\ \frac{3}{4}\pi\right)$

39 $P\left(5,\ -\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad Q(2,\ -\pi)$ $\quad R\left(2,\ \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad S\left(1,\ -\frac{\pi}{2}\right)$

Determina le coordinate polari dei punti aventi le seguenti coordinate cartesiane.

40 $P(3,\ -3)$ $\quad Q(-\sqrt{3},\ 3)$ $\quad R\left(\frac{5}{2}\sqrt{3},\ -\frac{5}{2}\right)$

41 $P(-5,\ 5\sqrt{3})$ $\quad Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ $\quad R(1,\ -2)$

42 $P(-3,\ 3)$ $\quad Q(10,\ 5\sqrt{2})$ $\quad R(0,\ 3)$

43 $P(0,\ -5)$ $\quad Q(-2,\ 4\sqrt{2})$ $\quad R(3,\ -\sqrt{3})$

44 Scrivi l'equazione polare della retta passante per i punti di coordinate cartesiane $A(1,\ 1)$ e $B(0,\ 2)$.
$\left[\sqrt{2}=\rho\cos\left(\frac{\pi}{4}-\vartheta\right)\right]$

45 Scrivi l'equazione polare della retta che ha equazione cartesiana $x-2y-1=0$.
$[\rho\,(\cos\vartheta-2\sin\vartheta)=1]$

46 Scrivi in coordinate polari l'equazione della bisettrice del primo e terzo quadrante di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.
$\left[\vartheta=\frac{\pi}{4}\right]$

47 Scrivi l'equazione polare della circonferenza che ha equazione cartesiana $x^2+y^2=9$. $[\rho=3]$

48 Scrivi l'equazione polare della parabola $y=x^2+3$. $[\rho\sin\vartheta-\rho^2\cos^2\vartheta=3]$

49 Scrivi l'equazione polare della circonferenza che ha centro nel punto C di coordinate cartesiane $(1, 1)$ e raggio $\sqrt{2}$. $[\rho^2 - 2\rho(\cos\vartheta + \sin\vartheta) = 0]$

50 Scrivi l'equazione polare della circonferenza che ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 - ax - ay = 0$. $[\rho = a(\sin\vartheta + \cos\vartheta)]$

51 Scrivi l'equazione polare dell'iperbole di equazione cartesiana $x^2 - y^2 = 1$. $[\rho^2 \cos 2\vartheta = 1]$

52 Scrivi in coordinate polari l'equazione della curva di equazione cartesiana $x^2 - y^2 = a^2$. $\left[\rho^2 = \dfrac{a^2}{\cos 2\vartheta}\right]$

53 Data l'equazione in coordinate polari $\rho^2 - 4\rho\cos\left(\vartheta - \dfrac{\pi}{6}\right) + 3 = 0$, trasformala in coordinate cartesiane. $[x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - 2y + 3 = 0]$

54 Trasforma in coordinate cartesiane l'equazione polare $\rho\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \vartheta\right) = 1$ e, dopo averne individuato il tipo, rappresentala graficamente. $[\sqrt{3}x + y = 2]$

55 Trasforma in coordinate cartesiane l'equazione polare $\rho = 2\sin\vartheta$ e, dopo averne individuato il tipo, rappresentala graficamente. $[x^2 + y^2 - 2y = 0]$

56 Trasforma in coordinate cartesiane l'equazione polare $\rho^2 \sin 2\vartheta = 6$ e, dopo averne individuato il tipo, rappresentala graficamente. [iperbole equilatera di equazione $xy = 3$]

LA SCALA LOGARITMICA

la teoria è a pag. 10

RICORDA

In una scala logaritmica i valori X rappresentati sono proporzionali ai logaritmi delle ascisse positive x:

$$X = \log x$$

Comprensione

57 In scala logaritmica:

a. si possono rappresentare solo numeri reali positivi. V F

b. i valori $X = \log x$ sono solo numeri positivi V F

c. valori interi (numeri come 2, 3, 4 ...) sono sempre equidistanziati V F

d. non esiste la possibilità di rappresentare lo zero V F

e. per rappresentare numeri compresi tra 1 e 10 si utilizza lo stesso segmento che si usa per rappresentare numeri compresi tra 10 e 100. V F

58 In un sistema di coordinate logaritmiche, ad ogni punto di coordinate (x, y) corrisponde un punto di coordinate (X, Y) dove:

a. $x = \log X$ e $y = \log Y$ **b.** $X = \log x$ e $Y = \log y$ **c.** $X = \log y$ e $Y = \log x$

Applicazione

59 Rappresenta i seguenti numeri in scala logaritmica:

0,04 0,8 2 25 95 128 4387.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

60 In laboratorio si è verificata la concentrazione di un farmaco dopo un certo numero di ore dal suo assorbimento; i dati sono in tabella:

Tempo (in h)	0	5	10	15	20	25	30
Concentrazione (in mg)	1000	700	400	180	90	30	8

Rappresenta i dati in un riferimento cartesiano in scala semilogaritmica (scala logaritmica sull'asse y dove viene riportata la concentrazione).

61 La popolazione mondiale ha subito un notevole incremento a partire dal 1800 e i dati relativi alla sua numerosità sono riportati in tabella:

Anno	1800	1900	1960	2000	2010
Popolazione (in miliardi di individui)	1	1,5	3	6	7

Rappresenta i dati in un riferimento cartesiano in scala semilogaritmica (scala logaritmica sull'asse y dove viene riportata la popolazione).

62 In un grafico con scala semilogaritmica è rappresentata la retta di equazione $Y = X\log 3 - \log 5$. Trova il legame funzionale tra x e y sapendo che $X = x$ e $Y = \log y$. $\left[y = \frac{3^x}{5}\right]$

63 E' data la funzione $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. In un grafico con scala semilogaritmica qual è il coefficiente angolare della retta che la rappresenta? $[-\log 4]$

64 La legge che rappresenta la crescita di una popolazione di batteri è data dalla formula $N = N_0 \cdot 2^{kt}$, dove N_0 è la numerosità della popolazione di batteri al tempo $t = 0$, N è la popolazione al tempo t e k è il numero di suddivisioni cellulari che avvengono in ogni unità di tempo. Trasforma la legge in scala semilogaritmica ponendo $Y = \log N$. $[Y = kt\log 2 + \log N_0]$

65 La legge di decadimento radioattivo delle sostanze segue la legge $m = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$ dove m_0 è la massa radioattiva presente al tempo $t = 0$, m è la massa radioattiva presente al tempo t e λ è la costante di decadimento radioattivo il cui valore è un numero caratteristico di ciascuna sostanza radioattiva e dà la misura della maggiore o minore rapidità con cui avviene il processo di trasformazione. Trasforma la legge in scala semilogaritmica ponendo $Y = \ln m$. $[y = \ln m_0 - \lambda t]$

MISURE ED ERRORI

la teoria è a pag. 13

RICORDA

- Se di una grandezza viene eseguita una sola misurazione, ad essa viene attribuito come errore assoluto l'errore di sensibilità dello strumento, cioè la semiampiezza del più piccolo intervallo apprezzabile con quello strumento.
- Se di una grandezza vengono eseguite più misure, si assume come misura più probabile la media aritmetica M dei valori rilevati x_i :

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

L'errore assoluto si può valutare considerando:

- la semidispersione, cioè la semidifferenza tra il valore massimo e il valore minimo rilevati:
  $e_a = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{2}$
- lo scarto quadratico medio dei valori x_i : $e_a = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M)^2}{n}}$.

L'**errore relativo** di una misura è il rapporto tra l'errore assoluto e la misura stessa: $e_r = \dfrac{e_a}{M}$.

■ Nelle operazioni che si eseguono tra due misure gli errori si propagano con le seguenti regole:

- **errore sulla somma e sulla differenza**

  $M = M_1 + M_2 \qquad e_a = e_{a1} + e_{a2}$

  $M = M_1 - M_2 \qquad e_a = e_{a1} + e_{a2}$

- **errore sul prodotto e sul quoziente**

  $M = M_1 \cdot M_2 \qquad e_r = e_{r1} + e_{r2}$

  $M = \dfrac{M_1}{M_2} \qquad e_r = e_{r1} + e_{r2}$

Comprensione

66 In una serie di misure ripetute, il valore più probabile della misura è:
a. il valore che si ripete con maggiore frequenza
b. il più grande tra i valori trovati
c. la media tra il valore più grande e quello più piccolo
d. la media tra tutti i valori rilevati.

67 L'errore assoluto di una misura:
a. è una grandezza alla quale si attribuisce la stessa unità di misura della grandezza misurata V F
b. è un numero adimensionale V F
c. esprime l'incertezza della misura V F
d. indica che si è usato lo strumento di misura in modo sbagliato. V F

68 Per esprimere l'errore assoluto di una misura si può valutare:
a. l'errore di sensibilità dello strumento se si esegue una sola misurazione V F
b. la semidispersione se si eseguono più misurazioni V F
c. lo scarto quadratico medio se si eseguono più misurazioni V F
d. l'errore di sensibilità dello strumento in ogni situazione. V F

69 Nella misura (73 ± 1)m l'incertezza è:
a. 1m **b.** 2m **c.** 0,5m **d.** l'intervallo tra 72 e 73 metri

70 Se M rappresenta il valore probabile della misura e e_a rappresenta l'errore assoluto, l'errore relativo si esprime mediante:
a. il prodotto $M \cdot e_a$ **b.** il rapporto $\dfrac{M}{e_a}$ **c.** il rapporto $\dfrac{e_a}{M}$ **d.** la somma $M + e_a$

71 Barra Vero o Falso.
a. L'errore relativo di una somma si determina sommando gli errori relativi delle due misure. V F
b. L'errore assoluto di una differenza si determina facendo la differenza tra gli errori assoluti delle due misure. V F
c. L'errore relativo di un quoziente si calcola sommando gli errori relativi delle due misure. V F
d. L'errore assoluto di un prodotto si calcola moltiplicando gli errori relativi delle due misure. V F

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

Applicazione

72 Cinque studenti misurano indipendentemente con lo stesso righello una barra di acciaio ottenendo le seguenti misure, tutte espresse in centimetri:

12,6 12,8 12,5 12,7 12,4

Trova il valore più probabile della misura, l'errore assoluto utilizzando la semidispersione e l'errore relativo. [$M = 12{,}6$cm; $e_a = 0{,}2$m; $e_r = 1{,}6\%$]

73 In un esperimento di laboratorio si misura per dieci volte la massa di un oggetto con una bilancia sensibile al decimo di grammo ottenendo i seguenti risultati:

15,4 15,8 14,9 14,8 15,2 15,0 15,3 15,1 14,7 14,9

Trova il valore più probabile della misura, l'errore assoluto e l'errore relativo. [$M = 15{,}1$; $e_a = 0{,}6$; $e_r = 0{,}0397$]

74 Misurando più volte la temperatura di una soluzione chimica stabile si ottengono i seguenti valori:

14,0° 13,8° 14,3° 14,2° 13,8° 14,0° 14,4° 13,6° 13,9° 14,3°

Trova il valore più probabile della misura, l'errore assoluto, l'errore relativo e scrivi in modo corretto la misura. [$M = 14{,}0°$; $e_a = 0{,}4$; $e_r = 0{,}0286$; $14{,}0° \pm 0{,}4°$]

75 Misurando lo spessore di una lamina con uno strumento avente la sensibilità di un centesimo di millimetro, si sono ottenuti i seguenti valori espressi in millimetri:

3,21 3,22 3,16 3,18 3,22 3,19 3,18 3,25 3,20 3,22

Calcola il valore probabile della misura ed esprimi l'errore assoluto mediante lo scarto quadratico medio. [$M = 3{,}20$mm; $e_a = 0{,}02$mm]

76 Indica quale tra le seguenti misure è la più precisa:

a. $(12{,}8 \pm 0{,}1)$m **b.** (48 ± 6)mm **c.** (50 ± 1)kg **d.** $(140{,}0 \pm 0{,}7)$s [**d.**]

77 Misurando le dimensioni di un tavolino si ottengono i seguenti valori:

$(50{,}0 \pm 0{,}1)$cm $(70{,}0 \pm 0{,}1)$cm

Calcola la misura dell'area del tavolo esprimendola con il corrispondente errore. [$(3500 \pm 12)\text{cm}^2$]

78 Un oggetto ha una massa di (1900 ± 5)g ed il suo volume è di $(760 \pm 10)\text{cm}^3$. Calcola la densità dell'oggetto (la densità è il rapporto tra la massa e il volume). [$(2{,}50 \pm 0{,}04)\text{g/cm}^3$]

79 Se $a = (78{,}3 \pm 0{,}1)$cm e $b = (8{,}9 \pm 0{,}1)$cm, calcola i risultati delle seguenti operazioni corredandole dell'errore:

a. $a + b$ **b.** $a - b$ **c.** $a \cdot b$ **d.** $\frac{a}{b}$

[**a.** $(87{,}2 \pm 0{,}2)$cm; **b.** $(69{,}4 \pm 0{,}2)$cm; **c.** $(697 \pm 9)\text{cm}^2$; **d.** $(8{,}8 \pm 0{,}1)$]

80 In un cilindro il raggio di base r misura $(2{,}0 \pm 0{,}1)$m e l'altezza h misura $(45{,}25 \pm 0{,}05)$cm: calcola il volume con la corrispondente incertezza. [$(5{,}7 \pm 0{,}6)\text{m}^3$]

81 Un campione di liquido di massa $m = (131 \pm 2)$g occupa un volume di $(0{,}163 \pm 0{,}003)\text{dm}^3$. Quanto vale la densità del materiale espressa in kg/m^3? [$8{,}0 \cdot 10^2 \pm 0{,}3 \cdot 10^2$]

82 L'area di un pavimento rettangolare viene coperta con 42 mattonelle identiche di area 4cm^2 con errore relativo del 4%. Calcola la superficie del pavimento corredandola del suo errore assoluto. [$(1{,}68 \cdot 10^2 \pm 0{,}07 \cdot 10^2)\text{cm}^2$]

83 Per realizzare un mosaico avente la superficie di $0{,}8\text{m}^2$ si usano piccole piastrelle quadrate di lato $(1{,}5 \pm 0{,}2)$cm. Qual è il numero minimo e il numero massimo di piastrelle che sono necessarie per realizzare il mosaico considerando l'incertezza della misura di ciascuna piastrella? [2768; 4734]

Per la verifica delle competenze

1 In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono date le rette di equazioni $y = 2$ e $y = x$; scrivi l'equazione del luogo dei punti P per i quali vale la relazione $\overline{PH}^2 + \overline{PK}^2 = 3$ essendo H e K le proiezioni di P sulle due rette. $[x^2 - 2xy + 3y^2 - 8y + 2 = 0]$

2 Sono date le circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - x = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x = 0$; una retta passante per l'origine interseca la prima circonferenza in A e la seconda in B. Scrivi l'equazione del luogo descritto dal punto medio P del segmento AB. $[2x^2 + 2y^2 - 3x = 0]$

3 Sia $F(0, a)$ un punto fisso in un piano cartesiano; costruisci il luogo dei punti P per i quali il rapporto tra la distanza di P da F e dall'asse x è uguale a k, essendo k un numero reale. Verifica poi che l'equazione ottenuta rappresenta:

a. una circonferenza se $k = 0$
b. un'ellisse se $0 < k < 1$
c. una parabola se $k = 1$
d. un'iperbole se $k > 1$. $[x^2 + (1 - k^2)y^2 - 2ay + a^2 = 0]$

4 La magnitudo M di un terremoto viene definita, secondo la scala Richter, dalla formula $M = \log \frac{A}{A_0}$ dove A rappresenta il massimo spostamento rispetto allo zero della traccia lasciata da un sismografo e A_0 indica il valore massimo dello stesso spostamento per un terremoto preso come campione.
Stabilisci, motivando adeguatamente le risposte, se le seguenti affermazioni sono corrette oppure no.

a. Un terremoto di magnitudo 6 è dieci volte più potente di un terremoto di magnitudo 5.
b. Un terremoto di magnitudo 7,2 ha una potenza doppia di uno di magnitudo 3,6.

[corretta la **a.**; errata la **b.**]

5 L'orecchio umano percepisce la pressione sonora in maniera logaritmica, anziché lineare, quindi risulta conveniente esprimere le grandezze legate all'ampiezza del suono in un'unità di misura logaritmica chiamata *decibel*. Se X è una generica grandezza e X_0 è un valore di riferimento per quella grandezza, si definisce decibel l'espressione $\text{dB} = 10\log \frac{X}{X_0}$.

a. Due suoni hanno rispettivamente intensità di 10^{-12}Watt/m^2 e 10^{-14}Watt/m^2; qual è il rapporto fra le loro intensità in decibel? [2]
b. Due suoni hanno intensità di 100dB e 70dB, qual è il rapporto fra le loro intensità espresse in Watt/m^2? [1000]

6 Si sono misurate le lunghezze dei due lati di un rettangolo: $(2{,}12 \pm 0{,}08)\text{m}$ e $(4{,}15 \pm 0{,}08)\text{m}$. Calcola esprimendo il risultato con il corretto numero di cifre significative e con il corrispondente errore:

a. il perimetro del rettangolo
b. la sua area. $[2p = (12{,}54 \pm 0{,}32)\text{m; area} = (8{,}80 \pm 0{,}50)\text{m}^2]$

Soluzioni esercizi di comprensione

1 **c.**	**2** **a.**, **b.**	**3** **a.**	**4** **b.**
57 **a.** V, **b.** F, **c.** F, **d.** V, **e.** V	**58** **b.**	**66** **d.**	**67** **a.** V, **b.** F, **c.** V, **d.** F
68 **a.** V, **b.** V, **c.** V, **d.** F	**69** **a**	**70** **c.**	**71** **a.** F, **b.** F, **c.** V, **d.** F

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Test finale di autovalutazione

1 In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale la retta r passa per l'origine e forma un angolo di 60° con l'asse x. Qual è il luogo geometrico dei punti P per i quali il rapporto delle distanze di P da r e dall'asse x è uguale a 2?

15 punti

2 Determina le coordinate del punto di intersezione delle rette le cui equazioni parametriche sono le seguenti:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + \frac{1}{2}t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3s - 1 \\ y = 5 - 4s \end{cases}$$

12 punti

3 L'equazione parametrica $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ rappresenta:

a. l'ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

b. l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

c. l'iperbole di equazione $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

d. una curva diversa dalle precedenti.

10 punti

4 La curva di equazione $\rho = \frac{6}{3 - 5\cos\vartheta}$ rappresenta:

a. un'ellisse **b.** una parabola **c.** un'iperbole

6 punti

5 L'equazione polare della retta $x + 1 = 0$ è:

a. $\rho \cos\vartheta = -1$ **b.** $\rho\cos\vartheta = 1$ **c.** $\rho = \cos\vartheta$ **d.** $\rho = -\cos\vartheta$

6 punti

6 In un sistema di riferimento polare è dato il segmento AB di estremi $A\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ e $B\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$. Dopo aver scritto le coordinate cartesiane di A e B, verifica che AB è parallelo all'asse polare.

10 punti

7 Considerata la curva di equazione polare $\rho = \frac{-1}{1 - \sqrt{3}\cos\vartheta}$:

a. individuane il tipo — 6 punti

b. trova i punti di modulo uguale a 2 — 5 punti

c. scrivi la sua equazione cartesiana. — 5 punti

8 Le dimensioni di un fermacarte a forma di parallelepipedo rettangolo vengono misurate con un errore del 9% e sono: 7,6cm 12,5cm 3,8cm. La sua massa è di $(0{,}45 \pm 0{,}02)$kg. Esprimi ciascuna misura con la sua incertezza e calcola la densità del fermacarte.

15 punti

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	Totale
Punteggio									

Voto: $\frac{\text{totale}}{10} + 1 =$

Soluzioni

1 Il luogo è formato dalle rette di equazioni $\sqrt{3}x - 5y = 0$ e $\sqrt{3}y - x = 0$.

2 $\left(\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)$

3 **a.**

4 **c.**

5 **a.**

6 $A(2, 2)$; $B(2\sqrt{3}, 2)$

7 **a.** iperbole, **b.** $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$, **c.** $2x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

8 $(7{,}6 \pm 0{,}7)$cm; $(12{,}5 \pm 1{,}1)$cm; $(3{,}8 \pm 0{,}3)$cm; densità $= (1{,}25 \pm 0{,}39)$g/cm^3

© Istituto Italiano Edizioni Atlas