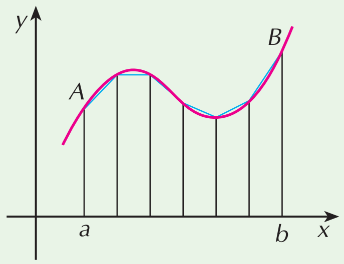
APPROFONDIMENTO

La lunghezza di una linea

Oltre alla determinazione di aree e volumi, gli integrali definiti ci permettono di calcolare anche **la lunghezza di un arco di linea piana**.
Sia dunque $y = f(x)$ una funzione continua e siano A e B due suoi punti di ascisse rispettivamente a e b; per calcolare la lunghezza del tratto di curva compreso tra A e B, possiamo ragionare in questo modo. Suddividiamo come al solito l'intervallo $[a, b]$ in n parti ciascuna di ampiezza Δx e consideriamo la poligonale avente per vertici i punti di f che si trovano in corrispondenza degli estremi degli intervalli individuati (***figura 1***). Poiché conosciamo le coordinate di ogni vertice di tale poligonale (l'ascissa è uno degli estremi degli intervalli Δx, l'ordinata è il corrispondente valore della funzione), possiamo calcolare la lunghezza di ciascuno dei segmenti che la compongono; la lunghezza della poligonale sarà poi la somma delle lunghezze di tutti quei segmenti. Se facciamo tendere n all'infinito, l'ampiezza di ciascuno degli intervalli tende a zero e la poligonale tende a confondersi con il tratto di curva in questione; possiamo quindi definire la lunghezza dell'arco AB di curva come limite, per $n \to +\infty$ della lunghezza della poligonale. Si dimostra che tale lunghezza ℓ è data dalla relazione

Figura 1



$$\boxed{\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

Calcoliamo, per esempio, la lunghezza dell'arco di parabola di equazione $y = x^2$ che ha per estremi i punti A di ascissa 0 e B di ascissa 2.

Stabilito che $y' = 2x$, dobbiamo calcolare $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx$

Calcoliamo l'integrale indefinito $\displaystyle\int \sqrt{1 + 4x^2}\; dx$

operando la sostituzione $\sqrt{1 + 4x^2} = t - 2x$

da cui $\quad x = \dfrac{t^2 - 1}{4t} \quad$ e quindi $\quad \sqrt{1 + 4x^2} = \dfrac{t^2 + 1}{2t}$

Si ha inoltre che $dx = \dfrac{t^2 + 1}{4t^2} dt$, quindi

$$\int \sqrt{1 + 4x^2}\; dx = \int \frac{t^2 + 1}{2t} \cdot \frac{t^2 + 1}{4t^2} dt = \frac{1}{8} \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} t^2 + 2 \ln |t| - \frac{1}{2t^2} \right)$$

Operando la sostituzione inversa otteniamo che

$$\int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\; dx = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 4x^2} + 2x \right)^2 + 2 \ln \left| \sqrt{1 + 4x^2} + 2x \right| - \frac{1}{2\left(\sqrt{1 + 4x^2} + 2x \right)^2} \right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left(\sqrt{17} + 4 \right) + \sqrt{17} \approx 4{,}647$$

L'area di una superficie di rotazione

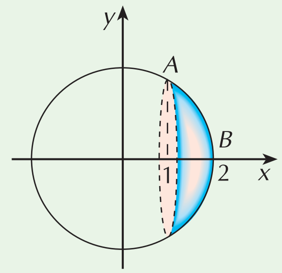
Se facciamo poi ruotare l'arco AB di curva attorno all'asse x (riferisciti ancora alla ***figura 1***), otteniamo una **superficie di rotazione** la cui area S si dimostra che è data da

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

Considerata la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$, calcoliamo per esempio l'area della calotta sferica generata dalla rotazione attorno all'asse x dell'arco AB, dove A ha ascissa 1 e B ha ascissa 2 (***figura 2***).

L'equazione della funzione f si ottiene esplicitando quella della circonferenza rispetto alla variabile y e considerandone poi il ramo positivo; di tale funzione ci serve poi anche conoscere la derivata prima. Si ha così che:

Figura 2



$$y = \sqrt{4 - x^2} \qquad \text{e} \qquad y' = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

L'area richiesta è dunque data da

$$2\pi \int_1^2 \sqrt{4 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_1^2 2\, dx = 4\pi \Big[x\Big]_1^2 = 4\pi$$

Esercizi

Date le seguenti funzioni $f(x)$, determina la lunghezza della linea da esse rappresentata nell'intervallo indicato.

1 **Esercizio guidato**

$f(x) = \ln \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ in $[1, 2]$

Calcoliamo innanzi tutto la derivata della funzione $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \cdot \dfrac{-2e^x}{(e^x - 1)^2} = -\dfrac{2e^x}{e^{2x} - 1}$

La lunghezza della linea è quindi $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}}\, dx = \int_1^2 \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\, dx$

Per calcolare la primitiva della funzione ottenuta operiamo la sostituzione:

$$e^{2x} = t \qquad \text{da cui} \qquad dx = \frac{1}{2t}\, dt$$

Calcoliamo allora: $\displaystyle\int \frac{t + 1}{2t(t - 1)}\, dt$

$$\frac{A}{2t} + \frac{B}{t - 1} = \frac{t + 1}{2t(t - 1)} \qquad \text{se} \qquad A = -1 \quad \wedge \quad B = 1$$

$$\int \left(-\frac{1}{2t} + \frac{1}{t - 1}\right) dt = -\frac{1}{2} \ln |t| + \ln |t - 1|$$

Ritornando nella variabile x:

$$\int_1^2 \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\, dx = \left[-\frac{1}{2} \ln e^{2x} + \ln |e^{2x} - 1|\right]_1^2 = \Big[-x + \ln |e^{2x} - 1|\Big]_1^2 = \ln (e^2 + 1) - 1 \approx 1{,}127$$

2 $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}$ in $[1, 2]$ $\left[\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\right]$

3 $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-7)^3}$ in $[7, 10]$ $\left[\frac{14}{3}\right]$

4 $f(x) = x\sqrt{x}$ in $[0, 1]$ $\left[\frac{1}{27}\left(\sqrt{13^3}-8\right)\right]$

5 $f(x) = x^2$ in $[0, 2]$ $\left[\frac{1}{4}\ \ln\left(\sqrt{17}+4\right)+\sqrt{17}\approx 4{,}65\right]$

6 $f(x) = \sqrt{2-x^2}$ in $[0, 1]$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\right]$

7 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ in $[-3, 3]$ $\left[3\sqrt{10}+\ln\left(\sqrt{10}+3\right)\approx 11{,}305\right]$

8 $y = (x+1)\sqrt{x+1}$ in $[0, 3]$ $\left[\frac{1}{27}\left(80\sqrt{10}-13\sqrt{13}\right)\right]$

Calcola l'area della superficie generata dalla rotazione completa attorno all'asse x delle funzioni $f(x)$ assegnate nell'intervallo indicato.

9 $f(x) = \frac{1}{2}x$ in $[1, 3]$ $\left[2\sqrt{5}\pi\right]$

10 $f(x) = 3x+1$ in $[2, 4]$ $\left[40\sqrt{10}\pi\right]$

11 $f(x) = x^2$ in $[0, 2]$ $\left[\pi\left[\frac{33}{8}\sqrt{17}-\frac{1}{32}\ \ln\left(\sqrt{17}+4\right)\right]\approx 53{,}23\right]$

12 $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ in $[-1, 1]$ $\left[4\pi\left[2+\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right]\approx 34{,}69\right]$

13 $f(x) = -x^2+1$ in $[-1, 1]$ $\left[\frac{\pi}{16}\left[14\sqrt{5}+17\ \ln\left(\sqrt{5}+2\right)\right]\approx 10{,}97\right]$