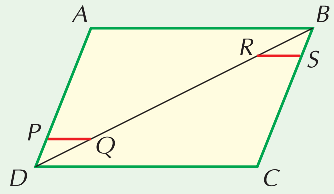
APPROFONDIMENTO

Bonaventura Cavalieri e l'area di un'ellisse

Nel 1635 Bonaventura Cavalieri (1598-1647), allievo di Galileo e professore in un liceo di Bologna, pubblica un'opera dal titolo *Geometria degli indivisibili*; in essa egli descrive, fra le altre cose, un metodo geometrico per il calcolo di un'area, immaginando che essa sia formata da un numero indefinito di segmenti paralleli ed equidistanti che egli chiama *indivisibili*.

Per avere un'idea di come funziona il suo metodo consideriamo il parallelogramma $ABCD$ in ***figura 1***; per dimostrare che $ABCD$ ha area doppia di ciascuno dei triangoli ABD e BDC, egli osserva che, se $PD \cong BS$, allora $PQ \cong RS$ e quindi i triangoli ABD e BDC sono composti da un numero uguale di segmenti fra loro congruenti come PQ e RS e perciò devono avere aree uguali. Come applicazione di questo metodo egli riesce a trovare l'area della parte di piano racchiusa da un'ellisse; ecco il suo ragionamento (***figura 2***).

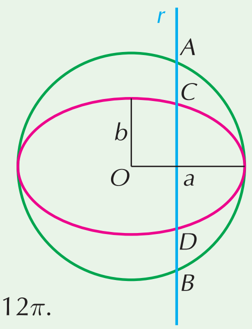
Figura 1



Consideriamo l'ellisse avente a come semiasse maggiore e b come semiasse minore e la circonferenza con centro nel centro dell'ellisse e raggio a.

Una retta r perpendicolare all'asse maggiore dell'ellisse incontra l'ellisse e la circonferenza individuando i segmenti AB sulla circonferenza e CD sull'ellisse il cui rapporto è uguale a $\frac{a}{b}$. Per il principio di Cavalieri, allora, lo stesso rapporto deve sussistere tra l'area del cerchio e quella dell'ellisse.

Figura 2



Se indichiamo con A tale area abbiamo che:

$$\pi a^2 : A = a : b \qquad \text{da cui ricaviamo che} \qquad \boxed{A = \pi ab}$$

Per esempio l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, essendo $a = 4$ e $b = 3$, ha area $A = 12\pi$.

ESERCIZI

1 Calcola l'area della regione di piano delimitata dalle seguenti ellissi:

a. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ **b.** $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$ **c.** $3x^2 + 4y^2 = 12$ [**a**. 12π; **b**. $3\sqrt{2}\pi$; **c**. $2\sqrt{3}\pi$]

2 Un'ellisse ha eccentricità $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e un fuoco in $F\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$. Calcola l'area della regione di piano da essa racchiusa. [8π]

3 Un'ellisse ha un fuoco nel punto $F(-4, 0)$ e un vertice in $A(0, 3)$. Qual è la sua area? [15π]

4 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, determina il rapporto fra l'area del quadrato, con i lati paralleli agli assi cartesiani, in essa inscritto e l'area dell'ellisse. $\left[\text{area} = \frac{8}{3\sqrt{2}\pi}\right]$

5 Data l'ellisse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$, scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y che passa per i suoi fuochi ed è tangente alla retta di equazione $y + 8 = 0$. Trova il rapporto R fra l'area della parte di piano delimitata dall'ellisse e quella del segmento parabolico delimitato dalla parabola e dall'asse x. $\left[y = \frac{1}{2}x^2 - 8;\ R = \frac{9\sqrt{5}}{32}\pi\right]$