Le rendite finanziarie

Obiettivi

- riconoscere e saper classificare una rendita
- utilizzare le formule per il calcolo di montante e valore attuale di una rendita:
  - immediata e differita
  - temporanea e perpetua
- saper risolvere problemi riguardanti le rendite

1. CHE COS'E' UNA RENDITA

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 26

1.1 Le definizioni e la classificazione

La parola *rendita* nel linguaggio comune ha il significato di una somma che periodicamente viene incassata; vivere di rendita, per esempio, significa avere a disposizione una certa somma ogni mese che deriva da interessi su capitali, da risparmi, da lasciti o altro.
In matematica finanziaria il termine rendita ha un significato più ampio ed è legato sia alla riscossione che al pagamento di somme stabilite a scadenze prefissate.
Supponiamo per esempio che un genitore si preoccupi di accantonare del denaro, diciamo € 1 000 all'anno, a partire dalla nascita del proprio figlio, che possa consentirgli di completare il corso di studi; il figlio, una volta giunto all'università, usufruirebbe della somma accantonata godendo di una rata annua o mensile fino al completamento dei cinque anni del corso di studi.

Chiamiamo **rendita** una successione di importi (le rate) da riscuotere o da pagare in epoche stabilite (le scadenze) ad intervalli di tempo determinati.

In ***figura 1*** abbiamo rappresentato la situazione sulla retta dei tempi: in alto le rate da riscuotere o pagare, in basso i tempi della riscossione o del pagamento.
Le rendite di cui ci occupiamo in questo capitolo sono le **rendite certe**, cioè quelle rendite che non sono condizionate dall'accadere o meno di eventi aleatori, ma che dipendono solo dal tipo di contratto stipulato.

Figura 1

I fattori che caratterizzano una rendita sono i seguenti.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Gli elementi caratteristici di una rendita

- La **rata**, cioè l'importo che viene riscosso o pagato ad ogni periodo. Si possono avere rendite con *rata costante* o rendite con *rata variabile*.
- La **numerosità** delle rate, cioè il numero di rate che costituisce la rendita. Si possono avere rendite con un numero finito di rate, per esempio 20, e in questo caso si parla di *rendite temporanee*, o con un numero illimitato di rate, le cosiddette *rendite perpetue* o *vitalizie*, nelle quali il soggetto incassa la rendita fino a che è in vita o, nel caso di enti, fino a che esiste.
- Il **periodo**, che indica l'intervallo di tempo tra la riscossione (o il pagamento) di una rata e l'altra. Di solito il periodo è costante e si possono avere:
  - *rendite annue* se il tempo che intercorre tra la riscossione di una rata e l'altra è di un anno
  - *poliennali* se il tempo è di più anni
  - *frazionate* se il tempo è una frazione di anno, per esempio rendite mensili, trimestrali e così via.
- La **decorrenza**, che indica quando può essere riscossa la prima rata. Possiamo avere *rendite immediate* se il pagamento delle rate avviene entro il primo periodo dopo la stipula del contratto, oppure *differite* se avviene dopo più periodi.
  Per esempio, si può stipulare un contratto con una Assicurazione che prevede che, dietro il pagamento di € 30 000, si abbia diritto, a partire da subito, a una rendita vitalizia di € 1 000 all'anno; questa è una rendita immediata. La pensione è invece una rendita differita perché il pagamento avviene al termine della carriera lavorativa dopo aver raggiunto una certa età.
- La **scadenza** delle rate, che, una volta fissata la decorrenza, indica il momento in cui può essere riscossa la prima rata e, di conseguenza, tutte le altre. Si possono avere *rendite anticipate* se il pagamento della rata avviene all'inizio di ogni periodo, oppure *posticipate* se avviene al termine.
  Il contraente della polizza assicurativa portata come esempio di rendita immediata può avere il pagamento all'inizio dell'anno di decorrenza della polizza, e in questo caso la rendita è anticipata, oppure alla fine dell'anno, e la rendita è allora posticipata.

La classificazione

Possiamo riassumere quanto detto in una tabella che costituisce anche una classificazione delle rendite.

Relativamente al periodo	Annua	Frazionata	Poliennale
Relativamente alla numerosità delle rate	Temporanea	Perpetua	
Relativamente alla decorrenza	Immediata	Differita	
Relativamente alla scadenza	Anticipata	Posticipata	

Tornando all'esempio iniziale, il figlio del genitore avveduto, arrivato all'università, avrà una rendita:

- formata da 5 rate annue (oppure 60 mensili) di importo costante
- temporanea perché la durata è di soli 5 anni
- differita perché inizierà a percepirla al momento dell'iscrizione all'università
- anticipata perché è stato disposto che la rata gli venga corrisposta all'inizio di ogni anno (o mese).

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

ESEMPI

1. Mario deve riscuotere € 500 all'inizio di ogni anno per 6 anni.

Si tratta di una rendita che è: costante perché l'importo della rata è fisso; annua perché il periodo che intercorre tra una rata e l'altra è di 1 anno; temporanea perché il numero delle rate è 6, cioè un numero finito; anticipata perché la riscossione avviene all'inizio dell'anno, cioè all'inizio del periodo di competenza.

2. Lucia deve pagare € 60 alla fine di ogni mese per 3 anni.

La rata è di € 60 quindi si tratta di una rendita costante; il tempo che intercorre tra un periodo e l'altro è di 1 mese e quindi la rendita è frazionata; il numero delle rate è 36, quindi è una rendita temporanea; il pagamento è fatto alla fine del mese quindi è una rendita posticipata.

3. Un artigiano ha in affitto un capannone per il quale paga, semestralmente, un canone di locazione di € 5000. Il contratto scade fra 4 anni.

Si tratta di una rendita costante che è: frazionata (il canone di affitto è semestrale), temporanea (il contratto è valido 4 anni), immediata e anticipata (l'affitto si paga alla stipula del contratto ed è anticipato).

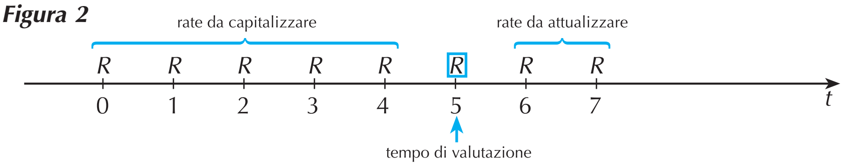
4. Fabio potrà riscuotere, a partire da oggi finché sarà in vita, € 1000 ogni tre mesi alla scadenza di ogni periodo.

La rendita è costante ed è evidentemente frazionata, è perpetua perché il numero delle rate non è precisato, è immediata, è posticipata perché il pagamento avviene alla fine del trimestre.

1.2 Le ipotesi di lavoro

Per risolvere qualunque problema che riguardi movimenti di denaro, quindi anche una rendita, è necessario conoscere il regime finanziario in cui si opera; nel caso delle rendite il regime è quello di **interesse o di sconto composto**.
Supporremo inoltre che le rate di una rendita siano costanti e che vengano pagate o riscosse a periodi fissi stabiliti (una volta al mese, una volta all'anno e così via).
Il problema che si presenta con maggiore frequenza è quello di valutare una rendita ad un certo punto del contratto. Per esempio (***figura 2***), se una rendita è composta da 8 rate e vogliamo sapere qual è il suo valore alla riscossione della sesta, dobbiamo capitalizzare le prime cinque, aggiungere la sesta rata e attualizzare le successive due.

Figura 2



Il valore di una rendita ad un'epoca t è la somma dei montanti delle rate antecedenti a t , con i valori attuali delle rate che scadono in epoca successiva a t, più la rata al tempo t.

Anche se una rendita può essere valutata in qualunque momento del contratto, particolare interesse hanno le seguenti valutazioni:

- la valutazione posteriore a tutte le rate (o coincidente con l'ultima), che avviene calcolando il montante di tutte le rate
- la valutazione antecedente a tutte le rate (o coincidente con la prima), che avviene calcolando il valore attuale di tutte le rate.

Nel fare queste valutazioni dobbiamo però ragionare in modo diverso a seconda che la rata sia anticipata o posticipata.
Consideriamo per esempio una rendita costante formata da quattro rate di uguale importo R :

- se la rendita è anticipata, le rate vengono pagate all'inizio dei periodi e possiamo rappresentare la situazione sulla retta dei tempi come in ***figura 3a***;
- se la rendita è posticipata, le rate vengono versate alla fine dei periodi e la situazione appare come in ***figura 3b*** (in pratica è come se la rata venisse differita di un periodo).

Di conseguenza:

- il calcolo del montante deve essere fatto:
  - un periodo dopo il versamento dell'ultima rata se la rendita è anticipata (***figura 4a***)
  - all'atto del pagamento dell'ultima rata se la rendita è posticipata (***figura 4b***).
- il calcolo del valore attuale deve essere fatto:
  - all'atto del pagamento della prima rata se la rendita è anticipata (***figura 5a***)
  - un periodo prima del pagamento della prima rata se la rendita è posticipata (***figura 5b***).

Nei prossimi paragrafi vediamo come risolvere questi problemi.

Figura 3

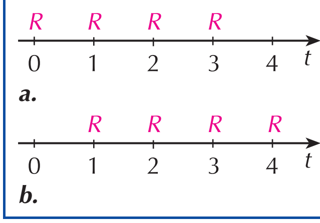


Figura 4

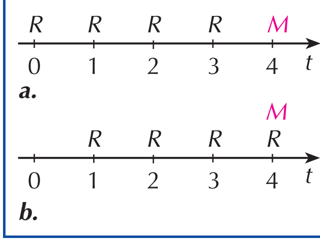
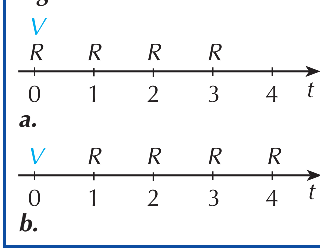


Figura 5



VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Accanto ad ogni descrizione barra le caselle che caratterizzano le seguenti rendite temporanee (Annua, Frazionata, Immediata, Differita, Anticipata, Posticipata).

a. Luca riceverà € 2000 all'inizio di ogni anno quando compirà 20 anni e fino ai 25. A F I D A P

b. Per l'acquisto dell'auto Anna deve pagare € 220 al mese, a partire dalla stipula del contratto, alla fine di ogni mese, fino al completo pagamento della stessa. A F I D A P

c. Per l'affitto della sua abitazione Marco paga € 800 al mese a partire dalla stipula del contratto all'inizio di ogni mese. A F I D A P

d. Un Ente benefico riceve un lascito che comporta la riscossione di € 5000 alla fine di ogni anno per 10 anni. A F I D A P

2. IL MONTANTE DI UNA RENDITA IMMEDIATA

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 27

2.1 Il calcolo del montante alla scadenza

Il caso delle rendite posticipate

Applicazione informatica *on line*

Riprendiamo ora lo studio delle rendite e poniamoci il seguente problema.
Versiamo una somma costante di € 700, per 4 anni e alla fine di ogni anno, in un fondo che capitalizza annualmente al tasso del 2% annuo.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Vogliamo sapere a quanto ammonterà il nostro capitale dopo l'ultimo versamento fatto.
Si tratta di stabilire il montante di una rendita annua di € 700 per 4 anni; sappiamo che:

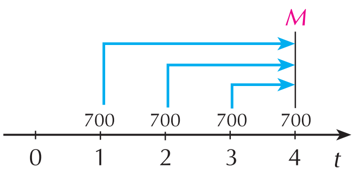
- il periodo della rendita è di 1 anno
- il tasso di interesse è annuo, conforme al periodo della rata
- la rendita è temporanea perché le rate sono 4
- si tratta di una rendita posticipata perché ogni rata viene versata alla fine di ciascun periodo.

Per calcolare il montante di questa rendita (***figura 6***), osserviamo che la somma di € 700 versata all'anno 1 produce interesse per tre anni, la somma di € 700 versata all'anno 2 produce interesse per due anni, la somma di € 700 versata all'anno 3 produce interesse per un anno, mentre la somma di € 700 versata all'anno 4 non produce interesse.
Il montante finale sarà quindi dato dalla somma dei montanti prodotti dai quattro capitali, ciascuno di € 700, per il periodo di competenza; possiamo quindi scrivere che

$$M = 700(1+0{,}02)^3 + 700(1+0{,}02)^2 + 700(1+0{,}02) + 700$$

Se eseguiamo il calcolo con una calcolatrice troviamo che $M = 2885{,}12$(€).

Figura 6



Generalizziamo il problema e consideriamo una rendita posticipata formata da n rate di importo R; sia poi i il tasso di interesse che deve essere conforme al periodo della rendita: interesse annuo se la rata è annua, interesse semestrale se la rata è semestrale e così via.
Il valore M della rendita al tempo n è la somma dei montanti prodotti dalle singole rate (***figura 7***); la prima rata deve quindi essere capitalizzata per $n-1$ anni, la seconda per $n-2$ anni, la terza per $n-3$ e così via fino all'ultima rata, che non produce interesse in quanto viene versata esattamente al tempo n.
Otteniamo quindi che:

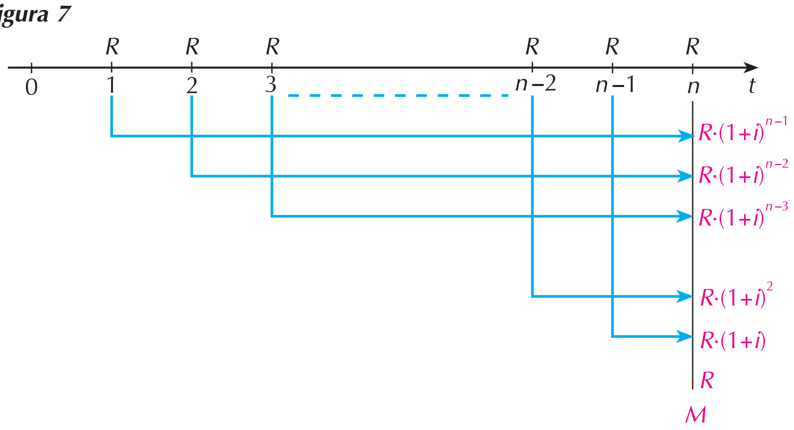
Ricordiamo le formule per la conversione dei tassi:
$i = (1+i_k)^k - 1$
$i_k = \sqrt[k]{1+i} - 1$
$j_k = k \cdot i_k$

$$M = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-3} + ... + R(1+i)^2 + R(1+i)^1 + R$$

Per arrivare ad una formula comoda da applicare raccogliamo dapprima l'importo R della rata:

$$M = R\left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + ... + (1+i)^2 + (1+i)^1 + 1\right]$$

Figura 7



Osserviamo adesso che gli addendi all'interno della parentesi sono i termini di una progressione geometrica il cui primo termine vale 1 e la ragione è $(1+i)$:

$$1 \qquad (1+i) \qquad (1+i)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1+i)^{n-3} \qquad (1+i)^{n-2} \qquad (1+i)^{n-1}$$

La somma di questi termini vale $1 \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$ cioè $\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$, quindi il montante M è dato dalla formula:

$$\boxed{M = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

La somma S dei primi n termini di una progressione geometrica avente primo termine uguale ad a e di ragione q è data dalla formula:

$$S = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Nel nostro caso

$$a = 1 \qquad q = 1 + i$$

L'espressione $\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ si indica con il simbolo $s_{\overline{n}|i}$ che si legge *s posticipato, figurato n, al tasso i*.

Essa rappresenta il **montante prodotto da una rendita unitaria immediata posticipata per *n* periodi al tasso periodale *i*.**

In definitiva:

LA FORMULA

il montante di una rendita immediata posticipata, formata da n rate di importo costante R, al tasso periodale i, all'atto del versamento dell'ultima rata, è uguale a:

$$M = R \cdot s_{\overline{n}|i} \qquad \text{dove} \qquad s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Per $i = 0$ la formula non è applicabile; tuttavia, se il tasso di interesse è zero, il montante equivale al valore delle n rate di importo R, cioè $M = nR$.

Per esempio, il valore di una rendita posticipata di rata $R = 800$ euro, formata da 15 rate mensili al tasso mensile dello 0,2% è uguale a:

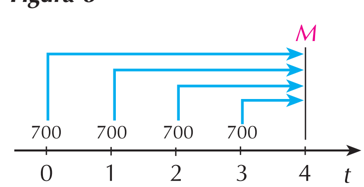
$$M = 800 \cdot \frac{(1+0{,}002)^{15} - 1}{0{,}002} = 12169{,}47(€)$$

Osserviamo che il tasso di interesse è conforme al periodo della rata.

Il caso delle rendite anticipate

Riprendiamo l'esempio considerato all'inizio del paragrafo, in cui depositiamo la somma di € 700 per 4 anni al tasso annuo del 2%, ma supponiamo questa volta che i versamenti avvengano all'inizio di ogni anno.
Si tratta ancora di una rendita temporanea perché il numero delle rate è finito, ma in questo caso la rendita è anticipata perché i versamenti sono effettuati all'inizio di ogni periodo. Il calcolo del montante deve allora tener conto che anche l'ultima rata ha prodotto interesse e la situazione può quindi essere rappresentata sull'asse dei tempi come in ***figura 8***; in essa la somma di € 700 versata all'anno 0 produce interesse per quattro anni, quella versata all'anno 1 produce interesse per tre anni, quella all'anno 2 produce interesse per due anni, mentre all'anno 3 la stessa somma produce interesse per un anno.
Possiamo dunque considerare il montante di questa rendita come la somma dei montanti prodotti dai quattro capitali, ciascuno di € 700, impiegati al 2% rispettivamente per quattro, tre, due, un anno.

Figura 8



© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Abbiamo quindi che

$$M = 700(1+0{,}02)^4 + 700(1+0{,}02)^3 + 700(1+0{,}02)^2 + 700(1+0{,}02)$$

Se eseguiamo il calcolo con una calcolatrice troviamo che $M = 2942{,}83$(€).

Anche in questo caso possiamo giungere ad una formula che esprime il valore di M; il ragionamento da seguire è analogo a quello del paragrafo precedente:

- Il valore della rendita al tempo n è la somma dei montanti prodotti dalle singole rate (***figura 9***); la prima rata deve essere capitalizzata per n anni, la seconda per $n-1$ anni, la terza per $n-2$ e così via fino all'ultima rata, che produce interesse solo per un anno.

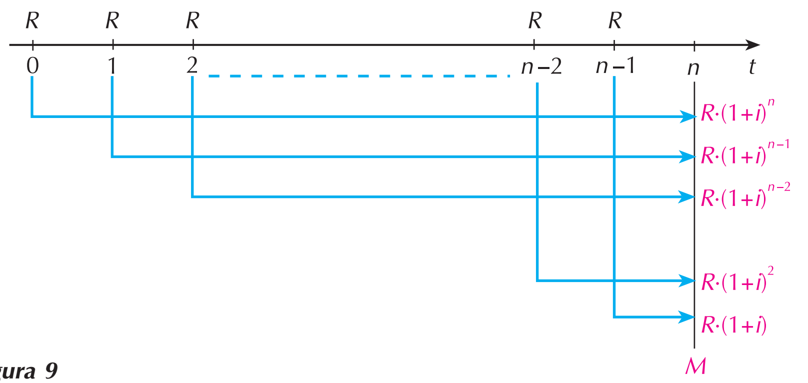


Figura 9

- Il montante complessivo si calcola quindi con la formula

$$M = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + ... + R(1+i)^2 + R(1+i)^1$$

- Raccogliamo il fattore $R(1+i)$ comune a tutti gli addendi:

$$M = R(1+i)\left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + ... + (1+i)^1 + 1\right]$$

- L'espressione all'interno della parentesi quadra è la somma dei termini della stessa progressione geometrica precedente, quindi

$$M = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$$

L'espressione $\frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$ si indica con il simbolo $\ddot{s}_{\overline{n|}i}$ che si legge *s anticipato, figurato n, al tasso i*.

Essa rappresenta il **montante prodotto da una rendita unitaria immediata anticipata per *n* periodi al tasso periodale *i*.**

In definitiva:

LA FORMULA

il montante di una rendita immediata anticipata, formata da n rate di importo costante R, al tasso periodale i, un periodo dopo l'ultimo versamento, è uguale a:

$$M = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n|}i} \qquad \text{dove} \qquad \ddot{s}_{\overline{n|}i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$$

Anche in questo caso per $i = 0$ la formula non è applicabile; tuttavia, come nel caso precedente, se il tasso di interesse è zero il montante equivale al valore delle n rate di importo R, cioè $M = nR$.

Per esempio, il valore di una rendita anticipata di rata $R = 1\,200$ €, formata da 8 rate trimestrali al tasso trimestrale dello 0,4% è uguale a:

$$M = 1\,200 \cdot \frac{(1 + 0{,}004)^8 - 1}{0{,}004} \cdot (1 + 0{,}004) = 9\,774{,}42(€)$$

Osserviamo che il tasso di interesse è conforme al periodo della rata.

Riassumiamo in una tabella le formule che abbiamo imparato:

Tipo di rendita	Montante della rendita	
posticipata	$M = R \cdot s_{\overline{n}\rceil i}$	$s_{\overline{n}\rceil i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
anticipata	$M = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n}\rceil i}$	$\ddot{s}_{\overline{n}\rceil i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$

I simboli $s_{\overline{n}\rceil i}$ e $\ddot{s}_{\overline{n}\rceil i}$ sono legati dalla relazione

$$\ddot{s}_{\overline{n}\rceil i} = s_{\overline{n}\rceil i} \cdot (1+i)$$

Come risolvere i problemi

In un problema di capitalizzazione sulle rendite, le variabili in gioco sono 4: M, R, n e i; conoscendo tre di esse, è sempre possibile trovare la quarta risolvendo l'equazione che si ottiene sostituendo i valori delle variabili note nelle formule. Negli esempi che seguono affrontiamo problemi di:

- calcolo del montante
- calcolo della rata
- calcolo del numero di rate.

Non possiamo ancora affrontare problemi relativi al calcolo del tasso di interesse in quanto di solito si ottengono equazioni di grado molto alto che non sappiamo risolvere.
Per esempio, se volessimo determinare a quale tasso è stata valutata una rendita posticipata in cui $M = 12000$, $R = 1500$, $n = 20$, dovremmo risolvere l'equazione

$$12\,000 = 1\,500 \cdot \frac{(1+i)^{20} - 1}{i}$$

cosa che non siamo in grado di fare.
Vedremo verso la fine del capitolo come sia possibile risolvere in modo approssimato questo tipo di equazioni.

ESEMPI

Esempi sul calcolo del montante

1. Carla versa in un fondo che capitalizza a un tasso dell'1,5% annuo € 2000 per 10 anni alla fine di ogni anno. Qual è il montante di questa rendita?

Si tratta di una rendita annua posticipata dove il tasso di interesse è già conforme al periodo della rata; i dati del problema sono: $R = 2\,000$ $\quad n = 10 \quad$ $i = 0{,}015$. Vogliamo trovare M.

Applichiamo la formula $M = R \cdot s_{\overline{n}\rceil i}$:

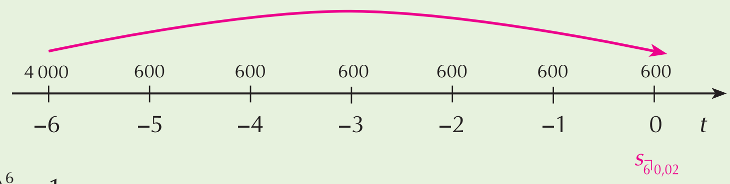
$$M = 2000 \cdot s_{\overline{10}\rceil 0{,}015} = 2000 \cdot \frac{(1 + 0{,}015)^{10} - 1}{0{,}015} = 21\,405{,}44(€)$$

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

2. Dario ha depositato in un fondo di investimento, 6 anni fa e con un unico versamento, la somma di € 4000 e poi, dall'anno seguente per altri 6 anni, cioè fino ad oggi, ha versato € 600 alla fine di ogni anno. Il tasso di interesse del fondo è del 2% annuo netto. Se Dario deve estinguere un debito di € 9000, la somma accumulata fino all'ultimo versamento fatto è sufficiente a coprire tale debito?

Il capitale di cui potrà disporre Dario è dato dal montante di € 4000 capitalizzato per 6 anni, cui si deve aggiungere il montante di una rendita immediata temporanea posticipata di € 600 per 6 rate (***figura 10***); allora

Figura 10



$$M = 4000(1+0{,}02)^6 + 600 \cdot \frac{(1+0{,}02)^6 - 1}{0{,}02} \qquad \text{cioè} \qquad M = 8\,289{,}52\,(€)$$

La somma a disposizione non è dunque sufficiente per pagare il debito.

Esempi sulla ricerca dell'importo della rata

3. Il montante di una rendita annuale valutato al tasso annuo del 2,4% è di € 100000. Se le rate sono 10, costanti e posticipate, qual è l'importo della rata?

Sappiamo che: $M = 100000$ $\quad i = 0{,}024$ tasso annuo, conforme al periodo della rata $\quad n = 10$
Vogliamo trovare R.
Applichiamo la formula del montante per le rendite posticipate $M = R \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$, sostituendo i dati a nostra disposizione e risolvendo l'equazione ottenuta:

$$100000 = R \cdot \frac{(1+0{,}024)^{10} - 1}{0{,}024} \quad \rightarrow \quad 100000 = R \cdot 11{,}152 \quad \rightarrow \quad R = 8967(€)$$

4. Calcoliamo quale rata trimestrale è necessario versare per 6 anni consecutivi per avere, un periodo dopo l'ultimo versamento, un montante di € 6 630,49 se la capitalizzazione è al tasso annuo del 3,2%.

Poiché la valutazione della rendita è stata fatta un periodo dopo l'ultimo versamento, possiamo usare la formula per la rendita anticipata sapendo che:

$M = 6630{,}49 \qquad n = 24$ (4 rate ogni anno per 6 anni)

$i = 0{,}032$ tasso annuo, non conforme al periodo della rata

Trasformiamo prima di tutto il tasso annuo in tasso trimestrale: $i_4 = \sqrt[4]{1+0{,}032} - 1 = 0{,}0079$

Applichiamo la formula $M = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|i}$ e risolviamo l'equazione ottenuta:

$$6630{,}49 = R \cdot \frac{(1+0{,}0079)^{24} - 1}{0{,}0079} \cdot (1+0{,}0079) \quad \rightarrow \quad 6630{,}49 = R \cdot 26{,}52 \quad \rightarrow \quad R = 250(€)$$

Esempi sulla ricerca del numero delle rate

5. Antonio riesce a risparmiare € 3000 ogni anno e decide di depositare questa somma in un fondo di investimento che rende il 5% annuo. Quante rate deve versare per avere un montante di almeno € 40 000?

Poiché i risparmi si valutano e quindi si versano alla fine dell'anno, si tratta di una rendita posticipata in cui:

$R = 3000 \qquad M = 40000 \qquad i = 0{,}05$ tasso annuo, conforme al periodo della rata

Vogliamo calcolare n.

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

La formula da applicare è $M = R \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ e quindi l'equazione da risolvere è:

$$40000 = 3000 \cdot \frac{(1+0{,}05)^n - 1}{0{,}05} \quad \rightarrow \quad 1{,}05^n - 1 = \frac{40000 \cdot 0{,}05}{3000} \quad \rightarrow \quad 1{,}05^n = 1{,}6666667$$

Si tratta di un'equazione esponenziale che risolviamo ricorrendo ai logaritmi decimali:

$$\log 1{,}05^n = \log 1{,}6666667 \quad \rightarrow \quad n \log 1{,}05 = \log 1{,}6666667 \quad \rightarrow \quad n = \frac{\log 1{,}6666667}{\log 1{,}05} = 10{,}47$$

Il risultato ottenuto indica che il numero di rate, necessariamente un numero intero, deve essere maggiore di 10; diciamo quindi che si potrà ottenere un montante di almeno € 40000 con 11 rate.

2.2 Il calcolo del montante in un'epoca posteriore alla scadenza

Se la somma che si accumula in una rendita non viene ritirata alla scadenza ma rimane in deposito per un altro tempo t, il suo valore deve essere capitalizzato per il tempo t.
Vediamo qualche esempio.

I esempio

Marco versa € 1 200 all'anno per 4 anni ad un tasso di interesse annuo del 3%. Dopo aver fatto l'ultimo versamento lascia l'intera somma in deposito per altri 3 anni. Quale capitale avrà alla fine?

Per risolvere questo problema dobbiamo:

- trovare il montante M della rendita alla scadenza
- capitalizzare M per 3 anni.

Poiché non ci è stato detto se la rendita è anticipata o posticipata, distinguiamo due casi.

Caso di rendita posticipata

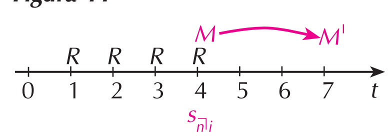
In questo caso Marco fa i versamenti alla fine di ogni anno. Il montante M della rendita al tempo 4 è quindi (***figura 11***)

$$M = 1\,200\ s_{\overline{4}|0{,}03}$$

Poiché l'ultima rata è stata versata al tempo 4, il valore ottenuto deve poi essere capitalizzato per 3 anni e perciò, alla fine, si ha un montante finale M' pari a

$$M' = \left(1\,200 \cdot s_{\overline{4}|0{,}03}\right) \cdot (1+0{,}03)^3 \qquad \text{da cui} \qquad M' = 5\,485{,}87(€)$$

Figura 11

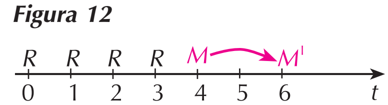


Caso di rendita anticipata

In questo caso Marco effettua i versamenti all'inizio di ogni anno (***figura 12***); il montante M alla scadenza (cioè al tempo 4) è quindi:

$$M = 1200 \cdot \ddot{s}_{\overline{4}|0{,}03} = 1200 \cdot \frac{1{,}03^4 - 1}{0{,}03} \cdot 1{,}03 = 5170{,}96(€)$$

Figura 12



Il ritiro del capitale viene fatto tre anni dopo il versamento dell'ultima rata, versamento che è avvenuto al tempo 3; dobbiamo quindi capitalizzare M

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

fino al tempo 6, cioè per due anni. Otteniamo così che il capitale che Marco avrà alla fine è:

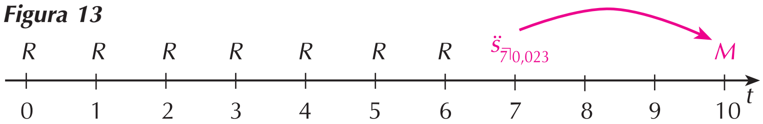
$$M' = 5170{,}96 \cdot (1 + 0{,}03)^2 = 5\,485{,}87\,(€)$$

II esempio

Abbiamo versato € 500 all'inizio di ogni anno per 7 anni in un fondo di investimento garantito, al tasso annuo del 2,3%. Oggi, un periodo dopo l'ultimo versamento, ritiriamo il capitale accumulato e lo reinvestiamo al tasso annuo del 3,2%. Che somma avremo a disposizione fra 3 anni?
Con riferimento alla ***figura 13***, dobbiamo calcolare il montante di una rendita anticipata di € 500 per 7 anni al tasso annuo del 2,3% e poi capitalizzare il valore ottenuto per altri 3 anni al tasso annuo del 3,2%; in definitiva, fra 3 anni avremo a disposizione una somma pari a

$$M = \left[500 \cdot \ddot{s}_{\overline{7}|0{,}023}\right] \cdot (1 + 0{,}032)^3 = 4\,217{,}54\,(€)$$

Figura 13



VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Il montante di una rendita posticipata, formata da 7 rate annue di importo € 750, capitalizzate al tasso del 4% annuo è uguale a euro:

a. 6160,67 **b.** 5923,72 **c.** 5824,32 **d.** 6215,36

2. Il montante di una rendita anticipata mensile di rata pari a € 200, al tasso dello 0,3% mensile di durata 2 anni è uguale a euro:

a. 4980,16 **b.** 4814,40 **c.** 4969,30 **d.** 4984,21

3. Se il montante di una rendita anticipata costituita da 8 rate annue, valutate al tasso del 5% annuo, è € 9324,70, l'importo della rata, arrotondata all'euro più vicino è uguale a:

a. 930 **b.** 976 **c.** 864 **d.** 942

3. IL VALORE ATTUALE DI UNA RENDITA IMMEDIATA

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 32

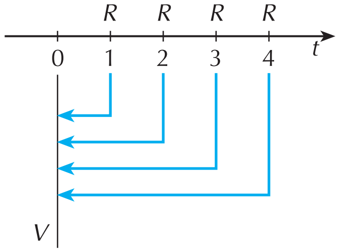
3.1 Il caso delle rendite posticipate

Mara ha diritto a riscuotere 4 rate annue posticipate di € 2 500 ciascuna; avendo necessità di acquistare un'auto, cede tale diritto a una banca che valuta la rendita al 2,5% annuo. Quale somma riceve oggi Mara in sostituzione della rendita?
Rappresentiamo la situazione sull'asse dei tempi (***figura 14***); il valore attuale della rendita si ottiene attualizzando ogni rata per il periodo di competenza: la prima rata per un anno, la seconda per due, la terza per tre, la quarta per quattro:

$$V = 2500(1+0{,}025)^{-1} + 2500(1+0{,}025)^{-2} + 2500(1+0{,}025)^{-3} + 2500(1+0{,}025)^{-4}$$

cioè $V = 9404{,}94\,(€)$.

Figura 14



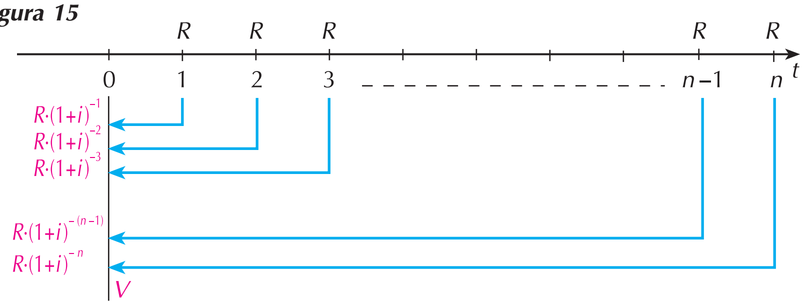
Generalizziamo il problema e consideriamo una rendita posticipata formata da n rate di importo R; sia poi i il tasso di interesse che, come al solito, deve essere conforme al periodo della rendita.
Il valore V della rendita al tempo 0 è la somma dei valori attuali prodotti dalle singole rate (***figura 15***); l'ultima rata deve quindi essere attualizzata per n anni, la penultima per $n-1$ anni, e così via fino alla prima rata, che deve essere attualizzata per un solo anno.

Il valore attuale di una somma S disponibile al tempo t si calcola con la formula

$$V = S(1+i)^{-t}$$

Applicazione informatica *on line*

Figura 15



Otteniamo quindi che:

$$V = R(1+i)^{-n} + R(1+i)^{1-n} + R(1+i)^{2-n} + ... + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-1}$$

Raccogliamo l'importo R della rata e il fattore $(1+i)^{-1}$:

$$V = R \cdot (1+i)^{-1} \cdot \left[(1+i)^{1-n} + (1+i)^{2-n} + (1+i)^{3-n} + ... + (1+i)^{-1} + 1\right]$$

Gli addendi all'interno della parentesi sono i termini di una progressione geometrica il cui primo termine vale 1 e la ragione è $(1+i)^{-1}$.

La somma di questi termini vale $1 \cdot \dfrac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1}$ quindi il valore attuale è dato dalla formula:

$$V = R \cdot (1+i)^{-1} \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1}$$

Sviluppiamo il calcolo dell'espressione in cui compare il tasso i in modo da ottenere una forma più semplice:

$$(1+i)^{-1} \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} = (1+i)^{-1} \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{\dfrac{1}{1+i} - 1} = (1+i)^{-1} \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{-i} \cdot (1+i) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

In definitiva, il valore attuale della rendita è dato dalla formula

$$\boxed{V = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}}$$

L'espressione $\dfrac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ si indica con il simbolo $a_{\overline{n}|i}$ che si legge *a posticipato, figurato n, al tasso i*

Essa rappresenta il **valore attuale di una rendita unitaria immediata posticipata per *n* periodi al tasso periodale *i*.**

In definitiva:

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

il valore attuale di una rendita immediata posticipata, formata da n rate di importo costante R, al tasso periodale i è uguale a:

$$M = R \cdot a_{\overline{n}|i} \qquad \text{dove} \qquad a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

La formula

Anche in questo caso per $i = 0$ la formula non è applicabile; tuttavia, se il tasso di interesse è zero, il valore attuale equivale al valore delle n rate di importo R, cioè $V = nR$.
Per esempio, il valore attuale di una rendita posticipata di rata $R = 600$ euro, formata da 8 rate annue al tasso annuo del 3% è uguale a:

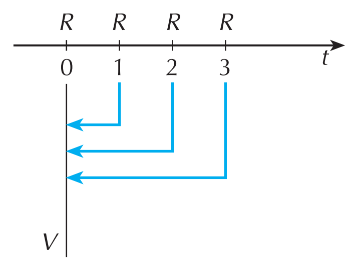
$$V = 600 \cdot \frac{1-(1+0{,}03)^{-8}}{0{,}03} = 4211{,}82(€)$$

3.2 Il caso delle rendite anticipate

Riprendendo l'esempio precedente, supponiamo ora che la rendita di Mara abbia le rate anticipate; in questo caso la prima rata non deve essere attualizzata e le altre tre devono essere attualizzate di uno, due, tre periodi (***figura 16***):

$$V = 2500 + 2500(1+0{,}025)^{-1} + 2500(1+0{,}025)^{-2} + 2500(1+0{,}025)^{-3} = 9640{,}06$$

Figura 16



Ripetendo il ragionamento nel caso generale otteniamo che:

$$V = R + R\cdot(1+i)^{-1} + R\cdot(1+i)^{-2} + \ldots\ldots + R\cdot(1+i)^{1-n}$$

cioè $$V = R\left[1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots\ldots + (1+i)^{1-n}\right]$$

Di nuovo abbiamo una progressione geometrica con primo termine uguale a 1 e ragione $(1+i)^{-1}$; con calcoli analoghi ai precedenti si trova che la somma dei suoi termini è $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$.

L'espressione del valore attuale è quindi:

$$\boxed{V = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)}$$

L'espressione $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$ si indica con il simbolo $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ che si legge *a anticipato, figurato n, al tasso i*.

Essa rappresenta il **valore attuale di una rendita unitaria immediata anticipata per *n* periodi al tasso periodale *i***.

In definitiva:

La formula

il valore attuale di una rendita immediata anticipata, formata da n rate di importo costante R, al tasso periodale i è uguale a:

$$V = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i} \qquad \text{dove} \qquad \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$$

La formula non è applicabile per $i = 0$ ma in questo caso il valore attuale equivale al valore delle n rate di importo R, cioè ancora $V = nR$.

Per esempio, il valore attuale di una rendita anticipata di rata $R = 1000$ euro, formata da 10 rate trimestrali al tasso trimestrale dello 0,4% è uguale a:

$$V = 1000 \cdot \frac{1-(1+0{,}004)^{-10}}{0{,}004} \cdot (1+0{,}004) = 9822{,}61(€)$$

Riassumiamo in una tabella le formule che abbiamo imparato:

Tipo di rendita	Valore attuale della rendita	
Posticipata	$V = R \cdot a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
Anticipata	$V = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}\rceil i}$	$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$

I simboli $a_{\overline{n}\rceil i}$ e $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil i}$ sono legati dalla relazione

$$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil i} = a_{\overline{n}\rceil i} \cdot (1+i)$$

COME RISOLVERE I PROBLEMI

Anche in un problema di attualizzazione di una rendita, le variabili in gioco sono 4: V, R, n e i; conoscendo tre di esse, è sempre possibile trovare la quarta risolvendo l'equazione che si ottiene sostituendo i valori delle variabili note nelle formule.
Come nel caso della capitalizzazione, negli esempi che seguono affrontiamo problemi relativi al calcolo delle diverse variabili di una rendita.

ESEMPI

Esempio sul calcolo del valore attuale

1. Calcoliamo il valore attuale di:

a. una rendita posticipata formata da 19 rate annue di € 380 al tasso annuo del 2,25%

b. una rendita trimestrale anticipata, con rata di € 4800, della durata di 6 anni, al tasso annuo del 3,5%

c. una rendita mensile anticipata, con rata di € 400, della durata di 3 anni, al tasso dell'1,5% annuo convertibile mensilmente.

a. Sappiamo che: $R = 380$ $n = 19$ $i = 0{,}0225$ tasso annuo, conforme al periodo della rendita.

Applichiamo la formula $V = R \cdot \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$: $V = 380 \cdot \dfrac{1-(1+0{,}0225)^{-19}}{0{,}0225} = 5822{,}70(€)$

b. Sappiamo che: $R = 4800$ $n = 4 \cdot 6 = 24$ (4 rate all'anno per 6 anni)
$i = 0{,}035$ tasso annuo, non conforme al periodo della rata.

Trasformiamo prima di tutto il tasso da annuo a trimestrale applicando la formula dei tassi equivalenti:

$$i_4 = \sqrt[4]{1{,}035} - 1 \quad \rightarrow \quad i_4 = 0{,}00863745$$

Applichiamo adesso la formula $V = R \cdot \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$:

$$V = 4800 \cdot \frac{1-(1+0{,}00863745)^{-24}}{0{,}00863745} \cdot (1+0{,}00863745) = 104536{,}58(€)$$

c. Sappiamo che: $R = 400$ $n = 12 \cdot 3 = 36$ (12 rate all'anno per 3 anni)
$j_{12} = 0{,}015$ tasso annuo nominale convertibile, non conforme al periodo della rata.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Trasformiamo il tasso j_{12} in tasso mensile: $i_{12} = \frac{0{,}015}{12} = 0{,}00125$

Applichiamo la formula per le rendite con rata anticipata:

$$V = 400 \cdot \frac{1-(1+0{,}00125)^{-36}}{0{,}00125}(1+0{,}00125) = 14089{,}80(€)$$

Esempio sul calcolo della rata

2. Il valore attuale di una rendita formata da 6 rate annue, al tasso annuo del 3%, all'atto del pagamento della prima rata, è di € 16 739,12. Troviamo l'importo delle rate costanti.

I dati a nostra disposizione sono: $V = 16739{,}12$ $\quad n = 6$

$i = 0{,}03$ tasso annuo, conforme al periodo della rata

Vogliamo trovare R.
Il valore attuale è riferito all'atto del pagamento della prima rata; si tratta quindi di una rendita anticipata e possiamo applicare la formula $V = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$ dalla quale otteniamo un'equazione di incognita R:

$$16739{,}12 = R \cdot \frac{1-(1+0{,}03)^{-6}}{0{,}03} \cdot (1+0{,}03) \quad \rightarrow \quad R = 3000 \ (€)$$

Esempio sul calcolo del numero di rate

3. La cessione, al tasso annuo del 3%, di una rendita formata da rate annue posticipate di € 1500 viene valutata € 10 529,54. Da quante rate è formata?

Sappiamo che: $V = 10529{,}54$ $\quad R = 1500$

$i = 0{,}03$ tasso annuo, conforme al periodo della rata

Vogliamo trovare n.
Applichiamo la formula del valore attuale per le rendite posticipate e risolviamo l'equazione in n che si ottiene:

$$10529{,}54 = 1500 \cdot \frac{1-(1+0{,}03)^{-n}}{0{,}03} \quad \rightarrow \quad (1+0{,}03)^{-n} = 1 - \frac{10529{,}54 \cdot 0{,}03}{1500} \quad \rightarrow \quad 1{,}03^{-n} = 0{,}7894092$$

Si tratta di un'equazione esponenziale; ricorriamo ai logaritmi decimali:

$$\log 1{,}03^{-n} = \log 0{,}7894092 \quad \rightarrow -n \log 1{,}03 = \log 0{,}7894092 \quad \rightarrow \quad n = \frac{-\log 0{,}7894092}{\log 1{,}03} = 8$$

La rendita è formata da 8 rate.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Carlo eredita dallo zio una rendita di 10 rate annue anticipate di € 3 000 ciascuna ad un tasso annuo del 3%; suo fratello Luca eredita dallo stesso zio una rendita posticipata di 8 rate annue di € 4000 ciascuna allo stesso tasso annuo.

a. La rendita di Carlo vale, in euro: ① 25 590,61 ② 24 845,25 ③ 26358,33

b. La rendita di Luca vale, in euro: ① 28 078,77 ② 27 260,94 ③ 28 921,13

2. Una rendita anticipata con rata costante di € 5 000 annua viene valutata € 35 010,27 al tasso annuo del 4%. Il numero di rate è:

a. 9 **b.** 6 **c.** 8 **d.** 7

4. LE RENDITE DIFFERITE

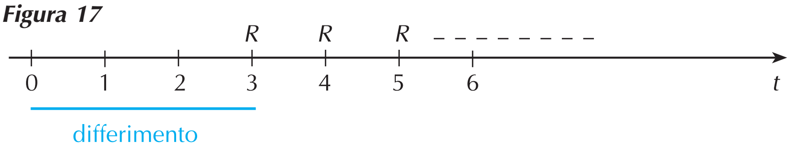
Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 36

Ricordiamo che:

una rendita si dice **differita** quando la prima rata viene pagata o riscossa dopo un certo numero p di periodi.

Il periodo che intercorre tra la stipula del contratto e il pagamento della prima rata viene detto **differimento** (***figura 17***).

Figura 17

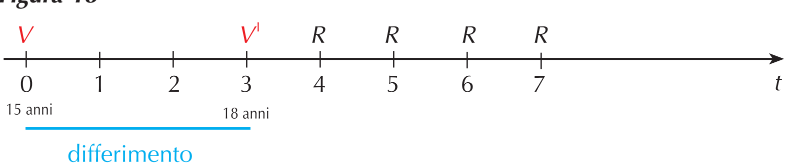


Il differimento di una rendita non ha alcuna influenza sul calcolo del montante, in quanto questo viene calcolato al termine della rendita e la capitalizzazione inizia al momento del versamento della prima rata.
Ha invece delle conseguenze sul calcolo del valore attuale.

Il caso della rendita posticipata

Cristina, che ha oggi 15 anni, avrà diritto alla riscossione di una rendita posticipata formata da 4 rate annue del valore di € 1 200 ciascuna a partire dal suo diciottesimo compleanno. Se la rendita è calcolata ad un interesse annuo del 4%, ci chiediamo quale sia il suo valore oggi.
Rappresentiamo la situazione sull'asse dei tempi, dove abbiamo posto l'età attuale di Cristina al tempo zero (***figura 18***). Per calcolare il valore V della rendita oggi dobbiamo:

Figura 18



- calcolare il valore attuale V' della rendita al tempo 3, epoca in cui ha inizio il diritto di riscossione

$$V' = 1\,200 \cdot a_{\overline{n}|i} = 1\,200 \cdot \frac{1-(1+0{,}04)^{-4}}{0{,}04}$$

- attualizzare V' per tre anni:

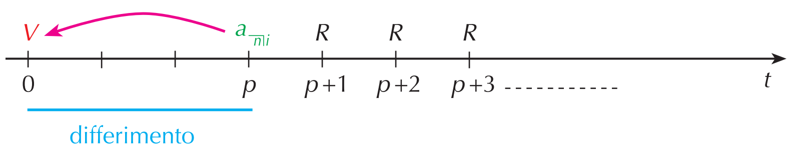
$$V = V' \cdot (1+0{,}04)^{-3} = \underbrace{1\,200 \cdot \frac{1-(1+0{,}04)^{-4}}{0{,}04}}_{V'} \cdot (1+0{,}04)^{-3}$$

 © ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Svolgendo i calcoli troviamo che il valore attuale della rendita alla data odierna è di € 3 872,36.

Generalizziamo come al solito il problema.
Consideriamo una rendita posticipata, con periodo di differimento p, formata da n rate di importo R al tasso periodale i conforme al periodo della rendita e ripetiamo gli stessi calcoli fatti nell'esempio (***figura 19***):

Figura 19



- valore attuale al tempo p, un periodo prima del pagamento della prima rata: $V' = R \cdot a_{\overline{n}|i}$
- attualizzazione del capitale per il periodo di differimento p: $V = V' \cdot (1+i)^{-p}$

In definitiva: $\boxed{V = R \cdot a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-p}}$

L'espressione $a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-p}$ si indica con il simbolo ${}_{p/}a_{\overline{n}|i}$ che si legge:

a posticipato, figurato n, al tasso i, differito p.

Essa rappresenta il **valore attuale di una rendita unitaria posticipata differita di un tempo *p***.
In definitiva:

LA FORMULA

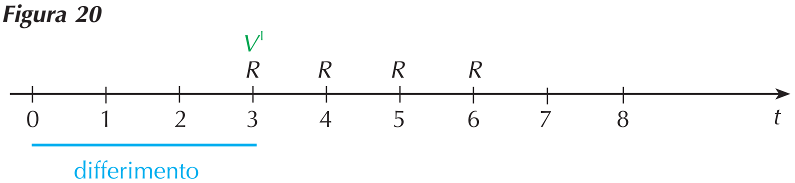
il **valore attuale** di una rendita differita posticipata, formata da n rate di importo costante R, al tasso periodale i è uguale a:

$$V = R \cdot {}_{p/}a_{\overline{n}|i} \qquad \text{dove} \qquad {}_{p/}a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-p}$$

Il caso della rendita anticipata

Supponiamo ora che la rendita di Cristina dell'esempio precedente sia anticipata, cioè che la prima rata le venga corrisposta al compimento del suo diciottesimo compleanno (***figura 20***); il differimento è sempre di 3 anni ma questa volta il valore da attualizzare è il valore attuale di una rendita anticipata, quindi:

Figura 20



- il valore attuale V' della rendita al tempo 3 è uguale a:

$$V' = 1200 \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1\,200 \cdot \frac{1-(1+0{,}04)^{-4}}{0{,}04} \cdot (1+0{,}04)$$

- il valore attuale V della rendita si ottiene capitalizzando V' per tre anni:

$$V = V' \cdot (1+0{,}04)^{-3} = \underbrace{1200 \cdot \frac{1-(1+0{,}04)^{-4}}{0{,}04} \cdot (1+0{,}04)}_{V'} \cdot (1+0{,}04)^{-3}$$

Svolgendo i calcoli troviamo che il valore attuale della rendita alla data odierna è di € 4027,25.

Generalizziamo la procedura per una rendita anticipata di n rate di importo R, al tasso periodale i conforme al periodo della rendita, differita di p periodi, e ripetiamo gli stessi calcoli fatti nell'esempio:

- valore attuale al tempo p, cioè all'atto del pagamento della prima rata: $V' = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}$
- attualizzazione del capitale per il periodo di differimento p: $V = V' \cdot (1+i)^{-p}$

In definitiva: $\boxed{V = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-p}}$

L'espressione $\ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-p}$ si indica con il simbolo ${}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ che si legge:

a anticipato, figurato n, al tasso i, differito p.

Essa rappresenta il **valore attuale di una rendita unitaria anticipata differita di un tempo *p***. In definitiva:

LA FORMULA

il valore attuale di una rendita differita anticipata, formata da n rate di importo costante R, al tasso periodale i è uguale a:

$$V = R \cdot {}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} \qquad \text{dove} \qquad {}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-p}$$

ESEMPI

1. Calcoliamo il valore attuale di una rendita:

a. posticipata, formata da 6 rate annue di € 2 000, con differimento 2 anni, valutata al tasso annuo del 4%

b. anticipata, formata da 4 rate semestrali di € 1 000 con differimento 3 anni e valutata al tasso annuo del 2,5%

c. formata da 5 rate annue di € 600, valutata al tasso annuo del 2% e la cui prima rata è riscuotibile fra 4 anni.

a. Sappiamo che: $R = 2000$ posticipata $\quad n = 6 \quad p = 2$

$i = 0{,}04$ tasso annuo, conforme al periodo della rata e del differimento

Vogliamo calcolare V.

La rendita è posticipata, applichiamo quindi la formula $V = R \cdot {}_{p/}a_{\overline{n}|i}$:

$$V = 2000 \cdot \frac{1-(1+0{,}04)^{-6}}{0{,}04} \cdot \underbrace{(1+0{,}04)^{-2}}_{\text{differimento}} \quad \rightarrow \quad V = 9693{,}30(€)$$

b. Sappiamo che: $R = 1000$ anticipata $\quad n = 4$ semestrali $\quad p = 3$ anni $= 6$ semestri

$i = 0{,}025$ tasso annuo, non conforme al periodo della rata

Vogliamo calcolare V.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Troviamo innanzi tutto il tasso semestrale: $i_2 = \sqrt{1+0{,}025} - 1 = 0{,}01242$

Il periodo di differimento è di 6 semestri se usiamo il tasso semestrale, è di 3 anni se usiamo il tasso annuo.

La rendita è anticipata, applichiamo quindi la formula $V = R \cdot {}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n|}i}$:

- differimento con tasso semestrale:

$$V = 1\,000 \cdot \frac{1-(1+0{,}01242)^{-4}}{0{,}01242} \cdot (1+0{,}01242) \cdot \underbrace{(1+0{,}01242)^{-6}}_{\text{differimento}} \quad \rightarrow \quad V = 3\,646{,}67(€)$$

- differimento con tasso annuo:

$$V = 1\,000 \cdot \frac{1-(1+0{,}01242)^{-4}}{0{,}01242} \cdot (1+0{,}01242) \cdot \underbrace{(1+0{,}025)^{-3}}_{\text{differimento}} \quad \rightarrow \quad V = 3\,646{,}61(€)$$

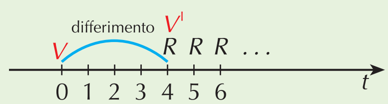
I due valori, tenendo conto degli errori di arrotondamento, ovviamente coincidono.

c. Sappiamo che: $R = 600$ $\quad n = 5$

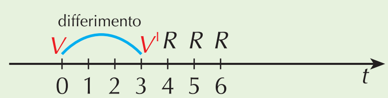
$i = 0{,}02$ tasso annuo, conforme al periodo della rata e del differimento

Per la valutazione del periodo di differimento possiamo ragionare in due modi:

- considerare la rendita anticipata con un periodo di differimento di 4 anni: $p = 4$



- considerare la rendita posticipata con un periodo di differimento di 3 anni: $p = 3$.



Nel primo caso otteniamo che

$$V = 600 \cdot \frac{1-(1+0{,}02)^{-5}}{0{,}02} \cdot (1+0{,}02) \cdot \underbrace{(1+0{,}02)^{-4}}_{\text{differimento}} = 600 \cdot \frac{1-(1+0{,}02)^{-5}}{0{,}02} \cdot (1+0{,}02)^{-3}$$

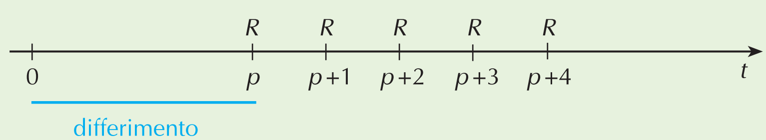
Nel secondo caso otteniamo che $V = 600 \cdot \dfrac{1-(1+0{,}02)^{-5}}{0{,}02} \cdot \underbrace{(1+0{,}02)^{-3}}_{\text{differimento}}$

Le due espressioni sono evidentemente le stesse ed il valore attuale della rendita è di € 2 664,96.

2. Il padre di Giovanni assegna al figlio una rendita di € 50 000 all'anno per 5 anni al tasso annuo del 6% a partire dal momento della sua laurea. Oggi però Giovanni vuole riscuotere la sua rendita e si accorda con una banca per un valore attuale di € 198 000. Fra quanto tempo dovrà laurearsi Giovanni per soddisfare le richieste della banca?

Rappresentiamo il problema sull'asse dei tempi (***figura 21***); dobbiamo in sostanza calcolare il differimento di una rendita di 5 rate da € 50 000 ciascuna al tasso del 6% in modo che il suo valore attuale sia oggi di € 198 000.

Figura 21



Indicando con p il differimento e considerando le rate come anticipate, il modello del problema è l'equazione

$$50000 \cdot {}_{p/}\ddot{a}_{\overline{5}|0,06} = 198000 \quad \text{cioè} \quad 50000 \cdot \frac{1-(1+0,06)^{-5}}{0,06} \cdot (1+0,06) \cdot (1+0,06)^{-p} = 198000$$

Svolgendo i calcoli e approssimando i risultati delle potenze coinvolte otteniamo

$1,06^p = 1,127552$ da cui, ricorrendo ai logaritmi, ricaviamo che $p = 2,06$

Giovanni deve quindi laurearsi entro 2 anni e 21 giorni.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Il valore attuale di una rendita posticipata formata da 8 rate di € 3000 ciascuna, con differimento di 6 anni e tasso annuo del 2% è uguale a euro:

a. 20 075,14 **b.** 19 710,95 **c.** 19 904,74 **d.** 19 514,45

2. Il valore attuale di una rendita anticipata formata da 4 rate di € 1000 ciascuna, con differimento 3 anni e tasso annuo del 4% è uguale a euro:

a. 3 526,24 **b.** 3 356,04 **c.** 3 422,16 **d.** 3 248,65

5. LE RENDITE PERPETUE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 38

Come abbiamo già detto all'inizio dell'unità didattica, una rendita si dice perpetua quando ha un numero illimitato di rate oppure quando non si conosce a priori quale sia il loro numero. Sono ad esempio rendite perpetue

- gli interessi prodotti da Buoni fruttiferi irredimibili (non è cioè precisato quando lo Stato rimborserà il capitale)
- l'usufrutto su terreni ceduti in uso perpetuo
- gli interessi prodotti da un lascito.

In tutti questi casi non ha senso parlare di montante della rendita in quanto, non potendo stabilire un'ultima rata, non sapremmo in quale periodo calcolarlo; **in relazione a rendite perpetue avremo quindi solo problemi di calcolo di valore attuale**.

Per determinare il valore attuale di una rendita perpetua ci serviremo delle formule già viste nei casi di rendite temporanee, in cui dovremo tenere però presente che n rappresenta un valore che può crescere indefinitamente; per esprimere questo fatto diremo che ***n* tende all'infinito**. I simboli finanziari che useremo sono quindi gli stessi usati per le rendite temporanee in cui, al posto di n, scriviamo il simbolo ∞.

Esaminiamo dunque i casi che si possono presentare.

Rendita perpetua immediata posticipata

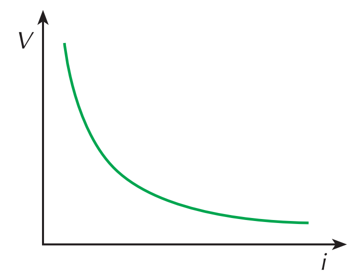
Consideriamo la relazione $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ che rappresenta il valore attuale di una rendita temporanea immediata posticipata. Osserviamo ora che,

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

per n che tende all'infinito cioè che diventa sempre più grande, il termine $(1+i)^{-n}$ diventa sempre più piccolo; infatti, un numero positivo minore di 1 quale è $(1+i)^{-1}$ tende ad assumere valori sempre più piccoli quando è elevato ad una potenza che assume valori sempre più grandi. Prova, ad esempio, a calcolare $(1{,}05)^{-n}$ per $n = 10, 100, 1000$: ad un certo punto la calcolatrice ti restituisce il valore 0 perché il risultato è talmente piccolo da non poter essere evidenziato sul display.
Se nella formula ricordata trascuriamo tale valore commettiamo quindi, quando n tende all'infinito, un errore talmente piccolo che praticamente non influisce sul risultato finale. Possiamo allora dire che

$$\boxed{a_{\overline{\infty|}\,i} = \frac{1}{i}} \qquad \text{e per una rendita di rata } R \qquad \boxed{V = \frac{R}{i}}$$

Figura 22



Il grafico della relazione ottenuta è un ramo di iperbole equilatera ed appartiene al primo quadrante (ricorda che R ed i sono numeri positivi) (***figura 22***).
Ad esempio, il valore attuale di una rendita perpetua posticipata di rata € 100 al tasso annuo del 5% è

$$V = \frac{100}{0{,}05} = 2000\,(€)$$

Rendita perpetua immediata anticipata

Se la rendita perpetua è anticipata, con un procedimento analogo al precedente e tenendo presente la relazione $\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} = a_{\overline{n|}\,i}(1+i)$, si ottiene che

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{\infty|}\,i} = \frac{1}{i}(1+i)} \qquad \text{e per una rendita di rata } R \qquad \boxed{V = R\frac{1}{i}(1+i)}$$

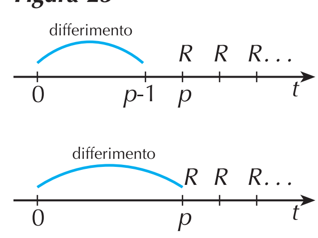
Rendita perpetua differita

Infine se la rendita perpetua è differita e la prima rata viene riscossa o pagata fra p anni abbiamo le due relazioni (***figura 23***):

- ${}_{p-1/}a_{\overline{\infty|}\,i} = \frac{1}{i}(1+i)^{-(p-1)}$ se la rendita è posticipata
- ${}_{p/}\ddot{a}_{\overline{\infty|}\,i} = \frac{1}{i}(1+i)^{-p}$ se la rendita è anticipata

In ogni caso vale comunque la relazione $\boxed{{}_{p-1/}a_{\overline{\infty|}\,i} = {}_{p/}\ddot{a}_{\overline{\infty|}\,i}}$

Figura 23



ESEMPI

1. Calcoliamo il valore attuale di una rendita perpetua nei seguenti casi:

a. rendita posticipata con rata di € 3800 all'anno, valutata al tasso annuo dell'1,1%

b. rendita di € 250 da riscuotere all'inizio di ogni semestre e valutata al tasso annuo del 3%.

a. Il tasso è conforme al periodo della rata e poiché la rendita è posticipata dobbiamo applicare la formula $V = \frac{R}{i}$: $\quad V = \frac{3\,800}{0{,}011} = 345\,454{,}55(€)$

b. Il tasso non è conforme al periodo della rendita; trasformiamolo in tasso semestrale:

$i_2 = \sqrt{1 + 0{,}03} - 1 = 0{,}01489$

Poiché la rendita è anticipata (la riscossione avviene all'inizio di ogni semestre), dobbiamo applicare la formula $V = \frac{R}{i} \cdot (1 + i)$:

$$V = \frac{250}{0{,}01489} \cdot (1 + 0{,}01489) = 17\,039{,}79(€)$$

2. Dalla cessione di una rendita perpetua posticipata di rata trimestrale € 2400 ricaviamo € 127631,58. Qual è il tasso di valutazione annuo?

Sappiamo che: $\quad R = 2\,400 \quad\quad V = 127\,631{,}58$

Dalla formula $V = \frac{R}{i}$ ricaviamo che $i = \frac{R}{V}$ dove i, dovendo essere conforme al periodo della rata, è un tasso trimestrale:

$$i_4 = \frac{2400}{127\,631{,}58} = 0{,}0188$$

Applicando la formula dei tassi equivalenti troviamo il tasso annuo: $\quad i = (1 + 0{,}0188)^4 - 1 = 0{,}0773$ cioè 7,73%.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Il valore attuale di una rendita annua perpetua posticipata la cui rata è di € 3000, al tasso del 5% annuo è uguale a euro:

a. 62 000 **b.** 75 000 **d.** 60 000 **d.** 90 000

2. Alcuni buoni irredimibili fruttano € 300 all'anno; se li vuoi vendere all'atto della scadenza della prima cedola e la valutazione viene fatta al tasso annuo del 3,5% puoi ricavare:

a. € 8 572,14 **b.** € 8 871,43 **c.** € 8 571,43 **d.** 8 642,72

6. L'INTERPOLAZIONE LINEARE PER RISOLVERE I PROBLEMI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 40

Applicazione informatica *on line*

Affrontando il problema della valutazione del tasso di interesse di una rendita ci siamo accorti che l'equazione di incognita i non si può risolvere per via algebrica essendo spesso di grado molto maggiore di 2 (rivedi a questo proposito l'equazione a pagina 45). In questi casi si può ricorrere a metodi di risoluzione approssimata; vediamo come si può procedere con un esempio.

Un rendita annua è formata da 9 rate ciascuna di € 1 300. Determiniamo il tasso annuo di interesse i sapendo che il montante calcolato all'atto dell'ultimo versamento è di € 14 373,59.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Dalla relazione del montante possiamo scrivere l'equazione

$$14\,373{,}59 = 1\,300\,\frac{(1+i)^9-1}{i}$$

dalla quale ricaviamo che $\dfrac{(1+i)^9-1}{i} = 11{,}056608$

cioè $s_{\overline{9}|i} = 11{,}056608$.

Ci rendiamo conto immediatamente che non è possibile risolvere algebricamente un'equazione di questo tipo. Possiamo allora seguire questo ragionamento.
Diamo ad i un valore compatibile con i dati del problema, per esempio diciamo che $i = 0{,}06$; l'espressione al primo membro dell'equazione diventa così

$$s_{\overline{9}|0,06} = \frac{1{,}06^9 - 1}{0{,}06} = 11{,}491316$$

Poiché $11{,}491316 > 11{,}056608$, il tasso 0,06 usato è troppo alto.
Diamo ad i un valore più basso, per esempio poniamo $i = 0{,}05$ e ripetiamo gli stessi calcoli:

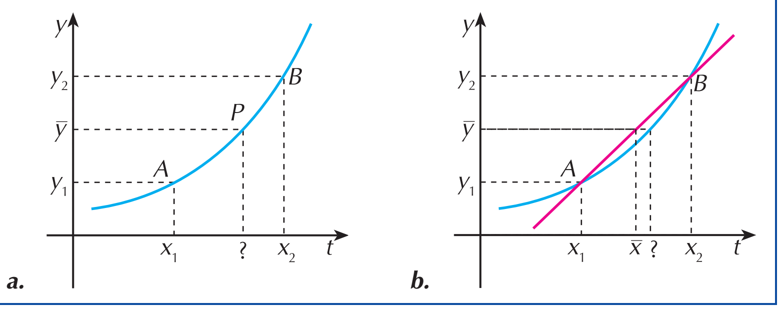
$$s_{\overline{9}|0,05} = \frac{1{,}05^9 - 1}{0{,}05} = 11{,}026564$$

Poiché $11{,}026564 < 11{,}056608$, il tasso 0,05 usato è troppo basso.
Allora il tasso che è la soluzione del problema è compreso tra 0,05 e 0,06. Per trovare un valore approssimato più preciso ricorriamo all'interpolazione lineare.
Si tratta di un procedimento che possiamo descrivere graficamente in questo modo. Consideriamo un fenomeno rappresentato da una legge $f(x)$ che ha un certo grafico; di questa curva sono note le coordinate di due punti A e B e si vuole trovare l'ascissa di un punto P del quale si conosce solo l'ordinata $\overline{y}$ (***figura 24a***).
Poiché non si riesce, con metodi algebrici, a trovare il valore di x che corrisponde a $\overline{y}$, si può sostituire la curva con la retta che passa per i punti A e B e poi trovare il valore di x che corrisponde al punto di ordinata $\overline{y}$ su tale retta (***figura 24b***).

La formula per scrivere l'equazione della retta (non parallela agli assi cartesiani) che passa per due punti è la seguente:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Figura 24



Questa operazione introduce naturalmente un errore che però si può ritenere trascurabile se la curva si discosta poco dalla retta.

Dal punto di vista analitico la procedura è la seguente:

- si scrive l'equazione della retta passante per i punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$
- si sostituisce il valore $\overline{y}$ nell'equazione trovata e si ricava $\overline{x}$.

Applichiamo questa procedura al problema:

- i punti A e B sono quelli che hanno per ascissa rispettivamente i due tassi 0,05 e 0,06 e come ordinata i due valori $s_{\overline{9}|i}$; il valore di $\overline{y}$ è 11,056608. Scriviamo i dati in una tabella:

	i	$s_{\overline{9}\|i}$
punto A	0,05	11,026564
punto B	0,06	11,491316
$\overline{y}$	x	11,056608

- la retta che passa per questi punti ha equazione:

$$\frac{y - 11{,}026564}{11{,}491316 - 11{,}026564} = \frac{x - 0{,}05}{0{,}06 - 0{,}05}$$

- per trovare il valore di x che rappresenta il tasso cercato sostituiamo al posto di y il valore di $\overline{y}$ cioè 11,056608:

$$\frac{11{,}056608 - 11{,}026564}{11{,}491316 - 11{,}026564} = \frac{x - 0{,}05}{0{,}06 - 0{,}05} \quad \rightarrow \quad 0{,}06464 = \frac{x - 0{,}05}{0{,}01}$$

Risolvendo l'equazione troviamo che $x = 0{,}0506$. Il tasso cercato è dunque pari al 5,06%.

LA PROCEDURA DI INTERPOLAZIONE

Mettiamo in evidenza la procedura da seguire per risolvere equazioni di questo tipo:

- si trova un valore dell'incognita che approssima per difetto la soluzione
- si trova un valore dell'incognita che approssima per eccesso la soluzione
- si esegue l'interpolazione lineare fra i valori trovati.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

I concetti e le regole

Le rendite

Una **rendita** è una successione di importi (le rate) da riscuotere o da pagare in epoche stabilite (le scadenze) ad intervalli di tempo determinati (i periodi).
Una classificazione delle rendite può essere fatta secondo diversi parametri ed è riassunta nella seguente tabella:

relativamente al periodo	ANNUA	FRAZIONATA	POLIENNALE
relativamente alla numerosità delle rate	TEMPORANEA	PERPETUA	
relativamente alla decorrenza	IMMEDIATA	DIFFERITA	
relativamente alla scadenza	ANTICIPATA	POSTICIPATA	

Le rendite temporanee

Il **montante** di una rendita si calcola con due formule diverse a seconda che la rata sia anticipata oppure posticipata:

- montante di una rendita posticipata: $M = R \cdot s_{\overline{n}|i}$ dove $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$
- montante di una rendita anticipata: $M = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|i}$ dove $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$

Il **valore attuale** di una rendita si calcola anch'esso con due formule diverse a seconda che la rata sia anticipata oppure posticipata:

- valore attuale di una rendita posticipata: $V = R \cdot a_{\overline{n}|i}$ dove $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$
- valore attuale di una rendita anticipata: $V = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}$ dove $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \dfrac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$

Le rendite differite

In una rendita differita il periodo di differimento p influisce solo sul calcolo del valore attuale:

- in caso di rata posticipata: $V = R \cdot {}_{p/}a_{\overline{n}|i}$ dove ${}_{p/}a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-p}$
- in caso di rata anticipata: $V = R \cdot {}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ dove ${}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-p}$

Le rendite perpetue

Una rendita è perpetua se ha un numero illimitato di rate; di questo tipo di rendite ha senso calcolare il solo valore attuale e si ha che:

- in caso di rata posticipata: $V = \dfrac{R}{i}$
- in caso di rata anticipata: $V = \dfrac{R}{i} \cdot (1+i)$

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

Le rendite finanziarie

CHE COS'È UNA RENDITA

la teoria è a pag. 1

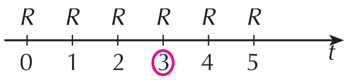
Comprensione

1 Scegli le voci corrette.
La pensione a cui si ha diritto alla fine del periodo lavorativo è una rendita:
a. annua **b.** perpetua **c.** immediata **d.** anticipata

2 Scegli le voci corrette.
Franco paga l'affitto della casa dove abita una volta ogni sei mesi. Si tratta di una rendita:
a. differita **b.** perpetua **c.** frazionata **d.** anticipata

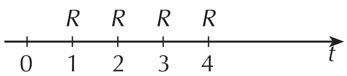
3 Scegli le voci corrette.
Luca ha acquistato una nuova autovettura. Il concessionario gli propone di rateizzare l'importo dovuto con 24 pagamenti mensili, pagabili alla fine di ogni mese, con il primo pagamento fra tre mesi. Si tratta di una rendita:
a. biennale **b.** differita **c.** posticipata **d.** temporanea

4 Con riferimento alla figura, il valore della rendita al tempo 3 si calcola:



a. capitalizzando tutte le rate fino al tempo 3
b. scontando le rate R_4 e R_5 al tempo 3
c. capitalizzando le rate R_0, R_1,R_2 e scontando le rate R_4 e R_5 al tempo 3 e sommando i valori ottenuti
d. capitalizzando le rate R_0, R_1,R_2 e scontando le rate R_4 e R_5 al tempo 3 e sommando a questi valori l'importo della rata R_3.

5 La figura a lato rappresenta una rendita che si può considerare:



a. temporanea immediata con rate posticipate V F
b. temporanea differita di un periodo con rate anticipate V F
c. temporanea differita di un periodo con rate posticipate V F
d. temporanea immediata con rate anticipate. V F

Applicazione

Classifica le seguenti rendite in base alla durata, al periodo, alla data di decorrenza.

6 Una eredità che, a partire dall'anno prossimo, frutterà € 200 al mese per 3 anni.

7 Un lascito che, fra 6 anni, comincerà a fruttare in perpetuo € 1800 all'anno.

8 Un titolo che frutta € 380 ogni 6 mesi e che scade fra 4 anni.

9 Il diritto a riscuotere 10 rate annue costanti di € 300, la prima riscuotibile fra 2 anni.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

10 Un debito composto da 6 rate costanti pagabili a partire dall'anno prossimo per 6 anni.

11 Una assicurazione sulla vita costituita da rate annuali che pagheremo finché saremo in vita.

12 Un canone di locazione semestrale di € 6000 per l'affitto di un magazzino che scade fra 5 anni.

Il montante di una rendita immediata

la teoria è a pag. 4

Ricorda

- Il montante di una rendita, all'atto della sua scadenza, si calcola con le seguenti formule:
  - se la rendita è posticipata: $M = R \cdot s_{\overline{n}|i}$ dove $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$
  - se la rendita è anticipata: $M = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|i}$ dove $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$
- Il montante M', k periodi dopo la scadenza, si ottiene capitalizzando M per k periodi, cioè:
  - se la rendita è posticipata: $M' = M \cdot (1+i)^k$
  - se la rendita è anticipata: $M' = M \cdot (1+i)^{k-1}$

Comprensione

13 Il montante di una rendita immediata posticipata formata da 3 rate annue di € 250 al tasso annuo del 2% è di euro:
a. 780,40 **b.** 750 **c.** 765,10 **d.** 798,32

14 Il montante di una rendita immediata anticipata formata da 4 rate annue di € 200 al tasso annuo del 4% è di euro:
a. 883,26 **b.** 918,60 **c.** 1 000 **d.** 991,50

15 Il montante di una rendita immediata posticipata formata da 3 rate semestrali di € 100 al tasso semestrale del 2% è di euro:
a. 300 **b.** 305,50 **c.** 312,16 **d.** 306,04

16 Il montante di una rendita immediata posticipata formata da 4 rate annue, al tasso annuo del 3%, è di € 836,73. L'importo della rata annua in euro è uguale a:
a. 190 **b.** 200 **c.** 205 **d.** 195

17 Il montante di una rendita immediata anticipata formata da 3 rate annue, al tasso annuo del 5%, è di € 1 986,08. L'importo della rata annua in euro è uguale a:
a. 650 **b.** 605 **c.** 600 **d.** 590

18 Una rendita immediata di rata € 150, al tasso annuo del 3%, produce, all'atto dell'ultimo versamento, un montante di € 796,37. Il numero delle rate è:
a. 7 **b.** 6 **c.** 5 **d.** 4

19 Il montante, calcolato 3 anni dopo l'ultimo versamento di una rendita immediata posticipata, formata da 10 rate annue di € 480, al tasso annuo del 6% è di euro:
a. 7 108,77 **b.** 7 535,30 **c.** 6 706,39 **d.** 7 987,42

20 Il montante calcolato 5 anni dopo l'ultimo versamento di una rendita immediata anticipata, formata da 6 rate annue di € 300, al tasso annuo del 4% è di euro:
a. 2421,01 **b.** 2327,89€ **c.** 2517,85 **d.** 2069,49

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

Applicazione

Risolvi i seguenti esercizi sul calcolo del montante.

21 Calcola il montante di una rendita posticipata:
a. formata da 8 rate annue di € 500 al tasso annuo del 4% [€ 4 607,11]
b. formata da 6 rate annue di € 800 al tasso annuo del 2% [€ 5 046,50]
c. formata da 12 rate annue di € 1 000 al tasso annuo del 3%. [€ 14 192,03]

22 Calcola il montante di una rendita anticipata:
a. formata da 5 rate annue di € 100 al tasso annuo del 5% [€ 580,19]
b. formata da 11 rate annue di € 550 al tasso annuo del 2,5% [€ 7 037,55]
c. formata da 4 rate annue di € 670 al tasso annuo del 1,3%. [€ 2 768,24]

23 Calcola il montante delle seguenti rendite all'atto dell'ultimo versamento:
a. 12 rate annue di € 3 350 ciascuna al tasso del 13,5% annuo [€ 88 597,80]
b. 7 rate annue di € 1 300 ciascuna al tasso del 7% annuo [€ 11 250,23]
c. 18 rate annue di € 750 ciascuna al tasso del 9% annuo. [€ 30 976]

24 Calcola il montante delle seguenti rendite all'atto dell'ultimo versamento:
a. 8 rate annue di € 1750 ciascuna al tasso del 9, 5% annuo [€ 19 652,85]
b. 10 rate annue di € 925 ciascuna al tasso del 10,25% annuo [€ 14 920]
c. 5 rate annue di € 3 350 ciascuna al tasso del 7,25% annuo. [€ 19 361,31]

25 Marco versa € 500 alla fine di ogni trimestre per 3 anni. Quale montante avrà a disposizione all'atto dell'ultimo versamento se il tasso di interesse è dell'1,5% trimestrale? [€ 6 520,61]

26 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcola il montante, all'atto dell'ultimo versamento, di una rendita di rata semestrale di € 2000 della durata di 4 anni al tasso annuo del 4%.

Si tratta di una rendita semestrale posticipata:

- il numero delle rate è 8 (rate semestrali per 4 anni)
- il tasso deve essere convertito in tasso semestrale: $i_2 = \sqrt{1{,}04} - 1 = 0{,}0198$

Applichiamo adesso la formula del montante: $M = 2000 \cdot \dfrac{(1 + 0{,}0198)^8 - 1}{0{,}0198} = 17153{,}81(€)$

27 Calcola il montante di una rendita posticipata di € 750 bimestrali della durata di 16 mesi ai seguenti tassi:
a. 12% bimestrale [€ 9 224,77]
b. 12% annuo convertibile bimestralmente [€ 6 437,23]
c. 12% annuo. [€ 6 416,06]

28 Calcola il montante di una rendita anticipata di € 400 trimestrali della durata di 3 anni ai seguenti tassi:
a. 6% trimestrale [€ 7 152,85]
b. 6% annuo convertibile trimestralmente [€ 5 294,73]
c. 6% annuo. [€ 5 283,38]

29 Una persona vuole costituire una somma che gli consenta, fra 4 anni, di poter cambiare l'auto; per questo versa € 1 350 ogni quadrimestre a partire da oggi, ad un tasso annuo nominale convertibile quadrimestralmente del 6%. Quale somma avrà a disposizione all'epoca stabilita? [€ 18 468,45]

30 Hai versato in banca € 8 000 alla fine di ogni anno e per 6 anni, al tasso annuo del 2,5%. Se decidi di ritirare il capitale all'atto dell'ultimo versamento, di quale somma potrai disporre? [€ 51 101,89]

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Risolvi i seguenti esercizi sul calcolo della rata.

31 **ESERCIZIO GUIDA**

Mediante dei versamenti trimestrali posticipati di importo costante in un fondo remunerato al tasso annuo del 2,5%, si vuole ottenere un montante di € 12000 in 5 anni. Qual è l'importo di ciascun versamento?

I dati a nostra disposizione sono: $M = 12000$ $\quad n = 20$ (4 rate all'anno per 5 anni)
$i = 0{,}025$ tasso annuo da convertire in tasso trimestrale

Calcoliamo il tasso: $i_4 = \sqrt[4]{1 + 0{,}025} - 1 = 0{,}006192$

Scriviamo la formula del montante per una rendita posticipata e calcoliamo la rata: $M = R \cdot s_{\overline{20}|0{,}006192}$

$$\rightarrow \quad 12000 = R \cdot \frac{(1+0{,}006192)^{20} - 1}{0{,}006192} \quad \rightarrow \quad 12000 = R \cdot 21{,}22136 \quad \rightarrow \quad R = 565{,}47(€)$$

32 Fra 5 anni avremo bisogno di una somma € 5200 per restituire un prestito che ci è stato fatto. Decidiamo allora di depositare ogni anno, alla fine dell'anno, una somma che sia in grado di costituire questo capitale. Qual è il valore di questa somma al tasso annuo del 4%? [€ 960,06]

33 Calcola il valore della rata nelle seguenti rendite:

a. 8 rate annue posticipate al tasso annuo del 7,25%, montante di € 5000 [€ 482,97]

b. 5 rate annue anticipate al tasso annuo del 9%, montante di € 8500 [€ 1303,01]

c. 6 rate annue anticipate al tasso annuo del 6,5%, montante di € 6500. [€ 864,03]

34 Una rendita annua del valore di € 11862,88 è costituita da 7 rate posticipate calcolate ad un tasso del 7,5% annuo. Qual è il valore della rata? [€ 1350]

35 Diego e Christian intendono comperare una licenza per avviare un'attività. Quanto dovranno versare annualmente a partire da oggi stesso in un istituto di credito che applica un tasso annuo del 5%, se fra 3 anni vogliono avere accumulato una somma di € 50000? [€ 15105,17]

36 Riccardo sa che fra 6 anni avrà bisogno di € 10000 per festeggiare con un viaggio i suoi 25 anni di matrimonio. Calcola la rata annua anticipata al tasso dell'1,15% quadrimestrale che Riccardo deve versare per poter costituire questo capitale. [€ 1475,57]

37 Elena intende costituire, all'atto dell'ultimo versamento, la somma di € 6000 mediante 16 versamenti semestrali al tasso del 4% annuo nominale convertibile semestralmente. Calcola la rata semestrale di costituzione del capitale. [€ 321,90]

Risolvi i seguenti esercizi sul calcolo del numero delle rate.

38 **ESERCIZIO GUIDA**

Versando alla fine di ogni anno una rata posticipata di € 300 al tasso annuo del 5%, si ottiene un montante di € 3773,36. Da quante rate è formata la rendita?

Sappiamo che: $M = 3773{,}36$ $\quad i = 0{,}05$ $\quad R = 300$ $\quad$ dobbiamo calcolare n

La rata e il tasso sono entrambi annui, possiamo quindi subito applicare la formula del montante dalla quale ricavare il valore di n:

$$M = R \cdot s_{\overline{n}|0{,}05} \quad \rightarrow \quad 3773{,}36 = 300 \cdot \frac{(1+0{,}05)^{n} - 1}{0{,}05}$$

Isoliamo il termine $(1+0{,}05)^n$ e risolviamo l'equazione usando i logaritmi decimali:

$$1{,}05^n = \frac{3773{,}36 \cdot 0{,}05}{300} + 1 \quad \rightarrow \quad 1{,}05^n = 1{,}628893333$$

$$\log 1{,}05^n = \log 1{,}628893333 \quad \rightarrow \quad n = \frac{\log 1{,}628893333}{\log 1{,}05} = 10$$

39 Versando una rata anticipata di € 750, al tasso annuo del 3%, si ottiene un montante di € 5919,25. Calcola il numero delle rate. [7]

40 Versando un certo numero di rate costanti posticipate dell'importo di € 100 ciascuna, si ottiene un montante di € 312,16. Calcola il numero delle rate se è stato applicato un tasso annuo del 4%. [3]

41 Calcola il numero di rate costanti posticipate dell'importo di € 300 ciascuna necessarie ad ottenere, al tasso annuo del 2%, un montante di € 1561,21. [5]

42 Calcola il numero di rate costanti anticipate dell'importo di € 600 necessarie ad ottenere, al tasso annuo del 4,2%, un montante di € 7576,21. [10]

43 Il montante, al tasso del 7% annuo, di una rendita posticipata formata da rate annue di € 4800 ciascuna, è di € 66318,95. Determina il numero delle rate. [10]

Il montante calcolato k anni dopo il versamento dell'ultima rata

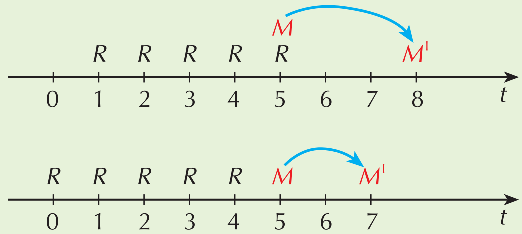
44 **ESERCIZIO GUIDA**

Una rendita è costituita da 5 rate annue di € 3800, valutate al tasso annuo del 5%. Calcoliamo il montante 3 anni dopo il versamento dell'ultima rata.

Il problema può essere risolto considerando:

a. una rendita posticipata con capitalizzazione del montante per altri 3 anni

b. una rendita anticipata con capitalizzazione del montante per altri 2 anni.



a. montante alla scadenza: $M = 3800 \cdot \frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05} = 20997{,}40(€)$

capitalizzazione per 3 anni: $M' = M \cdot (1+0{,}05)^3 = 24307{,}11(€)$

b. montante alla scadenza: $M = 3800 \cdot \frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05} \cdot (1+0{,}05) = 22047{,}27(€)$

capitalizzazione per 2 anni: $M' = M \cdot (1+0{,}05)^2 = 24307{,}11(€)$

45 Una rendita è costituita da 7 rate annue posticipate di € 1300 ciascuna al tasso annuo del 6,5%. Determiniamo il suo valore 4 anni e 3 mesi dopo la sua scadenza. [€ 14479,88]

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

46 Una rendita è costituita da 10 rate annue di € 1800 ciascuna al tasso annuo del 5%; determina il suo valore 6 anni dopo la scadenza dell'ultima rata. [€ 30340,04]

47 Calcola il montante di una rendita di 7 rate da € 1850 ciascuna al tasso del 6,5% annuo, 4 anni dopo la scadenza dell'ultima rata. [€ 20284,11]

48 Una persona ha depositato in una banca, a partire da 10 anni fa e per 6 anni consecutivi, una rata annua di € 730 ad un tasso annuo dell'1,8%. Calcola quale somma può riscuotere oggi se non sono mai stati eseguiti dei prelevamenti. [€ 5009,38]

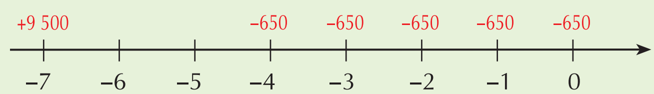
49 Un padre, alla nascita del figlio, decide di versare a nome del bimbo € 5000 presso un banca al tasso annuo del 2%; successivamente, ad ogni suo compleanno e fino al raggiungimento della maggiore età, verserà sullo stesso conto € 800. Quanto potrà riscuotere il ragazzo al raggiungimento della maggiore età? [€ 24271,08]

Risolvi i seguenti problemi riassuntivi sul montante di una rendita.

50 **ESERCIZIO GUIDA**

Sette anni fa Marta ha versato € 9500 presso una banca che capitalizza al 2,5% annuo e, a partire da 4 anni fa fino ad oggi, ha prelevato annualmente € 650 per pagare la rata di un acquisto di mobili. Oggi dopo aver fatto l'ultimo prelievo, quanto le resta in Banca?

Visualizziamo la situazione sull'asse dei tempi, in cui abbiamo indicato con un segno positivo le somme versate e con un segno negativo quelle prelevate.



Tutte le somme indicate devono essere valutate ad oggi, cioè al tempo 0; questo significa che:

- dobbiamo capitalizzare € 9500 per 7 anni: $M_1 = 9500(1+0{,}025)^7 = 11\,292{,}51\,(€)$
- dobbiamo calcolare il montante di una rendita composta da 5 rate annue, posticipate in quanto la valutazione viene fatta all'atto dell'ultimo prelievo:

$$M_2 = 650 \cdot s_{\overline{5}|0{,}025} = 650 \cdot \frac{(1+0{,}025)^5 - 1}{0{,}025} = 3416{,}61\,(€)$$

La somma a disposizione dopo l'ultimo prelevamento è la differenza fra i due montanti e vale € 7875,90.

51 Calcola la rata bimestrale anticipata di una rendita della durata di 5 anni e 6 mesi che, impiegata al tasso del 4,5% effettivo annuo, produce un montante di € 15000. [€ 400,27]

52 Quale rata semestrale deve versare Antonella, per 5 anni, in una Banca che corrisponde il tasso del 2,5% annuo, per trovare un montante di € 5000:

a. all'atto dell'ultimo versamento [€ 472,68]

b. un semestre dopo l'ultimo versamento [€ 466,88]

c. 3 anni dopo l'ultimo versamento. [€ 438,93]

53 Luca ha versato presso una banca € 1300 per 5 anni consecutivi ed alla fine di ogni anno, al tasso annuo del 3%. Ritira il montante un anno dopo la scadenza dell'ultima rata e lo versa per saldare anticipatamente un debito di € 8000 che scade dopo 2 anni.
Dopo aver calcolato il montante ritirato dalla banca, stabilisci a quale tasso di interesse è stato saldato il debito. [€ 7108,93; 6,08%]

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

54 Una persona ha iniziato a versare 15 anni fa presso una banca € 800 all'anno ed ha proseguito i versamenti fino ad oggi; 4 anni fa, inoltre, ha depositato presso la stessa banca € 9800. Per tutta la durata dell'operazione, la banca ha mantenuto costante il tasso d'interesse al 2,5% annuo. Se oggi questa persona preleva € 23000 qual è il saldo del suo conto? [€ 2162,91]

55 Maria ha fatto le seguenti operazioni: ha versato 7 anni fa e fino all'anno scorso la somma di € 950 all'anno presso una banca in capitalizzazione composta al tasso del 2%, inoltre 6 anni fa ha versato un capitale C presso un altro istituto di credito che applica un tasso annuo composto di mezzo punto percentuale in più rispetto alla banca. Se oggi Maria riscuote le somme depositate e incassa complessivamente € 9740, qual era il valore del capitale C? [€ 2186,94]

56 Alessandro ha versato in una banca € 1200 all'inizio di ogni anno per 9 anni al tasso annuo del 4,5%. Quale somma unica avrebbe dovuto depositare all'inizio per avere alla fine lo stesso montante? [€ 9115,06]

57 Il montante di una rendita di 8 rate annue è, all'atto dell'ultimo versamento, di € 153500 e un anno dopo è di € 165780. Determina il tasso di interesse annuo e l'importo della rata. [8%; € 14431,27]

58 Una persona ha effettuato un deposito su un libretto bancario di € 1000 per 6 anni al 2,5% annuo e l'ultimo versamento lo ha fatto 4 anni fa. Dopo l'ultimo versamento, la banca ha aumentato il tasso annuo al 3%. Di quale somma può disporre oggi questa persona? [€ 7189,45]

IL VALORE ATTUALE DI UNA RENDITA IMMEDIATA

la teoria è a pag. 11

RICORDA

- Il valore attuale di una rendita si calcola con le formule:
  - se la rendita è posticipata: $V = R \cdot a_{\overline{n}|i}$ dove $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
  - se la rendita è anticipata: $V = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}$ dove $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$

Comprensione

59 A parità di tasso, importo e numero delle rate, il valore attuale di una rendita anticipata è:
a. maggiore del valore attuale di una rendita posticipata
b. minore del valore attuale di una rendita posticipata
c. uguale al valore attuale di una rendita posticipata.
Qual è la risposta corretta?

60 Il valore attuale di una rendita formata da 6 rate di € 2300, al tasso annuo del 5%, calcolato un periodo prima del versamento della prima rata è:
a. € 12257,79 **b.** € 12568,79 **c.** € 11974,09 **d.** € 11674,09

61 Una rendita immediata anticipata è formata da 10 rate annue di € 3000; il suo valore ad un tasso annuo del 3% si calcola con la formula:
a. $3000 \cdot \dfrac{1-1{,}03^{-10}}{0{,}03}$ **b.** $3000 \cdot \ddot{a}_{\overline{10}|0{,}03}$ **c.** $3000 \cdot a_{\overline{10}|0{,}03}$ **d.** $3000 \cdot \dfrac{1{,}03^{10}-1}{0{,}03}$

62 Per determinare il capitale derivante dalla cessione di una rendita le cui rate sono trimestrali e la cui prima rata è pagabile fra 3 mesi, si deve:
a. calcolare il valore attuale di una rendita all'atto del versamento della prima rata, cioè al tempo 3

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

b. ipotizzare che la rendita sia posticipata, calcolare il valore attuale al tempo 3 e moltiplicare tale risultato per il fattore $(1+i)^{-3}$

c. ipotizzare che la rendita sia posticipata, calcolare il valore attuale al tempo 3 e moltiplicare tale risultato per il fattore $(1+i)^{-2}$

d. ipotizzare che la rendita sia posticipata, calcolare il valore attuale al tempo 2 e moltiplicare tale risultato per il fattore $(1+i)^{-2}$

63 Una rendita è costituita da 5 rate semestrali di € 300 al tasso annuo del 6%. Per poter calcolare il suo valore attuale all'atto del versamento della prima rata si deve:

a. trasformare la rata da semestrale a annua considerandola di importo uguale a € 600

b. trasformare il tasso da annuo a semestrale applicando la formula $1 + 0{,}06 = (1 + i_2)^2$

c. trasformare il tasso da annuo a semestrale applicando la formula $i_2 = \dfrac{0{,}06}{2}$

d. moltiplicare per 5 l'importo della rata.

64 Un appartamento viene affittato per un anno ad un canone mensile di € 2 000. Volendo pagare anticipatamente l'intero ammontare del canone, quanto si deve versare al proprietario se la valutazione viene fatta al 2%?

a. € 22 036,42 **b.** € 21 150,68 **c.** € 21 573,70 **d.** € 21 412,52.

Applicazione

Risolvi i seguenti problemi sul calcolo del valore attuale.

65 Calcola il valore attuale delle seguenti rendite un anno prima della scadenza della prima rata:

a. 13 rate annue da € 400 al tasso del 6% annuo [€ 3 541,07]

b. 8 rate annue da € 1 400 al tasso del 9,25% annuo [€ 7 677,27]

c. 3 rate annue da € 5 000 al tasso del 6,75% annuo. [€ 13 181,75]

66 Calcola il valore attuale delle seguenti rendite un anno prima della scadenza della prima rata:

a. 7 rate annue da € 850 al tasso del 5% annuo [€ 4 918,42

b. 15 rate annue da € 780 al tasso del 4,75% annuo [€ 8 234,7]

c. 10 rate annue da € 4 200 al tasso dell'8,5% annuo. [€ 27 557,66]

67 Calcola il valore attuale delle seguenti rendite all'atto del primo versamento:

a. 5 rate annue da € 1 600 al tasso dell'8,5% annuo [€ 6 840,95]

b. 20 rate annue da € 800 al tasso del 4,5% annuo [€ 10 874,63]

c. 7 rate annue da € 2 500 al tasso del 9,75% annuo. [€ 13 468,39]

68 Per pagare un debito, Paolo dovrà versare alla fine di ogni anno € 5 319,68 per 6 anni consecutivi. A quanto ammonta il suo debito se il tasso è dell'1,8% annuo? [€ 30000]

69 Quale debito potresti contrarre oggi sapendo che hai la possibilità di rimborsare € 1 300 alla fine di ogni anno e per 12 anni, al tasso annuo del 6,75%? [€ 10 464,48]

70 Due fratelli ricevono in eredità dal nonno due rendite rispettivamente di 36 rate annue da € 8 500 ciascuna al tasso del 2% annuo e di 45 rate da € 7 350 ciascuna al tasso del 2,5%. Qual è il valore delle due eredità? Quale fratello è stato meglio trattato? [€ 220 988,26; € 202 153,29]

71 Due anni fa hai contratto un debito che oggi ammonta a € 12 000. Per far fronte agli impegni presi, cedi una rendita formata da 10 rate annue anticipate al tasso annuo del 2,2%. L'importo della rata è di € 1400. È sufficiente per pagare il debito? [si avanzano € 718,83]

72 **ESERCIZIO GUIDA**

Una rendita è formata da 10 rate mensili di importo € 1200; calcola:

a. il valore attuale all'atto del versamento della prima rata al tasso annuo nominale convertibile mensilmente dell'8,4%

b. il valore attuale un periodo prima del versamento della prima rata al tasso annuo dello 6%.

a. La rendita è anticipata con rata mensile; trasformiamo il tasso j_{12} in tasso mensile:

$$i_{12} = \frac{0{,}084}{12} = 0{,}007$$

Applichiamo la formula:

$$V = 1200 \cdot \ddot{a}_{\overline{10}|0{,}007} = 1200 \cdot \frac{1-(1+0{,}007)^{-10}}{0{,}007} \cdot (1+0{,}007) = 11\,631{,}50(€)$$

b. La rendita è posticipata; trasformiamo il tasso da annuo a mensile:

$$i_{12} = \sqrt[12]{1+0{,}06} - 1 = 0{,}00486755$$

Applichiamo la formula: $V = 1\,200 \cdot a_{\overline{10}|0{,}00486755} = 1200 \cdot \dfrac{1-(1+0{,}00486755)^{-10}}{0{,}00486755} = 11\,684{,}90(€)$

73 Calcola il valore attuale di una rendita posticipata di € 1 200 quadrimestrali e della durata di 2 anni ai seguenti tassi:

a. 8% quadrimestrale [€ 5 547,46]

b. 8% annuo convertibile quadrimestralmente [€ 6 573,06]

c. 8% annuo. [€ 6 588,01]

74 Calcola il valore attuale di una rendita anticipata di € 600 mensili della durata di 15 mesi ai seguenti tassi:

a. 1,5% mensile [€ 8126,03]

b. 18% annuo convertibile mensilmente [€ 8126,03]

c. 19,562% annuo. [€ 8126,03]

Perché ottieni lo stesso valore in tutti e tre i casi?

75 Calcola il valore attuale di una rendita posticipata formata da 12 rate trimestrali di € 2 500, valutate al tasso annuo del 4%. [€ 28 137,69]

76 Acquisti un'automobile convenendo il pagamento di 36 rate mensili da € 1 160 a partire dal prossimo mese. Quale somma avresti dovuto pagare in contanti se si è convenuto un tasso mensile dell'1,25%? [€ 33 462,83]

Risolvi i seguenti problemi sul calcolo della rata.

77 **ESERCIZIO GUIDA**

Il valore attuale di una rendita formata da 10 rate annue, valutate al tasso annuo del 3,5%, è di € 25 000. Calcoliamo l'importo di ciascuna rata:

a. nel caso di rendita posticipata

b. nel caso di rendita anticipata.

I dati a nostra disposizione sono: $V = 25\,000$ $\quad n = 10$

$i = 0{,}035$ tasso conforme al periodo della rata.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

a. Utilizziamo la formula $V = R \cdot a_{\overline{10}|0,0035}$ e da essa ricaviamo il valore di R:

$$25000 = R \cdot \frac{1-(1+0{,}035)^{-10}}{0{,}035} \quad \rightarrow \quad 25000 = R \cdot 8{,}316605 \quad \rightarrow \quad R = 3006{,}03(€)$$

b. Utilizziamo la formula $V = R \cdot \ddot{a}_{\overline{10}|0,0035}$ e troviamo R:

$$25000 = R \cdot \frac{1-(1+0{,}035)^{-10}}{0{,}035} \cdot (1+0{,}035) \quad \rightarrow \quad 25000 = R \cdot 8{,}607687 \quad \rightarrow \quad R = 2904{,}38(€)$$

Notiamo come, a parità di valore attuale, tasso e numero di rate, l'importo della rata di una rendita posticipata è maggiore rispetto all'importo della rata di una rendita anticipata.

78 Calcola l'importo della rata di una rendita formata da 7 rate posticipate sapendo che:

a. $V = 3761{,}14(€)$ $\quad i = 0{,}05$ [€ 650]

b. $V = 6230{,}28(€)$ $\quad i = 0{,}03$ [€ 1000]

c. $V = 7745{,}32(€)$ $\quad i = 0{,}042$. [€ 1300]

79 Calcola la rata di una rendita anticipata sapendo che:

a. $V = 1569{,}15(€)$ $\quad n = 12$ $\quad i = 0{,}026$ [€ 150]

b. $V = 3647{,}48(€)$ $\quad n = 20$ $\quad i = 0{,}031$ [€ 240]

c. $V = 4083{,}27(€)$ $\quad n = 14$ $\quad i = 0{,}043$. [€ 378]

80 Calcola la rata costante di una rendita anticipata immediata formata da 9 rate che, al tasso annuo del 3%, produce un valore attuale di € 1603,94. [€ 200]

81 Calcola la rata costante di una rendita posticipata immediata formata da 10 rate che, al tasso annuo del 3,2%, produce un valore attuale di € 2110,95. [€ 250]

82 Cedendo ad un Istituto di Credito una rendita annua formata da 15 rate anticipate, si ottiene la somma di € 5449,32. Calcola l'importo della rata costante sapendo che il tasso di valutazione è del 5%. [€ 500]

83 Per rimborsare un prestito di € 25000 al tasso annuo del 3,5%, una persona deve pagare 12 rate annue di cui la prima sarà versata fra un anno. Qual è l'importo della rata? [€ 2587,09]

Risolvi i seguenti problemi sulla determinazione del numero delle rate.

84 **ESERCIZIO GUIDA**

Il valore attuale di una rendita, calcolato un periodo prima della scadenza della prima rata, è di € 6720,86; l'importo della rata è di € 800 e il tasso di valutazione è del 3,3% annuo. Calcola il numero delle rate.

Conosciamo: $V = 6720{,}86$ $\quad R = 800$ $\quad i = 0{,}033$ dobbiamo trovare n.

La rendita è posticipata; il periodo della rata e il tasso sono omogenei, possiamo applicare subito la formula $V = R \cdot a_{\overline{n}|0,033}$ dalla quale ricavare poi n:

$$6720{,}86 = 800 \cdot \frac{1-(1+0{,}033)^{-n}}{0{,}033}$$

Isoliamo il termine $1{,}033^{-n}$: $\quad 1{,}033^{-n} = 1 - \frac{6720{,}86 \cdot 0{,}033}{800} \quad \rightarrow \quad 1{,}033^{-n} = 0{,}722764$

Passiamo ai logaritmi decimali dei due membri:

$$\log 1{,}033^{-n} = \log 0{,}722764 \quad \rightarrow \quad n = -\frac{\log 0{,}722764}{\log 1{,}033} = 10$$

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

85 Versando un certo numero di rate costanti posticipate dell'importo di € 100 ciascuna, si ottiene un valore attuale di € 277,51. Calcola il numero delle rate sapendo che è stato applicato il tasso annuo del 4%. [3]

86 Calcola il numero di rate costanti posticipate dell'importo di € 300 ciascuna necessarie ad ottenere, al tasso annuo del 2%, un valore attuale di € 1414,04. [5]

87 Calcola il numero di rate costanti anticipate dell'importo di € 600 ciascuna necessarie ad ottenere, al tasso annuo del 4,2%, un valore attuale di € 5020,82. [10]

88 Un tale acquista una villetta per € 270000 e concorda con il venditore di pagare rate annue da € 28831 ciascuna, di cui la prima da pagare subito. Quante rate pagherà se è stato concordato un tasso del 10% annuo? [20]

Risolvi i seguenti problemi riassuntivi sul valore attuale di una rendita.

89 Hai diritto a riscuotere, a partire da oggi, € 3300 all'anno per 8 anni, tuttavia devi cedere la tua rendita per pagare un debito di € 22000; tre persone ti offrono di rilevarla rispettivamente al tasso del 10%, del 7% e del 3%. Calcola cosa ricaveresti nei tre casi e quale persona ti consente di poter estinguere il debito. [la terza]

90 Devi riscuotere € 1200 all'anno per 9 anni a partire dall'anno prossimo. Quanto potresti riscuotere oggi se cedessi il diritto ad una banca che lo valuta al 2,25% annuo? E se invece tu cedessi il diritto l'anno prossimo? [€ 9678,84; € 9896,62]

91 Carlo ha acquistato un appartamento stabilendo di pagarlo con 15 rate posticipate di € 15000 ciascuna, sulle quali è applicato un tasso del 5% annuo; al momento della stipula del contratto ha versato € 100000 come acconto. Qual è il costo dell'appartamento? [€ 255694,87]

92 Un immobile del valore di € 200000 viene venduto convenendo i seguenti pagamenti:
- € 70000 subito
- € 80000 fra 5 anni
- 22 semestralità, la prima esigibile fra 6 mesi.

Se il tasso dell'operazione è del 3,25% semestrale con capitalizzazione semestrale, qual è l'importo di ciascuna rata? [€ 4625,17]

93 Per l'acquisto di un macchinario si può scegliere una delle seguenti modalità di pagamento:
a. € 25000 in contanti subito
b. € 2500 subito, 48 rate mensili posticipate, € 3000 fra 4 anni e 4 mesi.
Determina, al tasso dell'1,15% mensile l'importo delle rate.
(Suggerimento: osserva che le due forme di pagamento devono essere equivalenti, cioè la somma di € 25000 deve essere uguagliata al valore attuale dei pagamenti dell'ipotesi **b.**) [€ 567,52]

LE RENDITE DIFFERITE

la teoria è a pag. 16

RICORDA

- Il valore attuale di una rendita differita di un periodo p si calcola con le formule:
  - in caso di rata posticipata: $V = R \cdot {}_{p/}a_{\overline{n}|i}$ dove ${}_{p/}a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-p}$
  - in caso di rata anticipata: $V = R \cdot {}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ dove ${}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-p}$

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Comprensione

94 Una rendita la cui prima rata scade fra 6 anni è una rendita:
a. formata da 6 rate
b. differita di 6 anni se la rendita è anticipata
c. differita di 6 anni se la rendita è posticipata
d. differita di 6 anni comunque sia la rendita.

95 Il valore di una rendita di 8 rate, la cui prima rata di € 1 000 si può riscuotere fra 5 anni, valutata al tasso annuo è del 3% è:
a. € 6 055,25 **b.** € 7 230,28 **c.** € 6 236,91 **d.** € 5 878,88

Applicazione

96 **ESERCIZIO GUIDA**

Fra tre mesi il figlio di Giovanni dovrà effettuare il primo di 8 pagamenti mensili consecutivi di € 4000. Giovanni decide di assumersi l'onere e versa oggi in banca una somma che possa coprire tutti i pagamenti futuri. Il tasso applicato dalla banca è del 6% annuo nominale convertibile mensilmente. Quanto dovrà versare?

Si tratta di una rendita mensile differita di tre mesi (quindi di 3 periodi); il tasso annuo deve quindi essere convertito in tasso mensile:

$$i_{12} = \frac{0{,}06}{12} = 0{,}005$$

- Se interpretiamo la rendita come **anticipata**, il pagamento della prima rata è al tempo 3, il valore attuale si calcola al tempo 3, quindi il differimento è di 3 periodi: $p = 3$.
  In questo caso
  $$V = R \cdot {}_{3/}\ddot{a}_{\overline{8}|0{,}005} : \quad V = 4000 \cdot \frac{1-(1+0{,}005)^{-8}}{0{,}005} \cdot (1+0{,}005) \cdot (1+0{,}005)^{-3} = 30981{,}25(€)$$

- Se interpretiamo la rendita come **posticipata**, il pagamento della prima rata è al tempo 3, il valore attuale si calcola al tempo 2, quindi il differimento è di 2 periodi: $p = 2$.
  In questo caso $V = R \cdot {}_{2/}a_{\overline{8}|0{,}005}$: $\quad V = 4000 \cdot \dfrac{1-(1+0{,}005)^{-8}}{0{,}005} \cdot (1+0{,}005)^{-2} = 30981{,}25(€)$

Il risultato ottenuto è ovviamente identico.

97 Calcola il valore attuale di una rendita posticipata differita alle seguenti condizioni:
a. differimento di 9 anni, 7 rate di € 1500 ciascuna al tasso annuo del 9,75% [€ 3187,29]
b. differimento di 5 anni, 10 rate di € 2500 ciascuna al tasso annuo del 7,25% [€ 12232,37]
c. differimento di 3 anni, 7 rate di € 1200 ciascuna al tasso annuo del 6% [€ 5624,49]
d. differimento di 10 anni, 9 rate di € 1000 ciascuna al tasso annuo dell'8%. [€ 2893,52]

98 Calcola il valore attuale di una rendita anticipata differita alle seguenti condizioni:
a. differimento di 6 anni, 9 rate di € 1700 ciascuna al tasso annuo dell'8% [€ 7227,60]
b. differimento di 10 anni, 8 rate di € 5300 ciascuna al tasso annuo del 5,5% [€ 20735,79]
c. differimento di 4 anni, 7 rate di € 2350 ciascuna al tasso annuo del 7,75% [€ 10177,27]
d. differimento di 5 anni, 12 rate di € 1800 ciascuna al tasso annuo del 4,75%. [€ 13439,86]

99 Una persona, per saldare un debito contratto 8 anni fa al tasso del 5, 5% annuo, cede oggi ad una banca il diritto alla riscossione di una rendita posticipata di 12 rate, ciascuna di € 1900 al tasso del 4% annuo, differita di 5 anni. A quanto ammonta il debito di questa persona? [€ 9550,03]

100 Calcola il valore attuale di una rendita di 12 rate annue di € 900 ciascuna al tasso annuo del 6,5% la cui prima rata verrà pagata fra 3 anni.
(Suggerimento: se consideri la rendita anticipata il tempo di differimento è .... se la consideri posticipata il tempo di differimento è ....) [€ 6473,89]

101 Calcola il valore attuale, al tasso di valutazione del 5% annuo, di una rendita:
a. di 8 rate annue di € 100 la cui prima rata verrà pagata fra 2 anni [€ 615,54]
b. di 8 rate annue posticipate di € 100 e con differimento 2 anni [€ 586,23]
c. di 8 rate annue anticipate di € 100 e con differimento 2 anni. [€ 615,54]

102 Calcola il valore attuale di una rendita di 10 rate annue di € 400 ciascuna al tasso annuo del 7,5% la cui prima rata verrà pagata fra 6 anni. [€ 1912,49]

103 **ESERCIZIO GUIDA**

Una rendita differita costituita da 10 rate anticipate da € 800 ciascuna, al tasso annuo del 7% vale oggi € 4586,67. Qual è il suo periodo di differimento?

L'equazione da impostare è $V = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{-p}$

cioè nel nostro caso $4586{,}67 = 800 \cdot \ddot{a}_{\overline{10}|0{,}07} \cdot (1+0{,}07)^{-p}$

Dall'equazione ora scritta ricaviamo che $(1{,}07)^p = 800 \cdot \dfrac{\ddot{a}_{\overline{10}|0{,}07}}{4586{,}67}$

cioè $(1{,}07)^p = 1{,}310795370$

Passando ai logaritmi troviamo $p = \dfrac{\log 1{,}310795370}{\log 1{,}07} = 4$ (anni)

104 Calcola il differimento di una rendita di 12 rate annue posticipate di € 1350 l'una, il cui valore attuale, al 9% annuo, è di € 3436,95. [12 anni]

105 Calcola il differimento di una rendita di 10 rate annue anticipate di € 1500 ciascuna, il cui valore attuale, al 9,5% annuo, è di € 4989,64. [8 anni]

106 Laura dovrebbe riscuotere € 1650 annue per 10 anni; cede tale diritto ad una banca che le versa, al tasso del 2,75% annuo, € 12114,64. Fra quanto tempo Laura avrebbe dovuto riscuotere la prima rata? [7 anni]

LE RENDITE PERPETUE

la teoria è a pag. 20

RICORDA

- Una rendita è perpetua se ha un numero illimitato di rate; in questo tipo di rendite ha senso calcolare il solo valore attuale e si ha che:
  - in caso di rata posticipata: $V = \dfrac{R}{i}$
  - in caso di rata anticipata: $V = \dfrac{R}{i} \cdot (1+i)$

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Comprensione

107 Un lascito testamentario prevede una rendita annua perpetua di € 12 000 a favore di un ospedale per bambini da pagarsi all'inizio di ogni anno. Il valore della rendita, al tasso del 2% annuo è:

a. € 624 000 **b.** € 580 000 **c.** € 612 000 **d.** € 600 000

108 Il valore attuale di una rendita perpetua è di € 8000 e la rata posticipata annua è di € 400. Quali tra i seguenti sono il tasso annuo e il tasso semestrale dell'operazione?

a. $i = 0{,}05$ e $i_2 = 0{,}0247$ **b.** $i = 0{,}05$ e $i_6 = 0{,}0247$

c. $i = 0{,}05$ e $i_6 = 0{,}025$ **d.** $i = 0{,}05$ e $i_2 = 0{,}025$

Applicazione

109 Oggi, ti viene comunicato che hai ricevuto in eredità una rendita che alla fine dell'anno e così per sempre, ti permetterà di incassare € 5 000. Qual è il valore di questo lascito ad una valutazione al 4% annuo? [€ 125 000]

110 Calcola il valore attuale delle seguenti rendite annue immediate perpetue:

a. rata posticipata di € 4 000 al tasso dell'8,5% annuo [€ 47 058,82]

b. rata annuale di € 5 700 un anno prima della scadenza del primo versamento al tasso del 4,25% [€ 134 117,65]

c. rata posticipata di € 2 300 al tasso del 7,25%. [€ 31 724,14]

111 Calcola il valore attuale delle seguenti rendite annue immediate perpetue:

a. rata anticipata di € 3 540 al tasso del 9,75% annuo [€ 38 834,61]

b. rata annua di € 6 300 alla scadenza del primo versamento al tasso del 6,4% [€ 104 737,50]

c. rata anticipata di € 8 400 al tasso del 12%. [€ 78 400]

112 Calcola la rata di una rendita perpetua posticipata nei seguenti casi:

a. $V = € \ 5000$ $i = 0{,}06$ [€ 300]

b. $V = € \ 11000$ $i = 0{,}05$ [€ 550]

c. $V = € \ 174000$ $i = 0{,}02$. [€ 3 480]

113 Calcola il tasso annuo a cui viene valutata una rendita perpetua posticipata nei seguenti casi:

a. $V = € \ 50000$ $R = € \ 1000$ [2%]

b. $V = € \ 585000$ $R = € \ 24570$ [4,2%]

c. $V = € \ 120000$ $R = € \ 3000$. [2,5%]

114 Un fondo che rende € 12 000 all'anno è ceduto al tasso annuo del 6%; calcola il suo valore nell'ipotesi che la prima rata scada oggi. [€ 212 000]

115 Una persona possiede una rendita perpetua di € 2 150 annue; cede tale rendita ad una banca che gliela valuta al tasso del 6,5%. Calcola l'importo che questa persona riceve sia nel caso di rendita con rata anticipata che nel caso di rendita con rata posticipata. [€ 35 226,92; € 33 076,92]

116 Calcola il tasso semestrale di una rendita perpetua posticipata, con rata semestrale di € 720 e valore attuale € 24 000. [$i_2 = 0{,}03$]

117 Una rendita perpetua posticipata paga rate trimestrali di € 1 125 ed ha un valore attuale di € 93 750. Calcola il tasso trimestrale applicato. [$i_4 = 0{,}012$]

118 Il valore attuale, calcolato all'atto del versamento della prima rata, di una rendita perpetua è di € 102 000; la rata semestrale è di € 2 000. Calcola il tasso semestrale e il corrispondente tasso annuo nominale convertibile semestralmente. [$i_2 = 0{,}02$; $j_2 = 0{,}04$]

119 In una rendita perpetua anticipata, la rata bimestrale è di € 1 230 e il valore attuale è di € 209 704,58. Calcola il tasso bimestrale e l'equivalente tasso annuo. [$i_6 = 0{,}0059$; $i = 0{,}036$]

120 Una rendita perpetua immediata annua posticipata con rata di € 1 300 al tasso annuo del 7% è equivalente ad un'altra rendita perpetua immediata posticipata al tasso annuo dell'11%. Qual è la rata della seconda rendita? [€ 2042,86]

L'INTERPOLAZIONE LINEARE PER RISOLVERE I PROBLEMI

la teoria è a pag. 22

Applicazione

121 **ESERCIZIO GUIDA**

Facendo 4 versamenti annui posticipati di € 200 ciascuno, si ottiene un montante di € 836,73. Calcoliamo il tasso di interesse annuo a cui viene fatta l'operazione finanziaria.

Conosciamo: $M = 836{,}73$ $R = 200$ $n = 4$ dobbiamo trovare il tasso annuo i

Periodo della rata e tasso sono conformi, possiamo subito applicare la formula per il calcolo del montante $M = R \cdot s_{\overline{4}|i}$: $836{,}73 = 200 \cdot \dfrac{(1+i)^4 - 1}{i}$

Non potendo risolvere algebricamente l'equazione, ricorriamo all'interpolazione lineare.
Troviamo due valori di i che approssimano il montante per difetto e per eccesso:

- se $i = 0{,}035$ il montante è: $200 \cdot \dfrac{(1+0{,}035)^4 - 1}{0{,}035} = 842{,}99$

  poiché $842{,}99 > 836{,}73$ $\rightarrow$ 0,035 è un valore approssimato per eccesso del tasso cercato

- se $i = 0{,}025$ il montante è: $200 \cdot \dfrac{(1+0{,}025)^4 - 1}{0{,}025} = 830{,}50$

  poiché $830{,}50 < 836{,}73$ $\rightarrow$ 0,025 è un valore approssimato per difetto del tasso cercato

Disponiamo le coordinate dei punti in una tabella e riportiamo in essa anche il valore corretto del montante:

	i	M
punto A	0,035	842,99
punto B	0,025	830,50
$\overline{y}$	x	836,73

Scriviamo l'equazione della retta che passa per i punti A e B: $\dfrac{y - 842{,}99}{830{,}50 - 842{,}99} = \dfrac{x - 0{,}035}{0{,}025 - 0{,}035}$

Per trovare il valore di x che rappresenta il tasso cercato sostituiamo al posto di y il valore di $\overline{y}$:

$$\frac{836{,}73 - 842{,}99}{830{,}50 - 842{,}99} = \frac{x - 0{,}035}{0{,}025 - 0{,}035} \quad \rightarrow \quad x = 0{,}03$$

Il tasso cercato è dunque pari al 3%.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

122 Abbiamo depositato 6 rate annue da € 5700 ottenendo così un montante di € 37055,57. Determiniamo a quale tasso è stata fatta l'operazione, supponendo che la rendita sia posticipata. [≈ 3,2%]

123 Il montante disponibile dopo aver fatto l'ultimo di 5 versamenti annui posticipati di € 2000 è di € 11733,20. Calcola a quale tasso è stata condotta l'operazione. [≈ 8%]

124 La cessione del diritto ad incassare 9 rate annue di € 1600 è stata pagata € 10300. Calcola a quale tasso si è svolta l'operazione considerando le rate posticipate. [≈ 7,3%]

125 Con 5 versamenti annui posticipati di € 1 643,17 ciascuno, si ottiene un montante di € 8 500. Calcola il tasso di interesse annuo a cui viene fatta l'operazione finanziaria. [≈ 1,7%]

126 Versando 6 rate anticipate annue di € 2 307 si ottiene un montante di € 15 000. Calcola il tasso di interesse annuo a cui viene fatta l'operazione finanziaria. [≈ 2,3%]

127 Versando alla fine di ogni anno e per 9 anni € 1 033,49, si ottiene un montante di € 10 000. Calcola il tasso di interesse annuo a cui viene fatta l'operazione finanziaria. [≈ 1,8%]

128 Facendo 5 versamenti annui anticipati di € 4 653,99 ciascuno, si ottiene un montante di € 25 000. Calcola il tasso di interesse annuo a cui viene fatta l'operazione finanziaria. [≈ 2,4%]

129 Il valore attuale di una rendita posticipata composta da 7 rate annue di € 1500 ciascuna è di € 7944,90. Calcola il tasso dell'operazione.
(Suggerimento: devi risolvere l'equazione $7944{,}90 = 1500 \cdot \dfrac{1-(1+i)^{-7}}{i}$) [≈ 7,5%]

130 Una rendita annua anticipata di 6 rate di € 3500 produce un montante di € 29199,27. A quale tasso è stata condotta l'operazione? [≈ 9,5%]

131 In cambio di una rendita di 10 rate annue posticipate di € 780 ciascuna, ti viene offerta la somma di € 6 263,98. A quale tasso è stata fatta la valutazione della rendita? [4,2%]

ESERCIZI RIASSUNTIVI SULLE RENDITE

132 Giacomo ha versato presso una banca € 1750 all'anno per 15 anni al tasso annuo del 2,5%; l'ultimo versamento è stato fatto 3 anni fa. Un anno fa ha poi pagato un debito di € 25000 e 6 mesi fa ha depositato € 3500. Qual è l'ammontare del suo conto in banca oggi? [€ 11712,25]

133 Una rendita annua è costituita da 9 rate di importo € 800 e da 9 rate successive di importo € 1 300. Calcola il montante di questa rendita, nel momento in cui scade l'ultima rata, nell'ipotesi che:
a. tutte le operazioni vengano fatte al 6% [€ 30470,18]
b. le prime 9 rate vengano calcolate al 6% e le successive al 7%. [€ 32472,43]

134 Per pagare fra due anni la somma di € 50000, una persona riscuote oggi il valore attuale di una rendita posticipata di € 5200 della durata di 14 anni al tasso del 3,75% annuo. Impiega il capitale ottenuto in una forma di investimento che rende il 4,33%. Quanto ricava da questo investimento in due anni? Riuscirà ad estinguere il debito? [€ 60786,99]

135 Dieci anni fa Luca chiese un prestito di € 900 all'anno che incassò costantemente per 7 anni. Oggi, desiderando saldare il debito, egli si impegna a versare per 5 anni a partire da subito una rata costante annua e per i successivi 5 anni una rata doppia della precedente. Il prestito fu concesso ad un tasso iniziale del 3%, salito 6 anni fa al 4%; oggi Luca ha convenuto un tasso del 4,5% per i primi 5 anni e del 5% per le rate successive. Qual è l'ammontare delle rate che deve pagare? [5 rate a € 689,52; 5 rate a € 1379,05]

136 Attilio ha un fondo agricolo che gli frutta € 500 ogni 6 mesi. Per i primi 6 anni cede tale rendita al figlio maggiore. Dalla rata successiva, l'introito della rendita passa al figlio minore che ne potrà usufruire in perpetuo. Se la valutazione della rendita è all'8% annuo nominale convertibile semestralmente, quale figlio riceve di più? Non volendo però fare ingiustizie, Attilio dà in contanti la differenza al figlio che ricava di meno. Quanto deve dare il padre all'altro figlio? [€ 3114,92]

137 Il montante di una rendita di 12 rate è, all'atto dell'ultimo versamento, di € 129948, 97 ed il suo valore attuale un anno prima del primo versamento è di € 48822,04. Determina il tasso di interesse annuo e l'importo della rata. [8,5%; € 6647,26]

138 Si sono acquistati dei terreni stabilendo i seguenti pagamenti: 8 rate annue anticipate, a partire dalla stipula del contratto, di € 15800 ciascuna e € 25000 due anni dopo la stipula stessa. Qual è il prezzo dei terreni al momento dell'acquisto in base ad un tasso di valutazione dell'8,5% annuo? [€ 117908,89]

139 Per estinguere un debito, un tale deve versare 12 rate dell'importo di € 2800. Dopo il versamento della quarta rata, chiede di saldare anticipatamente le 8 rate che gli rimangono ad un tasso del 4% annuo. Quale somma deve pagare? [€ 18851,69]

140 Hai depositato annualmente € 1000 presso una banca, al tasso annuo del 2% per 10 anni. Quale rata annua costante potrai prelevare per esaurire il tuo credito, a partire da 5 anni dopo l'ultimo versamento, se vuoi che i prelievi avvengano una volta all'anno per 10 anni consecutivi? [€ 1345,86]

141 Hai depositato presso una banca 10 rate annue di € 900 ciascuna, al tasso del 2,5% annuo; trascorso un certo tempo dopo l'ultimo versamento fatto, hai incominciato a ritirare € 1000 all'anno per 10 anni consecutivi, finchè hai esaurito il tuo credito. Quanto tempo è passato dall'ultimo versamento fatto al primo prelievo? [4a 3m 6g]

142 Un Ente benefico ha ricevuto un lascito perenne, da riscuotere immediatamente, di € 10000 all'anno. L'Ente decide di acquistare un immobile e per far ciò cede tale lascito ad una Banca ad un tasso di valutazione del 5% e in più contrae un debito che rimborserà in 15 anni con rate annue posticipate di € 3000 al tasso annuo del 6%. Qual è il valore dell'immobile? Dopo aver pagato 10 rate del debito, il tasso viene portato al 6,5%. All'atto dell'ultimo versamento quale somma dovrà aggiungere l'Ente per pagare il debito? [€ 229136,75; € 233]

143 Calcola il valore attuale, all'8% annuo convertibile quadrimestralmente, di una rendita perpetua di rata quadrimestrale posticipata di importo pari a € 500. [€ 18750]

144 Un tale avrebbe diritto a riscuotere 20 rate quadrimestrali di € 850 ciascuna, al 4% annuo, di cui la prima fra 6 anni, ma cede oggi tale diritto ad una banca. Calcola la somma che ha diritto a ricevere. [€ 11899,90]

145 Una persona ha versato dieci anni fa € 70000 presso un istituto di credito al 6,2% annuo nominale convertibile semestralmente e due anni fa ha poi prelevato € 15000. Oggi ritira quanto rimasto e lo versa come anticipo per l'acquisto di un immobile per il quale si impegna a pagare ancora 6 rate annue di € 15000 ciascuna, di cui la prima scade fra 3 anni. Se sulla rendita viene applicato un tasso di interesse del 9% annuo, quanto vale oggi l'immobile? [€ 168592,80]

146 **ESERCIZIO GUIDA**

Andrea ha ricevuto in eredità il diritto a riscuotere una rendita formata da 20 rate annue di cui le prime 12 di € 1500 e le successive di € 1700. Se cede tale diritto ad un tasso di valutazione annuo del 6% e la prima rata scade fra un anno, quale somma ha diritto di avere in cambio?

Dobbiamo considerare due rendite: la prima di 12 rate posticipate da € 1500 ciascuna; la seconda di 8 rate posticipate di € 1700 ciascuna, differita di 12 anni. Il valore attuale complessivo è dunque la somma dei valori attuali delle singole rendite al tasso comune del 6%. Si ha allora che

$$V = 1500 \cdot \frac{1-(1+0{,}06)^{-12}}{0{,}06} + 1700 \cdot \frac{1-(1+0{,}06)^{-8}}{0{,}06} \cdot (1+0{,}06)^{-12} = 17822{,}10(€)$$

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

147 Nel contratto di acquisto di un macchinario è previsto il pagamento di 16 rate annue di cui le prime 10 di € 8000 ciascuna e le successive di € 10000 ciascuna. Se il tasso di interesse applicato è del 5% annuo e la prima rata scade fra un anno, calcola il prezzo di listino del macchinario. [€ 92934,22]

148 Per costituire un capitale, una persona ha versato, per 7 anni consecutivi ed alla fine di ogni anno, € 3200; successivamente, per altri 3 anni consecutivi, € 2800; entrambe le operazioni sono state fatte al tasso del 3% annuo. A quanto ammonta il capitale così costituito all'atto dell'ultimo versamento? [€ 35448,05]

149 Un tale versa annualmente € 800 per 6 anni e poi € 950 per i successivi 5 anni. Calcola:

a. il valore attuale complessivo, al tasso del 2% annuo, un anno prima della scadenza della prima rata [€ 8457,29]

b. il montante complessivo, al tasso del 2,5% annuo, all'atto dell'ultimo versamento [€ 10775,22]

c. la rata costante annuale posticipata che avrebbe dovuto versare per 11 anni, al tasso del 2,5% annuo, per costituire il montante di cui al punto **b.**. [€ 863,16]

150 Un tale ha contratto un debito di € 20000 al 6% annuo convenendo di restituirlo con le seguenti modalità:

- 4 rate consecutive di € 900 ciascuna, la prima fra un anno
- nessun pagamento nei due anni successivi
- 7 rate annue costanti negli anni successivi di importo tale da estinguere il debito.

Qual è l'importo della rata? [€ 4289,67]

151 Carlo ha contratto oggi un debito di € 15000 al tasso del 9% annuo convenendo col creditore la seguente serie di pagamenti:

- una certa somma C fra 6 anni
- a partire dall'anno prossimo una somma pari a $\frac{1}{5}C$ per quattro anni consecutivi.

Qual è l'importo della somma iniziale e delle quattro rate? [€ 12055,83; € 2411,17]

152 Hai contratto oggi un debito di € 10200; per saldarlo ti sei impegnato a versare, per 10 anni, € 1200 all'anno a partire dal prossimo. A quale tasso è stata condotta l'operazione? Se potessi impiegare al 4% il capitale che ti è stato prestato, ne avresti un vantaggio? Di che entità? [3,07%; € 3098,49]

153 Fra 10 anni avrai bisogno di un capitale di € 100000 e per questo decidi di accantonare delle somme periodiche, una all'anno alla fine di ogni anno, di € 8000. A quale tasso di interesse hai fatto il calcolo? [4,9%]

Per la verifica delle competenze

1 Anna deposita € 100000 in banca ad un interesse annuo del 2% con capitalizzazione trimestrale e conviene che gli interessi maturati anno per anno vengano reinvestiti in una forma di risparmio che rende il 3,5% annuo. A quanto ammonterà il capitale di Anna fra 10 anni? [€ 123462,79]

2 Vogliamo accantonare ogni anno, alla fine dell'anno, una certa rata in modo che, impiegandola ad un tasso annuo del 2,4%, possiamo usufruire dopo 10 anni di un capitale di € 100000. Qual è l'importo di tale rata? [€ 8966,91]

3 Abbiamo la possibilità di accantonare € 12000 ogni anno alla fine dell'anno e vogliamo costituire un capitale finale di almeno € 80000. Quante rate annuali dobbiamo versare, ad un tasso del 2,5% per raggiungere lo scopo? [7 rate]

4 Una banca riceve l'ordine da un suo cliente di pagare ad una associazione umanitaria una rendita di € 5000 all'anno, alla fine di ogni anno, per 6 anni e si conviene un tasso annuo dell'1,7%. Qual è il valore della rendita dopo l'ultimo versamento? [€ 31304,27]

5 Dal 31 gennaio 2002 stai versando ogni mese € 300 presso un fondo che capitalizza con un tasso di interesse annuo del 2,5%. Quanto avrai accumulato in data 31 dicembre 2016?
(Suggerimento: poichè i versamenti avvengono alla fine di ogni mese, si tratta di una rendita posticipata mensile; devi quindi prima di tutto convertire il tasso annuale in tasso mensile (arrotonda alla quarta cifra decimale); il numero delle rate è il numero di mesi compresi dal 31 gennaio 2002 al 31 dicembre 2016) [€ 65540,66]

6 All'inizio di ogni anno e per 7 anni, abbiamo versato € 500 presso un istituto di credito al tasso annuo del 2,2%. Oggi, un periodo dopo l'ultimo versamento ritiriamo il capitale accumulato e incassiamo contemporaneamente anche il montante di un capitale versato nello stesso istituto 4 anni fa allo stesso tasso di interesse. Se la somma complessiva che ritiriamo è di € 4912,87, a quanto ammonta la cifra versata 4 anni fa? [€ 1000]

7 Il pagamento di uno scooter viene convenuto mediante il pagamento di 10 rate quadrimestrali anticipate, ciascuna di € 400, ad un tasso annuo del 5%, che si cominciano a pagare 6 mesi dopo la stipula del contratto. Quanto viene a costare lo scooter con questo tipo di pagamento? [€ 4379,06]

8 Giovanni ha versato € 300 per 10 anni, all'inizio di ogni trimestre, in una banca che capitalizza trimestralmente al tasso annuo nominale convertibile trimestralmente del 3,2%.
Oggi, un periodo dopo l'ultimo versamento, Giovanni ritira il montante e lo utilizza per acquistare un'automobile del valore di € 14000. È sufficiente la somma ritirata dalla banca? [si, $M = 14189{,}19$(€)]

9 Cristina ha diritto ad incassare, quale risarcimento per i danni subiti in un incidente, € 1000 all'anno per 6 anni senza interessi. Man mano che riscuote le somme, le deposita in banca al tasso del 2,1% annuo. Di quanto potrà disporre un anno dopo l'ultimo versamento? [€ 6456,77]

10 Luigi ha depositato per 7 anni consecutivi € 1500 al tasso annuo del 2,8% e ciò fino all'anno scorso. Ha versato anche per 4 anni consecutivi € 2000 al tasso annuo del 3% e ha fatto l'ultimo versamento oggi. Di quale somma può disporre oggi Luigi?
(Suggerimento: schematizza la situazione sulla retta dei tempi. Il capitale a disposizione di Luigi è la somma di due montanti, il primo riguarda una rendita ... e il secondo una rendita ....) [€ 20111,46]

Risultati di alcuni esercizi.

1 **b.**, **c.**	2 **c.**, **d.**	3 **b.**, **c.**, **d.**	4 **d.**	5 **a.** V, **b.** V, **c.** F, **d.** F	
13 **c.**	14 **a.**	15 **d.**	16 **b.**	17 **c.**	18 **c.**
19 **b.**	20 **a.**	59 **a.**	60 **d.**	61 **b.**	62 **d.**
63 **b.**	64 **c.**	94 **b.**	95 **c.**	107 **c.**	108 **a.**

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

Test finale di autovalutazione

1 Il montante di una rendita si trova calcolando:

a. la somma dei montanti di tutte le rate
b. la somma dei montanti di tutte le rate tranne l'ultima
c. la media dei montanti di tutte le rate
d. capitalizzando la prima rata fino al tempo n.

2 punti

2 In una rendita immediata posticipata, il montante calcolato 5 anni dopo la scadenza dell'ultima rata si calcola:

a. moltiplicando il montante alla scadenza dell'ultima rata per il fattore $(1 - i)^5$
b. moltiplicando il montante un periodo prima della scadenza dell'ultima rata per il fattore $(1 + i)^5$
c. moltiplicando il montante alla scadenza dell'ultima rata per il fattore $(1 + i)^5$
d. moltiplicando il montante alla scadenza dell'ultima rata per il fattore $(1 + i)^4$.

3 punti

3 Una rendita in cui la prima rata verrà riscossa tra 5 anni ha:

a. un differimento di 5 anni indipendentemente dalla data di decorrenza
b. un differimento di 4 anni indipendentemente dalla data di decorrenza
c. un differimento di 5 anni se la rendita è posticipata
d. un differimento di 5 anni se la rendita è anticipata.

3 punti

4 Il montante di una rendita calcolato un periodo dopo l'ultimo versamento indica:

a. che la rendita è anticipata
b. che la rendita è posticipata
c. che la rendita non è temporanea
d. che il tasso fino a quel momento non è cambiato.

Quale affermazione è corretta?

2 punti

5 Il montante calcolato all'atto dell'ultimo di 12 versamenti annui di rata € 200 e al tasso annuo del 2% è:

a. € 2736,07 **b.** € 2115,06 **c.** € 2157,37 **d.** € 2682,42

8 punti

6 Una rendita è formata da 6 rate annue di € 100. Il valore attuale all'atto del versamento della prima rata con un tasso annuo del 3%:

a. si calcola con la formula: ① $V = 100 \cdot a_{\overline{6}|0,03}$ ② $V = 100 \cdot s_{\overline{6}|0,03}$ ③ $V = 100 \cdot \ddot{a}_{\overline{6}|0,03}$

b. è uguale a euro: ① 557,97 ② 541,72 ③ 575,38

10 punti

7 Il valore attuale in euro di una rendita perpetua posticipata, con 3 anni di differimento, di rata € 1000 e tasso di valutazione del 4% è:

a. € 22 224,91 **b.** € 23 113,91 **c.** € 24038,46 **d.** € 25000

10 punti

8 Una persona ha diritto ad incassare una rendita annua costituita da 10 rate ciascuna di € 900, ed una seconda rendita costituita da 7 rate di € 1300 ciascuna. Cede oggi le due rendite al tasso annuo del 7%. Che somma ricava se le rendite sono entrambe posticipate? E se fossero anticipate?

13 punti

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

9 Fra due anni Angelo dovrà affrontare le spese di ristrutturazione di una parte della sua casa e prevede di dover spendere € 30 000. Per accantonare tale somma egli pensa di versare in banca una rata costante R ogni tre mesi ad un tasso concordato dell'1,69% annuo. Quale dovrà essere l'importo della rata?

13 punti

10 Per l'acquisto di un piccolo appartamento Michele ha già pagato € 30000 due anni fa, € 30000 un anno fa e € 10000 sei mesi fa. Per saldare il conto, oggi Michele cede il diritto a riscuotere una rendita di 10 rate mensili di € 4000 ciascuna di cui la prima esigibile fra 3 mesi. Qual è il valore dell'appartamento, arrotondato all'euro, se viene applicato un tasso di interesse annuo del 6%?

13 punti

11 Carla ha diritto a riscuotere 12 rate annue di € 2500 ciascuna, di cui la prima rata è esigibile fra un anno, e altre 10 rate successive alle prime di € 3000 ciascuna. Cede questo diritto ad una banca al tasso annuo del 2% per poter usufruire fra 3 anni di € 40000 e fra 8 anni di una somma C. Qual è il valore di C?

13 punti

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Totale
Punteggio												

Voto: $\frac{\text{totale}}{10} + 1 =$

Soluzioni

1 **a.** **2** **c.** **3** **d.** **4** **a.**

5 **d.** **6** **a.** ③; **b.** ① **7** **a.** **8** € 13 327,30 e € 14 260,21

9 € 3 695,22 **10** € 114 376,85 **11** € 11 709,07

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS