ESERCIZI

Vettori: dipendenza e indipendenza lineare

DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE

teoria a pagina 1

Comprensione

1 Due vettori del piano hanno le componenti proporzionali; di essi si può dire che:
a. sono linearmente dipendenti
b. sono linearmente indipendenti
c. non si può dire nulla perché non si conoscono le componenti.

2 I vettori $\vec{a}(1, 1)$ $\vec{b}(2, 4)$ $\vec{c}(-1, 0)$ sono:
a. linearmente dipendenti **b.** linearmente indipendenti

3 Se $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ una sola tra le seguenti affermazioni e falsa; quale?
a. $\vec{c}$ è combinazione lineare di $\vec{a}$ e $\vec{b}$
b. $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ sono linearmente dipendenti
c. $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono sicuramente linearmente indipendenti
d. non è possibile sapere se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono dipendenti o indipendenti.

4 Sono date le seguenti coppie di vettori:
① $\vec{r}(5, 1)$ e $\vec{s}(15, 3)$ ② $\vec{a}(1, 1)$ e $\vec{b}(2, 3)$
③ $\vec{p}(8, 4)$ e $\vec{q}\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ④ $\vec{v}(18, 6)$ e $\vec{w}\left(3, \frac{1}{3}\right)$
Sono linearmente indipendenti:
a. tutte le coppie **b.** solo ② e ④ **c.** solo ② e ③ **d.** solo ②

Applicazione

Date le seguenti coppie di vettori, scrivi i vettori che sono una loro combinazione lineare con h e k assegnati.

5 $\vec{a}(2, -3)$ $\vec{b}\left(0, \frac{4}{3}\right)$ $h = 2$ e $k = 3$

6 $\vec{a}(-4, 2)$ $\vec{b}\left(1, \frac{2}{3}\right)$ $h = \frac{1}{2}$ e $k = 0$

7 $\vec{a}\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ $\vec{b}(6, 3)$ $h = 2$ e $k = \frac{1}{3}$

8 $\vec{a}(-1, -1)$ $\vec{b}(2, -2)$ $h = 1$ e $k = -1$

Stabilisci se i seguenti vettori del piano sono linearmente dipendenti o indipendenti.

9 **ESERCIZIO GUIDATO**

$\vec{a}(3, -1) \qquad \vec{b}(1, -2)$

Dobbiamo vedere se il sistema $\begin{cases} 3h + k = 0 \\ -h - 2k = 0 \end{cases}$

ammette altre soluzioni oltre a quella nulla; calcoliamo allora il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 = -5$$

Avendo trovato un determinante diverso da zero, i due vettori sono linearmente indipendenti.

10	$\vec{u}(1, 2)$	$\vec{w}(2, 3)$	[linearmente indipendenti]
11	$\vec{a}(1, -1)$	$\vec{b}(-3, 3)$	[linearmente dipendenti]
12	$\vec{a}(\sqrt{2}, -1)$	$\vec{b}(\sqrt{2}, 5)$	[linearmente indipendenti]
13	$\vec{v}(-5, 1)$	$\vec{w}(3, 3)$	[linearmente indipendenti]
14	$\vec{v}(3, 2)$	$\vec{w}(-1, 4)$	[linearmente indipendenti]
15	$\vec{u}(-1, 1)$	$\vec{w}(3, 5)$	[linearmente indipendenti]
16	$\vec{a}(2, 2)$	$\vec{b}(-1, -1)$	[linearmente dipendenti]
17	$\vec{a}(1, 0)$	$\vec{b}(0, 2)$	[linearmente indipendenti]

Stabilisci se i seguenti vettori dello spazio sono linearmente dipendenti o indipendenti.

18 **ESERCIZIO GUIDATO**

$\vec{a}(1, 2, -3) \qquad \vec{b}(0, 1, 6) \qquad \vec{c}(4, -1, -2)$

Dobbiamo vedere se il sistema $\begin{cases} h + 4r = 0 \\ 2h + k - r = 0 \\ -3h + 6k - 2r = 0 \end{cases}$ ammette altre soluzioni oltre a quella nulla.

Consideriamo la matrice dei coefficienti: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

e valutiamone il determinante applicando la stessa regola vista per la risoluzione dei sistemi con il metodo di Cramer:

(somma dei prodotti lungo le diagonali principali) $-$ **(somma dei prodotti lungo le diagonali secondarie)**

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & -2 & -3 & 6 \end{array}\right. = [1 \cdot 1 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) \cdot (-3) + 4 \cdot 2 \cdot 6] - [4 \cdot 1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \cdot 6 + 0 \cdot 2 \cdot (-2)] = 64$$

Poiché il determinante ottenuto è diverso da zero, il sistema ammette una sola soluzione, quella nulla, e perciò i vettori sono linearmente indipendenti.

19	$\vec{v}(-1, 3, -2)$	$\vec{u}(0, 1, 1)$	$\vec{w}(2, -2, 1)$	[linearmente indipendenti]
20	$\vec{a}(1, -1, 1)$	$\vec{b}(3, -2, 3)$	$\vec{c}(2, -1, 2)$	[linearmente dipendenti]
21	$\vec{u}(0, 1, 0)$	$\vec{v}(0, 4, 4)$	$\vec{w}(0, 0, 1)$	[linearmente dipendenti]
22	$\vec{a}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$	$\vec{b}(0, 1, -1)$	$\vec{c}\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$	[linearmente indipendenti]
23	$\vec{a}(0, -1, -2)$	$\vec{b}(1, 0, -1)$	$\vec{c}(2, 1, 1)$	[linearmente indipendenti]
24	$\vec{a}(1, 1, -2)$	$\vec{b}(3, 2, -4)$	$\vec{c}(-2, -2, 4)$	[linearmente dipendenti]
25	$\vec{u}(1, 1, 0)$,	$\vec{v}(2, 4, 0)$	$\vec{w}(1, -2, 1)$	[linearmente indipendenti]
26	$\vec{a}(4, 0, 3)$	$\vec{b}(1, 1, 1)$	$\vec{c}(-2, 1, 2)$	[linearmente indipendenti]
27	$\vec{u}(0, 2, 1)$	$\vec{v}(-1, 2, 0)$	$\vec{w}(-1, 0, 1)$	[linearmente indipendenti]

Soluzioni esercizi di comprensione

1 **a.** **2** **a.** **3** **c.** **4** **b.**