Concetti chiave e regole

I numeri naturali

I numeri naturali sono quelli della successione 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...
L'insieme dei numeri naturali si indica con N, l'insieme dei numeri naturali privato dello zero si indica con N_0.
Le operazioni interne a N sono solo l'addizione e la moltiplicazione, mentre la sottrazione è possibile solo se il primo numero è maggiore del secondo, la divisione è possibile solo se il primo numero è multiplo del secondo.
L'addizione e la moltiplicazione sono:

- commutative: $a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$
- associative: $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- inoltre vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Le potenze e le proprietà delle potenze

La potenza a^n, con n numero naturale maggiore di 1, equivale al prodotto $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$.

Si definisce poi $a^1 = a$ e $a^0 = 1$, mentre non ha significato la scrittura 0^0

Valgono le seguenti proprietà: • $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ • $a^n : a^m = a^{n-m}$ • $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

La divisibilità in N

Se $c = a \cdot b$ si dice che c è **multiplo** di a secondo b; si dice anche che c è divisibile per a e per b.
Un numero che è divisibile solo per se stesso e per 1 si dice **primo**; due numeri che non hanno divisori comuni oltre all'unità si dicono **primi tra loro**.
Scomporre un numero naturale in fattori primi significa scriverlo come prodotto di soli fattori primi; la scomposizione di un numero in fattori primi è unica.
Il **massimo comun divisore** (M.C.D.) fra due numeri naturali è il più grande fra i divisori comuni ai due numeri; per trovarlo, si scompongono i due numeri e si calcola il prodotto dei soli fattori comuni presi con il minimo esponente.
Il **minimo comune multiplo** (m.c.m.) fra due numeri naturali è il più piccolo fra i multipli comuni ai due numeri; per trovarlo, si scompongono i due numeri e si calcola il prodotto dei fattori comuni e non comuni presi con il massimo esponente.

L'algoritmo euclideo

Per determinare $M.C.D.(a, b)$ si può anche ricorrere:

- al metodo delle sottrazioni successive con $a > b$ (eventualmente scambiare a con b):
  $M.C.D.(a, b) = M.C.D.(a - b, b)$
  il $M.C.D.$ è b quando $a - b = 0$
- al metodo delle divisioni successive: $M.C.D.(a, b) = M.C.D.(b, r)$ dove r è il resto della divisione intera $a : b$
  il $M.C.D.$ è il numero b quando $r = 0$.

I numeri interi

Un **numero intero** si esprime mediante un numero naturale preceduto da un segno $+$ o da un segno $-$. Il segno $+$ indica che il numero intero esprime una quantità che si trova al di sopra di un certo livello di riferimento; il segno $-$ che si trova al di sotto. Il livello di riferimento scelto è lo zero e si dice che i numeri $+1$, $+2$, $+3$, ... sono **interi positivi**, i numeri -1, -2, -3, ... sono **interi negativi**; allo zero non si attribuisce alcun segno.
L'insieme dei numeri interi si indica con la lettera Z, l'insieme degli interi privato dello zero si indica con Z_0.
Se due numeri hanno lo stesso segno si dicono **concordi**, se hanno segno diverso si dicono **discordi**.
Si chiama **valore assoluto** di un numero intero il numero stesso privato del suo segno. Due numeri interi che hanno lo stesso valore assoluto e segni opposti si dicono **opposti**.

Le operazioni in Z

La **somma** di due numeri interi si calcola con la seguente regola:

- se i due numeri sono concordi si sommano i valori assoluti dei due numeri e al risultato si attribuisce il segno comune

- se i due numeri sono discordi si calcola la differenza fra i valori assoluti e al risultato si attribuisce il segno del numero che ha valore assoluto maggiore.

Per esempio: $+3+(+4)=+7$ $\quad(-2)+(-6)=-8$ $\quad+3+(-9)=-6$

La **differenza** tra due numeri interi è la somma del primo con l'opposto del secondo.

Il **prodotto** di due numeri interi è il numero che si ottiene moltiplicando i valori assoluti dei due numeri e attribuendo segno $+$ se i due numeri sono concordi, segno $-$ se i due numeri sono discordi.

Per esempio: $(+6)\cdot(+4)=+24$ $\quad(+2)\cdot(-3)=-6$ $\quad(-8)\cdot(-2)=+16$

La **divisione** non è invece un'operazione interna a Z. Il quoziente tra due numeri interi si può determinare solo se il modulo del dividendo è multiplo del modulo del divisore; in tal caso il segno del quoziente si determina con la stessa regola del prodotto.

Per esempio: $(+12):(-4)=-3$ $\quad(-8):(-2)=+4$ $\quad(-15):(+3)=-5$