APPROFONDIMENTO

La risoluzione dei triangoli

L'applicazione del teorema dei seni e del teorema di Carnot permette di risolvere qualunque triangolo; vediamo qualche semplice esempio.

I esempio: sono noti due angoli e un lato.

La situazione è rappresentata in ***figura 1*** nella quale abbiamo i seguenti dati:

$$\alpha = 60° \qquad \gamma = 45° \qquad b = 15$$

Possiamo subito ricavare la misura del terzo angolo:

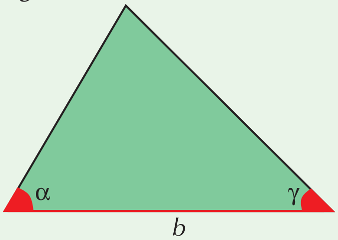
$$\beta = 180° - (60° + 45°) = 75°$$

Per calcolare le misure dei lati dobbiamo individuare il teorema più adatto tra quello dei seni e quello di Carnot; osserviamo che il teorema di Carnot prevede di conoscere le misure di due lati e dell'angolo compreso, quindi non si può applicare in questa situazione. Usiamo allora il teorema dei seni per calcolare le misure dei lati a e c:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \quad \rightarrow \quad \frac{15}{\sin 75°} = \frac{a}{\sin 60°} \quad \rightarrow \quad a = \frac{15 \sin 60°}{\sin 75°} = 13{,}45$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \rightarrow \quad \frac{15}{\sin 75°} = \frac{c}{\sin 45°} \quad \rightarrow \quad c = \frac{15 \sin 45°}{\sin 75°} = 10{,}98$$

Figura 1



Ricordiamo che non è possibile risolvere un triangolo se non è noto almeno un lato.

II esempio: sono noti due lati e l'angolo tra essi compreso

La situazione è rappresentata in ***figura 2*** nella quale abbiamo i seguenti dati:

$$a = 7 \qquad c = 14 \qquad \beta = 50°$$

Il teorema da usare è quello di Carnot per la determinazione del terzo lato:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad \rightarrow \quad b^2 = 49 + 196 - 2 \cdot 7 \cdot 14 \cdot \cos 50° = 119{,}01$$

$$\rightarrow \quad b = \sqrt{119{,}01} = 10{,}91$$

Per calcolare la misura dell'angolo α possiamo applicare ancora il teorema di Carnot oppure il teorema dei seni; di solito, a meno di conoscere già la tipologia del triangolo, cioè se si tratta di un triangolo acutangolo oppure ottusangolo, è preferibile usare il teorema di Carnot che permette di individuare subito di che tipo di triangolo si tratta.

Applichiamo quindi ancora il teorema di Carnot:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \rightarrow$$

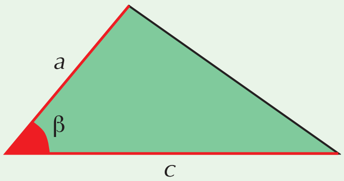
$$\rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{119{,}01 + 196 - 49}{2 \cdot 10{,}91 \cdot 14} = 0{,}870793....$$

Usando la calcolatrice troviamo un valore approssimato di α: $\alpha = 29°26'56''$.

L'ampiezza dell'angolo γ si ottiene per differenza:

$$\gamma = 180° - (50° + 29°26'56'') = 100°33'4''$$

Figura 2



Il coseno di un angolo acuto è positivo, quello di un angolo ottuso è negativo; il seno di un angolo acuto o di un angolo ottuso sono invece entrambi positivi. Trovare per esempio che $\sin\alpha = \frac{1}{3}$*, non permette di sapere se* α *è acuto oppure ottuso, mentre trovare che* $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ *consente di affermare che* α *è ottuso.*

III esempio: sono note le misure dei tre lati

La situazione è rappresentata in ***figura 3*** nella quale abbiamo i seguenti dati:

$$a = 18 \qquad b = 25 \qquad c = 20$$

Osserviamo innanzi tutto che il problema ha soluzione perché le misure dei lati sono tali da soddisfare le disuguaglianze triangolari.
Per determinare la misura di uno degli angoli del triangolo, ad esempio di α, dobbiamo ricorrere al teorema di Carnot:

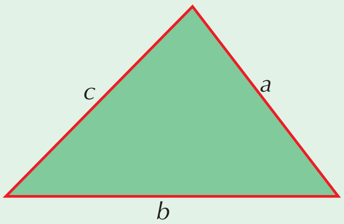
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{625 + 400 - 324}{2 \cdot 25 \cdot 20} = \frac{701}{1\,000}$$

da cui $\quad \alpha = 45°29'34''$.

Per determinare l'angolo β, possiamo usare ancora lo stesso teorema, oppure quello dei seni.

- Col teorema di Carnot: $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{324 + 400 - 625}{2 \cdot 18 \cdot 20} = \dfrac{11}{80}$
  da cui $\beta = 82°5'48''$
- Col teorema dei seni: $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin\alpha} \qquad \sin\beta = \dfrac{b \sin\alpha}{a} = 0{,}9905018$
  da cui $\beta = 82°5'48''$

Figura 3



Disuguaglianze triangolari. *In ogni triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.*

Il vantaggio che si ha nell'usare il teorema di Carnot è che si possono utilizzare i dati del problema; con il teorema dei seni, invece, si deve usare l'angolo α che è necessariamente approssimato.
Calcoliamo poi γ come supplementare della somma degli altri due:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 52°24'38''$$

ESERCIZI

1 E' sempre possibile risolvere un triangolo se sono note le misure di:

a. un lato e l'angolo ad esso opposto — **b.** tre lati
c. due lati e un angolo qualsiasi — **d.** tre angoli
e. un lato e i due angoli ad esso adiacenti — **f.** due lati.

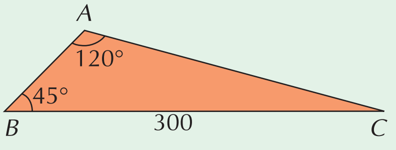
[b., c., e.]

Usando anche la calcolatrice scientifica, risolvi i seguenti triangoli dei quali sono note le misure di due angoli e un lato.

2 **ESERCIZIO GUIDATO**

$a = 300 \qquad \alpha = 120° \qquad \beta = 45°$

Per risolvere il triangolo dobbiamo trovare l'ampiezza dell'angolo γ, la lunghezza del lato b e la lunghezza del lato c. Poiché conosciamo due angoli del triangolo possiamo trovare il terzo



$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (120° + 45°) = 15°$

Per calcolare b, applicando il teorema dei seni, possiamo scrivere:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \qquad \text{da cui} \qquad b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{300 \sin 45°}{\sin 120°} = 100\sqrt{6} = 244{,}95$$

Per calcolare c possiamo applicare il teorema dei seni o il teorema di Carnot.

Con il teorema dei seni: $\dfrac{c}{\sin \gamma} = \dfrac{a}{\sin \alpha} \Rightarrow c = \dfrac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \dfrac{300 \sin 15°}{\sin 120°} = 89{,}66.$

Con il teorema di Carnot:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = \sqrt{300^2 + \left(100\sqrt{6}\right)^2 - 2 \cdot 300 \cdot 100\sqrt{6} \cos 15°} = 89{,}66$$

3 $\alpha = 45°$ $\quad \beta = 60°$ $\quad a = 2\sqrt{2}$ $\quad [\gamma = 75°;\ b = 3{,}46;\ c = 3{,}86]$

4 $\alpha = 75°$ $\quad \gamma = 60°$ $\quad b = 4$ $\quad [\beta = 45°;\ a = 5{,}46;\ c = 4{,}90]$

5 $\beta = 75°$ $\quad \alpha = 45°$ $\quad a = 4\sqrt{3}$ $\quad [\gamma = 60°;\ b = 9{,}46;\ c = 8{,}49]$

6 $\alpha = 88°$ $\quad \gamma = 33°20'$ $\quad c = 172{,}78$ $\quad [\beta = 58°40';\ a = 314{,}23;\ b = 268{,}57]$

7 $\alpha = 60°58'$ $\quad \gamma = 82°40'$ $\quad a = 7{,}6$ $\quad [\beta = 36°22';\ b = 5{,}2;\ c = 8{,}7]$

8 $\alpha = 30°55'$ $\quad \gamma = 76°20'$ $\quad b = 28{,}6$ $\quad [\beta = 72°45';\ a = 15{,}39;\ c = 29{,}10]$

9 $\gamma = 7°43'$ $\quad \beta = 15°13'$ $\quad c = 53{,}94$ $\quad [\alpha = 157°4';\ a = 156{,}53;\ b = 105{,}44]$

10 $\alpha = 30°42'$ $\quad \beta = 113°18'$ $\quad c = 13{,}9$ $\quad [a = 12{,}07;\ b = 21{,}72;\ \gamma = 36°]$

Usando anche la calcolatrice scientifica, risolvi i seguenti triangoli dei quali sono note le misure di due lati e dell'angolo fra essi compreso.

11 **ESERCIZIO GUIDATO**

$a = 15$ $\quad b = 18{,}4$ $\quad \gamma = 72°20'$

In base al teorema di Carnot puoi scrivere: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ cioè $c = ...$

Dal teorema di Carnot puoi ricavare anche la misura dell'angolo β : $\cos \beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}$

da cui $\cos \beta = ...$ cioè $\beta = ...$

Allora $\alpha = ...$ $\quad [c = 19{,}9;\ \alpha = 45°54'20'';\ \beta = 61°45'40]$

12 $b = 14{,}9$ $\quad c = 11{,}1$ $\quad \alpha = 47°10'$ $\quad [a = 10{,}97;\ \beta = 84°55'38'';\ \gamma = 47°54'22'']$

13 $b = 42{,}21$ $\quad c = 18{,}96$ $\quad \alpha = 28°38'$ $\quad [a = 27{,}13;\ \beta = 131°48'16'';\ \gamma = 19°33'44'']$

14 $b = 12{,}9$ $\quad a = 24{,}31$ $\quad \gamma = 112°30'$ $\quad [c = 31{,}58;\ \alpha = 45°19'44'';\ \beta = 22°10'16'']$

15 $b = 2{,}85$ $\quad a = 1{,}54$ $\quad \gamma = 76°20'$ $\quad [c = 2{,}90;\ \alpha = 31°2'37'';\ \beta = 72°37'23'']$

16 $a = 15{,}46$ $\quad c = 20{,}45$ $\quad \beta = 74°27'$ $\quad [b = 22{,}08;\ \alpha = 42°24'36'';\ \gamma = 63°8'24'']$

17 $a = 8{,}5$ $\quad c = 11{,}2$ $\quad \beta = 32°16'$ $\quad [b = 6{,}06;\ \alpha = 48°30'53'';\ \gamma = 99°13'7'']$

Usando anche la calcolatrice scientifica, risolvi i seguenti triangoli dei quali sono note le misure dei tre lati.

18 **ESERCIZIO GUIDATO**

$a = 10$ $b = 15$ $c = 8$

Conoscendo b e c applicando il teorema di Carnot ricavi che:

$\cos\alpha = ...$ da cui $\alpha = ...$

Per determinare la misura di β puoi ricorrere ancora al teorema di Carnot oppure usare il teorema dei seni. Infine $\gamma = ...$ $[\alpha = 38°2'51''; \beta = 112°24'40; \gamma = 29°32'29]$

19 $a = 5{,}6$ $b = 3{,}5$ $c = 4{,}7$ $[\alpha = 84°48'11''; \beta = 38°29'38''; \gamma = 56°42'11'']$

20 $a = 42$ $b = 31$ $c = 44{,}6$ $[\alpha = 64°35'54''; \beta = 41°48'57''; \gamma = 73°35'9'']$

21 $a = \sqrt{3}$ $b = 1$ $c = 2$ $[\alpha = 60°; \beta = 30°; \gamma = 90°]$

22 $a = 39{,}7$ $b = 159$ $c = 124{,}9$ $[\alpha = 8°16'21''; \beta = 144°48'24''; \gamma = 26°54'54'']$

23 $a = 91{,}3$ $b = 73$ $c = 89$ $[\alpha = 67°46'40''; \beta = 47°44'47''; \gamma = 64°28'33'']$