Attivita' di recupero

Cap 1. MONOMI E POLINOMI

Rivedi la teoria

Le espressioni algebriche

In un'espressione algebrica ci possono essere numeri noti e numeri dei quali non si conosce a priori il valore e che per questo vengono rappresentati da lettere; per esempio:

$$\frac{3}{4}a^3b^2x \qquad a^2 - 3ab + 4 \qquad \frac{1}{x+1} + \frac{x-5}{x-3}$$

Si parla in questi casi di **espressioni algebriche letterali**.
Il valore numerico di un'espressione letterale dipende da quello che si attribuisce di volta in volta alle sue lettere; per questo si è soliti indicarla con una scrittura che mette in evidenza questa dipendenza; relativamente alle precedenti espressioni si scrive:

$$A(a,\ b,\ x) = \frac{3}{4}a^3b^2x \qquad P(a,\ b) = a^2 - 3ab + 4 \qquad F(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x-5}{x-3}$$

ed è per esempio:

$A(1,\ 2,\ -1) = \frac{3}{4} \cdot 1^3 \cdot 2^2 \cdot (-1) = -3$ cioè a vale 1, b vale 2, x vale -1

$P(1,\ -3) = 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot (-3) + 4 = 14$ cioè a vale 1, b vale -3

$F\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+1} + \dfrac{\frac{1}{2}-5}{\frac{1}{2}-3} = \frac{2}{3} + \left(-\frac{9}{2}\right) : \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{37}{15}$ cioè x vale $\frac{1}{2}$

Nell'attribuire valori numerici alle lettere, bisogna fare in modo che le operazioni non perdano di significato; se ci riferiamo ancora alle precedenti espressioni:

- alle lettere a, b, x dell'espressione A si può attribuire qualunque numero reale
- alle lettere a, b dell'espressione P si può attribuire qualunque numero reale
- alla lettera x dell'espressione F non si possono attribuire i valori -1 e 3 perchè in questi due casi i denominatori delle frazioni diventano nulli e sappiamo che non si può eseguire la divisione per zero.

I monomi

Un'espressione algebrica letterale si chiama in modo diverso a seconda delle operazioni che si eseguono fra le sue lettere. Si parla di **monomio** quando ci sono solo operazioni di moltiplicazione e, quindi, gli esponenti delle lettere devono essere tutti numeri positivi. Per esempio:

- sono monomi: $3ax^2 \qquad -\frac{1}{2}xy \qquad \frac{4}{5}a^3x^3y$
- non sono monomi: $2a + x \qquad \frac{3a}{4b^2} \qquad \frac{1}{3}bx^{-2}$

Ogni monomio ha un coefficiente numerico e una parte letterale e di esso si possono definire il grado complessivo e il grado rispetto ad ogni sua lettera; prendendo ad esempio il monomio $5a^3bx^2$ abbiamo che:

- il coefficiente numerico è 5
- la parte letterale è a^3bx^2
- il grado complessivo, che è la somma dei gradi delle sue lettere, è $3+1+2=6$
- il grado rispetto alla lettera a è 3, rispetto alla lettera b è 1, rispetto alla lettera x è 2.

Tutte le lettere che non compaiono hanno grado zero, quindi il monomio precedente è di grado zero per esempio rispetto alla lettera y. Diciamo inoltre che:

- due monomi come $-3ab$ e $+3ab$ sono **opposti** perché hanno la stessa parte letterale e coefficienti opposti.
- due monomi come $+7xy^2$ e $+\frac{1}{5}xy^2$ sono **simili** perché hanno la stessa parte letterale.

Attenzione a non commettere errori: due monomi come $+2ab^2x$ e $-4a^2bx$ non sono simili perché le parti letterali, pur avendo le stesse lettere, non sono uguali.

La somma algebrica fra monomi

Le operazioni di **addizione** e **sottrazione** si possono eseguire solo se i monomi sono simili; in tal caso si ottiene come risultato un monomio simile a quelli dati che ha come coefficiente numerico rispettivamente la somma o la differenza dei coefficienti dei monomi dati. Per esempio:

- $\frac{3}{4}x^2y+\frac{1}{6}x^2y=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)x^2y=\frac{11}{12}x^2y$
- $2a^2-\frac{5}{2}a^2=\left(2-\frac{5}{2}\right)a^2=-\frac{1}{2}a^2$

Due monomi che non sono simili non si possono sommare o sottrarre e l'operazione si lascia indicata; per esempio:

$$\frac{2}{3}ax^2-\frac{1}{2}ax \qquad\qquad \frac{4}{5}a^3+a^2$$

Il prodotto fra monomi

L'operazione di **moltiplicazione** fra due monomi si può sempre eseguire e il prodotto è un monomio che ha:

- come coefficiente numerico il prodotto dei coefficienti
- come parte letterale quella che si ottiene applicando le proprietà delle potenze e sommando quindi gli esponenti delle lettere uguali.

Per esempio, il prodotto $\frac{3}{4}a^2bx^2\cdot\left(-\frac{2}{9}b^2x^3\right)$ ha:

- come coefficiente numerico: $\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)=-\frac{1}{6}$
- come parte letterale: $(a^2bx^2)\cdot(b^2x^3)=a^2b^{1+2}x^{2+3}=a^2b^3x^5$

In definitiva: $\frac{3}{4}a^2bx^2\cdot\left(-\frac{2}{9}b^2x^3\right)=-\frac{1}{6}a^2b^3x^5$

L'**elevamento a potenza** si esegue applicando le proprietà delle potenze; quindi:

- si eleva a potenza il coefficiente numerico
- si moltiplica l'esponente di ciascuna lettera per la potenza indicata.

Per esempio:

- $\left(+\frac{2}{3}a^2b^3x\right)^2 = \left(+\frac{2}{3}\right)^2 a^{2\cdot 2}b^{3\cdot 2}x^{1\cdot 2} = +\frac{4}{9}a^4b^6x^2$
- $\left(-\frac{1}{2}b^3xy^2\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 b^{3\cdot 3}x^{1\cdot 3}y^{2\cdot 3} = -\frac{1}{8}b^9x^3y^6$

La divisione fra monomi

L'operazione di **divisione** si può eseguire solo se gli esponenti delle lettere del primo monomio sono maggiori o uguali degli esponenti delle stesse lettere del secondo monomio; in tal caso il monomio che si ottiene ha:

- come coefficiente numerico il quoziente dei coefficienti
- come parte letterale quella che si ottiene applicando le proprietà delle potenze, quindi sottraendo gli esponenti delle lettere uguali.

Per esempio, il quoziente $\left(-\frac{5}{6}x^3y^5\right) : \left(-\frac{10}{9}xy^3\right)$ si calcola in questo modo:

- coefficiente numerico: $\left(-\frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{10}{9}\right) = \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \left(-\frac{9}{10}\right) = +\frac{3}{4}$
- parte letterale: $(x^3y^5) : (xy^3) = x^{3-1}y^{5-3} = x^2y^2$

In definitiva: $\left(-\frac{5}{6}x^3y^5\right) : \left(-\frac{10}{9}xy^3\right) = +\frac{3}{4}x^2y^2$

Se non si verifica l'ipotesi precedente, quello che si ottiene come risultato della divisione non è più un monomio; per esempio:

$$(+5a^2b) : \left(-\frac{1}{2}a^3b\right) = 5 \cdot (-2)a^{2-3}b^{1-1} = -10a^{-1} = -\frac{10}{a}$$

Quando il quoziente fra due monomi è ancora un monomio, si dice che il primo è **divisibile** per il secondo.

Fai gli esercizi

1 Stabilisci in quali fra i casi presentati le espressioni date hanno significato e calcolane successivamente il valore numerico:

① $A(b,\ c) = \frac{3b+c}{5}$ **a.** $b = 3,\ c = -1$ **b.** $b = 0,\ c = -4$ **c.** $b = -2,\ c = 1$ $\left[\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, -1\right]$

② $B(x) = \frac{3x}{x-1}$ **a.** $x = 0$ **b.** $x = -1$ **c.** $x = 1$ $\left[0, \frac{3}{2}, \text{imp.}\right]$

③ $C(x,\ y) = \frac{x^2-y^2}{2x-y}$ **a.** $x = 1,\ y = -3$ **b.** $x = 3,\ y = 6$ **c.** $x = 0,\ y = \frac{1}{2}$ $\left[-\frac{8}{5}, \text{imp.}, \frac{1}{2}\right]$

2 Dei seguenti monomi indica il coefficiente numerico, la parte letterale, il grado complessivo ed il grado rispetto ad ogni lettera:

a. $-3x^3y$ **b.** $\frac{3}{7}x^3y^4x$ **c.** $2ab^2c$ **d.** $-b^3x^3y$

3 Determina fra i seguenti quali sono i monomi simili:

a. $\frac{1}{2}a^3b^4$ $-\frac{1}{3}x^2y$ $\frac{4}{5}b^3a^4$ $-\frac{1}{8}x^2y$ $3yx^2$

b. $\frac{1}{2}b^3$ $4a^3b^4$ $-b^3$ $\frac{1}{10}a^3b^4$ $8a^4b^3$

Semplifica le seguenti espressioni nelle quali compaiono solo addizioni e sottrazioni fra monomi.

4 $5ax - \left[2ax + (3ax - ax) - \frac{1}{2}ax\right] - (3ax + ax - 6ax)$ $\left[\frac{7}{2}ax\right]$

5 $\frac{1}{2}x^2 - \left\{-\left[-2x^2 - \left(x^2 - \frac{3}{4}x^2\right) + x^2\right] - \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2\right)\right\}$ $\left[-\frac{1}{4}x^2\right]$

6 $a^2b - \left[-\left(2a^2b - \frac{1}{2}a^2b\right) + \frac{3}{4}a^2b - (a^2b - 3a^2b)\right]$ $\left[-\frac{1}{4}a^2b\right]$

7 $6xy^2 + \left\{-\left(\frac{3}{4}xy^2 - \frac{1}{2}xy^2\right) - \left[2xy^2 - \left(xy^2 + \frac{1}{4}xy^2\right) + 4xy^2\right]\right\}$ $[xy^2]$

8 $\frac{1}{8}b^2y^2 - \left[\frac{1}{2}b^2y^2 - \left(\frac{3}{4}b^2y^2 - \frac{5}{4}b^2y^2 + b^2y^2\right)\right] - \left(\frac{3}{2}b^2y^2 - \frac{5}{4}b^2y^2\right)$ $\left[-\frac{1}{8}b^2y^2\right]$

9 Esegui le seguenti moltiplicazioni:

a. $\left(-\frac{1}{2}a^3x^2y\right) \cdot \left(+\frac{4}{5}a^2y^2\right)$; $\left(+\frac{1}{8}x^2y^2z^3\right) \cdot \left(+\frac{12}{5}xy^4\right)$ $\left[-\frac{2}{5}a^5x^2y^3;\ \frac{3}{10}x^3y^6z^3\right]$

b. $(+5a^2b^5) \cdot \left(-\frac{3}{10}a^3b\right)$; $\left(-\frac{1}{3}x^3y\right) \cdot \left(+\frac{1}{9}x^2y^4\right)$ $\left[-\frac{3}{2}a^5b^6;\ -\frac{1}{27}x^5y^5\right]$

c. $(-b^2y^6z) \cdot \left(-\frac{4}{5}b^3z^2\right)$; $\left(-\frac{2}{5}x^2z^3\right) \cdot \left(+\frac{5}{8}ax^3z\right)$ $\left[\frac{4}{5}b^5y^6z^3;\ -\frac{1}{4}ax^5z^4\right]$

10 Esegui le seguenti potenze di monomi:

a. $\left(+\frac{1}{2}a^3b^2\right)^2$; $\left(-\frac{1}{4}a^2b\right)^3$; $(-2a^4bx^2)^4$ $\left[\frac{1}{4}a^6b^4;\ -\frac{1}{64}a^6b^3;\ 16a^{16}b^4x^8\right]$

b. $\left(-\frac{1}{6}b^2y^3\right)^3$; $\left(+\frac{2}{3}x^3y^4\right)^4$; $(-a^2xy^3)^5$ $\left[-\frac{1}{216}b^6y^9;\ \frac{16}{81}x^{12}y^{16};\ -a^{10}x^5y^{15}\right]$

11 Esegui le seguenti divisioni stabilendo in quali casi il primo monomio è divisibile per il secondo:

a. $\left(-\frac{3}{5}a^3b^4z^2\right) : \left(-\frac{1}{10}a^3bz\right)$; $\left(+\frac{1}{6}a^2b^2x^2\right) : \left(-\frac{1}{3}ab^2x^2\right)$ $\left[6b^3z;\ -\frac{1}{2}a\right]$

b. $(+6ax^4y^5) : \left(+\frac{1}{3}ax^3\right)$; $(+12x^3y^4) : (-6x^2)$ $[18xy^5;\ -2xy^4]$

c. $(-15a^5b^2) : \left(-\frac{5}{2}a^3b\right)$; $\left(-\frac{4}{5}x^3y^2z\right) : \left(+\frac{8}{3}x^4\right)$ $\left[6a^2b;\ -\frac{3}{10}x^{-1}y^2z \text{ non è un monomio}\right]$

Semplifica le seguenti espressioni.

12 $\left(-\frac{4}{5}x^3y^2\right) \cdot \left(-\frac{10}{3}a^2x\right) : \left(+\frac{4}{3}axy\right)$ $[2ax^3y]$

13 $\left(+\frac{2}{3}a^2b\right) \cdot \left(-\frac{6}{7}a^3x^3\right) : \left(+\frac{2}{21}a^5b\right)$ $[-6x^3]$

14 $\frac{3}{8}a^2y \cdot \left(\frac{5}{2}a - \frac{11}{6}a\right) - \left(ay - \frac{2}{7}ay\right)\left(-\frac{3}{5}a^2 + 2a^2 - \frac{7}{4}a^2\right)$ $\left[\frac{1}{2}a^3y\right]$

15 $\frac{5}{2}xy^2 - \left(\frac{4}{5}xy^2 + \frac{1}{10}xy^2 - xy^2\right) + \left(-\frac{1}{4}xy^2 - \frac{3}{2}xy^2\right)$ $\left[\frac{17}{20}xy^2\right]$

16 $-\left(\frac{2}{3}a^2b^3 - \frac{1}{6}a^2b^3\right) - \left[-\left(a^2b^3 + \frac{2}{3}a^2b^3\right) + 2a^2b^3\right] - a^2b^3$ $\left[-\frac{11}{6}a^2b^3\right]$

17 $\left(-\frac{1}{2}b^4y^3+\frac{4}{3}b^4y^3\right):\left(\frac{3}{4}by-\frac{1}{8}by\right):\left(\frac{5}{6}by-\frac{1}{3}by\right)$ $\left[\frac{8}{3}b^2y\right]$

18 $\left[\left(-\frac{5}{2}x^2yz^2\right)^2:\left(+\frac{15}{2}xy^2z\right)\right]^2-\left[\left(-\frac{1}{3}xz\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{2}xz\right)\right]^2$ $\left[\frac{2}{3}x^6z^6\right]$

19 $\left[-3x^2y\cdot\left(-\frac{5}{9}x^2y^2\right)\cdot\left(+\frac{1}{5}x^2y\right)\right]:\left[(-x^2y)\cdot(+2x^3y)\cdot\left(-\frac{2}{9}xy\right)\right]$ $\left[\frac{3}{4}y\right]$

20 $\left[-\left(-\frac{1}{2}a^2+a^2\right)+\frac{5}{4}a^2\right]^2:\left(-\frac{3}{2}a+a\right)^3+\left[\left(3a-\frac{1}{4}a\right)\cdot\left(a^2+\frac{1}{2}a^2\right)\right]:\left(-\frac{11}{4}a^2\right)$ $[-6a]$

21 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcola il *M.C.D.* e il *m.c.m.* fra i monomi $2a^2by$ $4ab^2$ $12a^3x$.

Le regole sono del tutto analoghe a quelle imparate per il *M.C.D.* e *m.c.m.* fra numeri interi.
Il *M.C.D.* si calcola prendendo solo le lettere comuni a tutti i monomi con l'esponente più piccolo.
Il *m.c.m.* si calcola prendendo sia le lettere comuni che quelle non comuni con l'esponente più grande.
Si assume come coefficiente numerico 1 se i coefficienti sono frazioni, il *M.C.D.* o il *m.c.m.* fra i coefficienti se questi sono interi. Il segno si assume sempre positivo.
Nel nostro caso si ha che:

- *M.C.D.*$(2, 4, 12) = 2$
  la sola lettera comune è a e l'esponente più piccolo con cui compare è 1
  quindi *M.C.D.*$(2a^2by, 4ab^2, 12a^3x) = 2a$
- *m.c.m.*$(2, 4, 12) = 12$
  le lettere si devono prendere tutte con l'esponente più alto, cioè a con esponente 3, b con esponente 2, x e y con esponente 1
  quindi *m.c.m.*$(2a^2by, 4ab^2, 12a^3x) = 12a^3b^2xy$

22 Calcola *M.C.D.* e *m.c.m.* fra i seguenti gruppi di monomi:

a. $\frac{3}{5}xy;$ $8x^2;$ ay^3 $[M.C.D. = 1,\ m.c.m. = ax^2y^3]$

b. $3ax^2;$ $2ax;$ $-6a^2y$ $[M.C.D. = a,\ m.c.m. = 6a^2x^2y]$

c. $\frac{1}{2}x^2y^3;$ $-\frac{3}{4}x;$ $\frac{3}{5}x^2y^2$ $[M.C.D. = x,\ m.c.m. = x^2y^3]$

Rivedi la teoria

I polinomi

Un polinomio è la somma algebrica di più monomi e, se in esso sono stati sommati tutti i monomi simili, si dice che il polinomio è ridotto in **forma normale**. Ad esempio

$2a-3b+4a-b^2$ ha forma normale $6a-3b-b^2$

$\frac{1}{2}x^2-3a^3x+x^2+a^3x$ ha forma normale $\frac{3}{2}x^2-2a^3x$

Il **grado complessivo** di un polinomio è il massimo dei gradi dei monomi che lo formano; i due polinomi precedenti hanno rispettivamente grado complessivo 2 e 4.

Un polinomio si dice poi **omogeneo** se tutti i suoi monomi sono dello stesso grado; ad esempio

$$5a^3 - 3a^2b + ab^2 - 4b^3$$

è un polinomio omogeneo di terzo grado. Tale polinomio è anche **ordinato** secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b ed è **completo** rispetto a ciascuna lettera perché sia di a che di b compaiono tutte le potenze da quella di grado 0 a quella di grado 3.

La somma algebrica fra polinomi

Se un'espressione algebrica contiene solo **addizioni o sottrazioni** di polinomi, per semplificarla basta togliere le parentesi ricordando che un segno + davanti ad una parentesi non cambia i segni dei monomi da essa racchiusi, mentre un segno − li fa cambiare tutti; ad esempio:

$$\left(5x^2 - 3y + 2\right) - \left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right) + x^2 - \left(\frac{1}{3}y + 4\right) = \underline{5x^2} - \underline{3y} + \underline{2} - \underline{\frac{1}{3}x^2} + \underline{1} + \underline{x^2} - \underline{\frac{1}{3}y} - \underline{4} = \frac{17}{3}x^2 - \frac{10}{3}y - 1$$

La moltiplicazione di un polinomio per un monomio

Per calcolare il **prodotto di un polinomio per un monomio** si applica la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione; ad esempio:

- $x \cdot (2x + y) = x \cdot 2x + x \cdot y = 2x^2 + xy$
- $-3a\left(\frac{1}{9}a - \frac{2}{3}a^2x + 1\right) = -\frac{1}{3}a^2 + 2a^3x - 3a$

La divisione di un polinomio per un monomio

Per eseguire la **divisione di un polinomio per un monomio** si divide ciascun termine del polinomio per il monomio dato; ad esempio

- $\left(4x^2y - 6xy^2\right) : 2xy = 4x^2y : 2xy - 6xy^2 : 2xy = 2x - 3y$
- $\left(5a^3b^2 - 4a^2b^2 + \frac{1}{2}a^2b^3\right) : \left(-a^2b^2\right) = 5a^3b^2 : \left(-a^2b^2\right) - 4a^2b^2 : \left(-a^2b^2\right) + \frac{1}{2}a^2b^3 : \left(-a^2b^2\right) =$

  $= -5a + 4 - \frac{1}{2}b$

Il raccoglimento a fattor comune

Leggendo in senso inverso l'operazione di moltiplicazione di un polinomio per un monomio si esegue quello che si dice un **raccoglimento a fattor comune**. Vale a dire che, se i termini di un polinomio P hanno un $M.C.D.$ diverso da 1, che indichiamo con M, si può eseguire la divisione del polinomio P per M e scrivere poi P come prodotto del quoziente ottenuto per M. Per esempio:

$$4a^2b - 8ab^2 + 16ab$$

il $M.C.D.$ fra i termini del polinomio è $4ab$, quindi, poichè $(4a^2b - 8ab^2 + 16ab) : 4ab = a - 2b + 4$, si può scrivere che:

$$4a^2b - 8ab^2 + 16ab = 4ab \cdot (a - 2b + 4)$$

Quando i coefficienti dei monomi sono frazionari è possibile che si possa raccogliere anche un coefficiente numerico diverso da 1; per esempio

$$\frac{3}{4}a^2b - \frac{1}{2}ab^2 + \frac{5}{6}ab = \frac{1}{2}ab\left(\frac{3}{2}a - b + \frac{5}{3}\right)$$

Fai gli esercizi

23 Individua le caratteristiche dei seguenti polinomi (grado, se sono ordinati, se sono completi rispetto a qualche lettera, se sono omogenei):

a. $3b^3 - 2b^2 + b - 7$ **b.** $a^3 - a^2b + 4ab^2 + b^3$ **c.** $4ax + 3x^2b - x^3$ **d.** $x^2y^2 - 3xy^3 + y^4$

Semplifica le seguenti espressioni che contengono solo addizioni e sottrazioni di polinomi.

24 $-(a-4b) + (2a+b)$ $[a + 5b]$

25 $+(7x^2 - 3y) - (4x^2 - y)$ $[3x^2 - 2y]$

26 $(x^2 - y^2) + (3xy - 2) - (x^2 - 2xy - 4)$ $[5xy - y^2 + 2]$

27 $\left(4b^3 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}a^2 - b^3 + \frac{1}{4}\right) - (a^2 - 5b^3)$ $\left[10b^3 - \frac{5}{4}a^2 - \frac{3}{4}\right]$

28 $\left[\frac{2}{3}a^2b - \left(-\frac{1}{4}ab^3 + \frac{2}{5}a^4\right)\right] - \left[\frac{3}{5}a^4 - \left(\frac{3}{4}ab^3 - \frac{1}{3}a^2b\right)\right]$ $\left[\frac{1}{3}a^2b + ab^3 - a^4\right]$

29 $2x^2 - \left\{-\left[3ax + x^2 - \left(2ax - \frac{1}{2}x^2\right)\right] - \left(-2ax - \frac{1}{2}x^2\right)\right\}$ $[3x^2 - ax]$

Semplifica le seguenti espressioni che contengono anche moltiplicazioni e divisioni di un polinomio per un monomio.

30 $(2xy - 3x^2 + 3) \cdot (-4x)$ $(x^3 + 6x^2 - 8x + 4) \cdot \left(\frac{3}{2}x^3\right)$ $\left[-8x^2y + 12x^3 - 12x;\ \frac{3}{2}x^6 + 9x^5 - 12x^4 + 6x^3\right]$

31 $(2a^4 + 9a^3 + 2a^2 + 1) \cdot (-3a^2)$ $\left(\frac{1}{3}a^4b^3 - \frac{1}{9}a^3b^2\right) \cdot (3a^2)$ $\left[-6a^6 - 27a^5 - 6a^4 - 3a^2;\ a^6b^3 - \frac{1}{3}a^5b^2\right]$

32 $(6a^2b + 3b^2) : (3b)$ $(25x^3z - 15x^2z + 20xz) : (5xz)$ $[2a^2 + b;\ 5x^2 - 3x + 4]$

33 $\left(\frac{1}{3}ax^3y^3 - 2a^4x^2y + \frac{1}{9}a^2x^3y^2\right) : \left(+\frac{1}{6}ax^2y\right)$ $\left[2xy^2 - 12a^3 + \frac{2}{3}axy\right]$

34 $\left(\frac{1}{2}a^3x^3 - \frac{3}{4}a^2x^2 + \frac{1}{6}a^2x\right) : \left(-\frac{1}{2}a^2x\right)$ $\left[-ax^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}\right]$

35 $\left(-a^3b + \frac{1}{2}ab^2 - 4a^2b^3\right) : \left(-\frac{1}{2}ab\right)$ $[2a^2 - b + 8ab^2]$

36 $\left(2x^4y - 8x^2y^2 + 6x^3y^4 - 4x^3y^2\right) : \left(-\frac{1}{3}x^2y\right)$ $[-6x^2 + 24y - 18xy^3 + 12xy]$

37 $\left(\frac{4}{5}a^2b^3x^2 - \frac{1}{2}ab^2x^4 + \frac{1}{6}a^3bx^2 - \frac{2}{5}a^2bx^3\right) : \left(\frac{3}{10}abx^2\right)$ $\left[\frac{8}{3}ab^2 - \frac{5}{3}bx^2 + \frac{5}{9}a^2 - \frac{4}{3}ax\right]$

Applica la proprietà di raccoglimento ai seguenti polinomi.

38 $5x^3y^2 - 15x^4y^3$ $2x^4y - 2xy - 8x^2y^2$ $[5x^3y^2(1 - 3xy);\ 2xy(x^3 - 1 - 4xy)]$

39 $\frac{1}{3}a^4b^5 + \frac{1}{2}a^2b^3 - 4a^3b^2$ $\frac{7}{4}a^3b - \frac{21}{2}a^5 + \frac{35}{2}a^3c$ $\left[a^2b^2\left(\frac{1}{3}a^2b^3 + \frac{1}{2}b - 4a\right);\ \frac{7}{2}a^3\left(\frac{1}{2}b - 3a^2 + 5c\right)\right]$

40 $4a^3b^2 + 8ab^3 - 6a^2b$ $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}ax^3 + \frac{5}{9}a^2x$ $\left[2ab(2a^2b + 4b^2 - 3a);\ \frac{1}{3}x\left(x - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{5}{3}a^2\right)\right]$

Rivedi la teoria

La moltiplicazione fra polinomi

Il **prodotto di due polinomi** si calcola applicando la proprietà distributiva; vale a dire che si moltiplica ciascun termine del primo polinomio per tutti quelli del secondo e si sommano i monomi simili eventualmente ottenuti.
Per esempio:

- $(a - 3x)(2a - x^2) = 2a^2 - ax^2 - 6ax + 3x^3$

- $(a^2 + a - 3)(2a + 1) = 2a^3 + \underline{\underline{2a^2}} - \underline{6a} + \underline{\underline{a^2}} + \underline{a} - 3 = 2a^3 + 3a^2 - 5a - 3$

I prodotti notevoli

I **prodotti notevoli** esprimono delle regole per eseguire in modo abbreviato potenze di polinomi o prodotti particolari. Ricordiamo queste regole.

■ $(a + b)^2 = \underbrace{a^2 + b^2}_{\text{i due quadrati}} + \underbrace{2ab}_{\text{il doppio prodotto}}$

Ad esempio:

- $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y = 4x^2 + 9y^2 + 12xy$
- $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 = a^2 + \left(-\frac{1}{2}b\right)^2 + 2 \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}b\right) = a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ab$

■ $(a + b + c)^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{\text{i tre quadrati}} + \underbrace{2ab + 2ac + 2bc}_{\text{i doppi prodotti}}$

Ad esempio:

- $(a + b - 3)^2 = a^2 + b^2 + 9 + 2ab - 6a - 6b$
- $(2x - x^2 - y)^2 = 4x^2 + x^4 + y^2 - 4x^3 - 4xy + 2x^2y$

■ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ad esempio:

- $(2x - b)(2x + b) = 4x^2 - b^2$
- $\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y^2\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y^2\right) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{16}y^4$
- $(-5 + 3x)(-5 - 3x) = 25 - 9x^2$

■ $(a + b)^3 = \underbrace{a^3 + b^3}_{\text{i due cubi}} + \underbrace{3a^2b + 3ab^2}_{\text{i due tripli prodotti}}$

Ad esempio:

- $(x + 2)^3 = x^3 + 2^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 = x^3 + 8 + 6x^2 + 12x$
- $(2a - b)^3 = (2a)^3 + (-b)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot (-b) + 3 \cdot (2a) \cdot (-b)^2 = 8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

Fai gli esercizi

Esegui i seguenti prodotti di polinomi.

41 **a.** $(3x+1)(-2x+3)$; **b.** $(2a-3x)(3a+5x^2)$

42 **a.** $(x-a)(a-b+7)$; **b.** $(2x-3y)(-x^2+2xy+b^2)$

43 **a.** $(a-3b+1)(a^2-3b^2)$; **b.** $(7-2a)(2+4a+b)$

44 **a.** $(a-2b+c)(a+b-c)$; **b.** $(3a+2-x)(-2a+1+x)$

45 **a.** $2a(a-b)(2a+3b)$; **b.** $(2-b)(b+3)(b-1)$

46 **a.** $(3a-b)(a+b)(2b-1)$; **b.** $(a+3b)(a-1)(b+1)$

Semplifica le seguenti espressioni.

47 $(2a+b)(3a-b)+(a-b)(2a+4b)$ $[8a^2+3ab-5b^2]$

48 $(a^2-3)(a^2+4)-(a^2+1)(a^2-2)-a^2(a^2-1)$ $[-a^4+3a^2-10]$

49 $(2x+b)(-3x+b+2)-(x+2b)(4x-3b+1)$ $[-10x^2-6bx+3x+7b^2]$

50 $-\dfrac{1}{2}x^2(2x-4y-3)+2x^2\left(3x-\dfrac{1}{4}y+\dfrac{1}{2}\right)$ $\left[5x^3+\dfrac{3}{2}x^2y+\dfrac{5}{2}x^2\right]$

51 $\dfrac{1}{3}xy^3(-6x^2y-12x^4y)+2x^3y^4(1+2x^2)$ $[0]$

52 $\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{5}y\right)\left(x-\dfrac{1}{2}y\right)+2(x+y)\left(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}y\right)-\dfrac{11}{10}y\left(\dfrac{1}{3}x-y\right)$ $\left[\dfrac{13}{6}x^2\right]$

53 $\left[(2a+3b)(a-b)+\dfrac{1}{2}(2a+b)(a-4b-1)+\dfrac{1}{2}b(5a+10b+1)\right]:\left(-\dfrac{2}{3}a\right)$ $\left[\dfrac{3}{2}-\dfrac{9}{2}a\right]$

Sviluppa i seguenti quadrati di binomi e trinomi.

54 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\left(2a-\frac{3}{4}x\right)^2$$

quadrato del primo termine: $+4a^2$

doppio prodotto: $+2\cdot(2a)\cdot\left(-\dfrac{3}{4}x\right)$

quadrato del secondo termine: $+\dfrac{9}{16}x^2$

In definitiva: $\left(2a-\dfrac{3}{4}x\right)^2=4a^2-3ax+\dfrac{9}{16}x^2$

55 $(x+2y)^2$; $(3a-b)^2$; $(-a+3)^2$

56 $\left(2b+\dfrac{1}{2}\right)^2$; $\left(\dfrac{1}{2}a-\dfrac{2}{3}b\right)^2$; $\left(-2y+\dfrac{1}{4}y^2\right)^2$

57 $\left(-a^3-\dfrac{3}{2}b^2\right)^2$; $\left(\dfrac{1}{2}x^2-a^2\right)^2$; $\left(\dfrac{2}{3}y^2-3b\right)^2$

58 **ESERCIZIO GUIDA**

$\left(2a + x - \frac{1}{2}\right)^2$

Somma dei quadrati dei tre termini		$4a^2 + x^2 + \frac{1}{4}$
doppi prodotti:	del primo per il secondo termine	$+2 \cdot 2a \cdot x = +4ax$
	del primo per il terzo termine	$+2 \cdot 2a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2a$
	del secondo per il terzo termine	$+2 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -x$

In definitiva: $\left(2a + x - \frac{1}{2}\right)^2 = 4a^2 + x^2 + \frac{1}{4} + 4ax - 2a - x$

59 $(2a - b + 1)^2$; $(a + 2x - 3)^2$

60 $(a^2 - 2x + y)^2$; $\left(\frac{1}{2}x - y + z\right)^2$

61 $(x^2 - a^2 + b)^2$; $\left(-2a + \frac{1}{2}b^2 + y^2\right)^2$

62 $(a^2 - 2x + y)^2$; $\left(\frac{1}{3}a + 3x - 2\right)^2$

63 $\left(\frac{1}{2}x^2 - y + 2t\right)^2$; $\left(-x^2 - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}t^3\right)^2$

Sviluppa i seguenti prodotti del tipo $(a - b)(a + b)$.

64 **ESERCIZIO GUIDA**

- $\left(\frac{2}{5} + ax\right)\left(\frac{2}{5} - ax\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 - (ax)^2 = \frac{4}{25} - a^2x^2$
- $\left(-4a + \frac{1}{3}b\right)\left(-4a - \frac{1}{3}b\right) = (-4a)^2 - \left(\frac{1}{3}b\right)^2 = 16a^2 - \frac{1}{9}b^2$

65 $(3x - 1)(3x + 1)$; $(6a - 5b)(6a + 5b)$

66 $(-2a + b)(-2a - b)$; $(x^2 - a)(x^2 + a)$

67 $(x - 3)(x + 3)$; $(a^2 - 3)(a^2 + 3)$

68 $(x - y^2)(x + y^2)$; $\left(-\frac{3}{2} - y\right)\left(-\frac{3}{2} + y\right)$

69 $(5a + 4b)(-5a + 4b)$; $(a^3 - 2)(-a^3 - 2)$

70 $\left(-x^2 - \frac{1}{2}y\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}y\right)$; $\left(\frac{3}{4}a - 2x^2\right)\left(-\frac{3}{4}a - 2x^2\right)$

71 $\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y^3\right)\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}y^3\right)$; $\left(\frac{5}{2}a^2 - 2b\right)\left(-\frac{5}{2}a^2 - 2b\right)$

Sviluppa i seguenti cubi di binomi.

72 **ESERCIZIO GUIDA**

$(2b-3)^3$

Somma dei cubi dei due termini $(2b)^3+(-3)^3=8b^3-27$

triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo: $3\cdot(2b)^2\cdot(-3)=-36b^2$

triplo prodotto del primo termine per il quadrato del secondo: $3\cdot(2b)\cdot(-3)^2=+54b$

In definitiva: $(2b-3)^3=8b^3-27-36b^2+54b$

73 $(x+3)^3$; $(2x-1)^3$

74 $(x+2y)^3$; $(a-2b)^3$

75 $\left(\frac{1}{2}+x\right)^3$; $\left(3a-\frac{1}{3}y\right)^3$

76 $\left(\frac{1}{3}a^2-2\right)^3$; $(-2a-b^2)^3$

77 $\left(\frac{3}{2}a^2+b\right)^3$; $\left(-\frac{1}{3}-ax\right)^3$

Semplifica le seguenti espressioni contenenti prodotti notevoli.

78 $(2a-y)(y+2a)-\frac{1}{2}(a+2y)^2+\left(\frac{4}{3}a+2y\right)(a-y)$ $\left[\frac{29}{6}a^2-\frac{4}{3}ay-5y^2\right]$

79 $\left[\left(2a+\frac{1}{2}b\right)\left(2a-\frac{1}{2}b\right)+\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2\right]+(a-2b+1)^2-\left[(1+2b)^2+2a(1+3a)\right]$ $[-8b-3ab]$

80 $\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}a\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}a\right)+\left(x+\frac{3}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}x-2a\right)^2$ $[x^2+5ax-4a^2]$

81 $\left(2x-\frac{1}{3}y\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}y\right)\left(x+\frac{1}{2}y\right)-(x+y-1)^2+2\left(\frac{5}{3}xy-x-y\right)$ $\left[2x^2-\frac{23}{36}y^2-1\right]$

82 $\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}a^2\right]\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}+a\right)+\left(\frac{1}{4}-a\right)^2-(a^2-1)(a^2+1)$ $\left[1-\frac{3}{4}a^4\right]$

83 $(a+2b)^3+(2a-b)^3-3a^2(3a-2b)-(b^2+1)(7b-2a)$ $[20ab^2+2a-7b]$

84 $\left[(a-3x)^3+(3x-a)(9x^2+3ax+a^2)\right]:(-9ax)+2(a+5x)$ $[7x+3a]$

85 $\left[(2x-y)^3-(2x+y)(2x-y)^2\right]:(-2y)+y(y+4x)$ $[4x^2+2y^2]$

Rivedi la teoria

Il teorema del resto

Il **resto della divisione** di un polinomio $P(x)$ per un binomio del tipo $(x-a)$ è dato da $P(a)$, cioè dal valore che assume il polinomio quando alla variabile x si sostituisce il valore a.

Ad esempio:

- $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ calcoliamo il resto della divisione per $(x - 1)$:
  $R = P(1) = 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 3 = 2$
- $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x - 3$ calcoliamo il resto della divisione per $(x + 1)$:
  $R = P(-1) = 2 \cdot (-1)^4 - 3 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1) - 3 = 2 + 3 - 2 - 3 = 0$

Il resto della divisione ci dà indicazioni sulla divisibilità di $P(x)$ per $(x - a)$:

- se $P(a) = 0$ allora $P(x)$ è divisibile per $(x - a)$
- se $P(a) \neq 0$ allora $P(x)$ non è divisibile per $(x - a)$

Il polinomio $P(x)$ del primo esempio non è divisibile per $(x - 1)$; il polinomio $P(x)$ del secondo esempio è divisibile per $(x + 1)$.

La regola di Ruffini

Per eseguire la divisione di un polinomio $P(x)$, ordinato secondo le potenze decrescenti di x, per un binomio di primo grado del tipo $(x - a)$ si può usare la **regola di Ruffini**.
Vediamo come si applica questa regola eseguendo la divisione $(4x^3 - 5x^2 + 3x - 1) : (x - 1)$.

		4	-5	3	-1	← coefficienti del polinomio dividendo
termine a →	1		4	-1	2	← riga dei prodotti
		4	-1	2	1	← resto della divisione

↑
coefficienti del polinomio quoziente

Per costruire la tabella ricorda che si sommano i numeri sulla stessa verticale e si moltiplicano man mano i numeri dell'ultima riga per il termine a.

Il polinomio quoziente è di secondo grado e si ha che $Q(x) = 4x^2 - x + 2$ e $R = 1$.

Fai gli esercizi

Calcola il resto della divisione dei polinomi P assegnati per i binomi indicati accanto e stabilisci la loro divisibilità.

86 $P(x) = 3x^2 - 2x + 5$; $(x - 2)$, $(x - 1)$, $(x + 1)$ $[P(2) = 13;\ P(1) = 6;\ P(-1) = 10]$

87 $P(a) = 3a^2 - a - 2$; $(a - 1)$, $(a - 3)$, $(a + 1)$ [$P(1) = 0$ divisibile; $P(3) = 22$; $P(-1) = 2$]

88 $P(x) = 3x^3 - 6x^2 - x + 2$; $(x + 2)$, $(x - 2)$, $(x - 1)$ [$P(-2) = -44$; $P(2) = 0$ divisibile; $P(1) = -2$]

89 $P(y) = y^4 - y^2 - 72$; $(y + 3)$, $(y - 2)$, $(y - 3)$ [$P(-3) = 0$ divisibile; $P(2) = -60$; $P(3) = 0$ divisibile]

90 $P(a) = -2a^3 + 33a - 4$; $(a + 2)$, $(a + 4)$, $(a - 4)$ [$P(-2) = -54$; $P(-4) = -8$; $P(4) = 0$ divisibile]

Calcola quoziente e resto delle seguenti divisioni applicando la regola di Ruffini.

91 $(x^3 - 4x^2 + 2x - 1) : (x + 2)$ $[Q(x) = x^2 - 6x + 14;\ R = -29]$

92 $(2x^2 + 5x - 6) : (x - 3)$ $[Q(x) = 2x + 11;\ R = 27]$

93 $(4x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x - 12) : (x + 1)$ $[Q(x) = 4x^3 - 6x^2 + 7x - 12;\ R = 0]$

94 **ESERCIZIO GUIDA**

$(y^3 - 3y - 2) : (y - 2)$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & & 2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

← manca il termine di secondo grado, il suo coefficiente è 0

$Q(y) = y^2 + 2y + 1$ $\qquad R = 0$

95 $(x^4 - 3x^2 + 1) : (x + 1)$ $[Q(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2;\ R = -1]$

96 $(x^3 - 5x^2 + 4x - 1) : (x - 2)$ $[Q(x) = x^2 - 3x - 2;\ R = -5]$

97 $(2x^4 - 3x^2 + 5x - 4) : (x - 1)$ $[Q(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 4;\ R = 0]$

98 $(x^3 - 2x + 1) : (x - 1)$ $[Q(x) = x^2 + x - 1;\ R = 0]$

99 $(x^4 - 3x^2 + 5x + 12) : (x + 2)$ $[Q(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3;\ R = 6]$

100 $(x^3 + 2x^2 - 9) : (x + 3)$ $[Q(x) = x^2 - x + 3;\ R = -18]$

101 $(3x^3 + 5x^2 - 5x + 2) : (x - 2)$ $[Q(x) = 3x^2 + 11x + 17;\ R = 36]$

102 $(x^3 - 2x^2 - x - 3) : (x - 3)$ $[Q(x) = x^2 + x + 2;\ R = 3]$

Cap 2. La fattorizzazione dei polinomi

Rivedi la teoria

La scomposizione dei polinomi

Scomporre un polinomio significa scriverlo sotto forma di prodotto di due o più altri polinomi.
Alcuni metodi per eseguire una scomposizione derivano dalle regole per eseguire le moltiplicazioni fra polinomi e monomi e per eseguire i prodotti notevoli.

Il raccoglimento totale

Il **raccoglimento a fattor comune** è una procedura già nota che rivediamo su alcuni esempi:

- $at + b^2t + 3ct = t(a + b^2 + 3c)$
- $3xy + ay + 8y = y(3x + a + 8)$

Dunque, per applicare la proprietà di raccoglimento, bisogna individuare il *M.C.D.* fra i monomi del polinomio a meno di un eventuale coefficiente. Il polinomio fra parentesi è il quoziente del polinomio dato per il monomio messo in evidenza.

La stessa regola si applica anche quando il fattore comune è un polinomio. Per esempio:

- $2a\boxed{(x - 1)} + 3\boxed{(x - 1)} = (x - 1)(2a + 3)$
- $2\boxed{(a^2 + b)} - 3y\boxed{(a^2 + b)} - x\boxed{(a^2 + b)} = (a^2 + b)(2 - 3y - x)$

Il raccoglimento parziale

Alcune volte si possono eseguire dei **raccoglimenti a fattor comune parziali**, cioè solo su gruppi di monomi, in modo però che sia poi possibile un raccoglimento totale. Vediamo alcuni esempi:

- $\underbrace{ax + 3x}_{x} + \underbrace{ay + 3y}_{y} = x\underbrace{(a+3) + y(a+3)}_{a+3} = (a+3)(x+y)$
- $\underbrace{7a + 7b}_{7} \underbrace{- am^2 - bm^2}_{-m^2} = 7\underbrace{(a+b) - m^2(a+b)}_{a+b} = (a+b)(7-m^2)$
- $\underbrace{ax - 2ay + 3a}_{a} \underbrace{- 2bx + 4by - 6b}_{-2b} = a\underbrace{(x-2y+3) - 2b(x-2y+3)}_{x-2y+3} = (x-2y+3)(a-2b)$

Il riconoscimento dei prodotti notevoli

Il **riconoscimento di prodotti notevoli** è un'altra possibilità per eseguire una scomposizione.

- riconoscimento di quadrati di binomi (cerca i 2 quadrati e verifica il loro doppio prodotto):

  a. $\underset{(3a)^2}{\underset{\uparrow}{9a^2}} \quad \underset{2\cdot 3a\cdot 2}{\underset{\uparrow}{-12a}} \quad \underset{(2)^2}{\underset{\uparrow}{+4}} \quad = (3a-2)^2$

  b. $\underset{(x)^2}{\underset{\uparrow}{x^2}} \quad \underset{2\cdot x\cdot 3}{\underset{\uparrow}{+6x}} \quad \underset{(3)^2}{\underset{\uparrow}{+9}} \quad = (x+3)^2$

- riconoscimento di quadrati di trinomi (individua i 3 quadrati, poi verifica i doppi prodotti):

  a. $\underset{(3a^2)^2}{\underset{\uparrow}{9a^4}} \quad \underset{(2a)^2}{\underset{\uparrow}{+4a^2}} \quad \underset{(1)^2}{\underset{\uparrow}{+1}} \quad \underset{2\cdot 3a^2\cdot 2a}{\underset{\uparrow}{+12a^3}} \quad \underset{2\cdot 3a^2\cdot 1}{\underset{\uparrow}{+6a^2}} \quad \underset{2\cdot 2a\cdot 1}{\underset{\uparrow}{+4a}} \quad = (3a^2+2a+1)^2$

  b. $\underset{(x)^2}{\underset{\uparrow}{x^2}} \quad \underset{(3y)^2}{\underset{\uparrow}{+9y^2}} \quad \underset{(1)^2}{\underset{\uparrow}{+1}} \quad \underset{2\cdot(3y)\cdot(x)}{\underset{\uparrow}{-6xy}} \quad \underset{2\cdot x\cdot 1}{\underset{\uparrow}{+2x}} \quad \underset{2\cdot 3y\cdot 1}{\underset{\uparrow}{-6y}} \quad = (x-3y+1)^2$

- riconoscimento di differenze di quadrati:

  a. $\underset{(a)^2}{\underset{\uparrow}{a^2}} - \underset{(5)^2}{\underset{\uparrow}{25}} = (a-5)(a+5)$

  b. $\underset{(a)^2}{\underset{\uparrow}{a^2}} - \underset{(3x)^2}{\underset{\uparrow}{9x^2}} = (a-3x)(a+3x)$

  c. $x^2 - (2x+1)^2 = [x-(2x+1)][x+(2x+1)] = -(x+1)(3x+1)$

- riconoscimento di cubi di binomi (individua i due cubi e controlla poi i tripli prodotti):

  a. $\underset{(a)^3}{\underset{\uparrow}{a^3}} \quad \underset{3\cdot(a)^2\cdot 2}{\underset{\uparrow}{+6a^2}} \quad \underset{3\cdot a\cdot(2)^2}{\underset{\uparrow}{+12a}} \quad \underset{(2)^3}{\underset{\uparrow}{+8}} \quad = (a+2)^3$

  b. $\underset{(x)^3}{\underset{\uparrow}{x^3}} \quad \underset{3\cdot(x)^2\cdot(-3)}{\underset{\uparrow}{-9x^2}} \quad \underset{3\cdot x\cdot(-3)^2}{\underset{\uparrow}{+27x}} \quad \underset{(-3)^3}{\underset{\uparrow}{-27}} \quad = (x-3)^3$

  c. $\underset{\left(\frac{1}{3}y\right)^3}{\underset{\uparrow}{\frac{1}{27}y^3}} \quad \underset{3\cdot\left(\frac{1}{3}y\right)^2\cdot 2}{\underset{\uparrow}{+\frac{2}{3}y^2}} \quad \underset{3\cdot\frac{1}{3}y\cdot 2^2}{\underset{\uparrow}{+4y}} \quad \underset{(2)^3}{\underset{\uparrow}{+8}} = \left(\frac{1}{3}y+2\right)^3$

Fai gli esercizi

Scomponi ricorrendo al raccoglimento a fattor comune totale.

1 $2x^2y + 6x^3y^3 - 12x^2y^2$; $10a^4 - 30a^5b^3 - 20a^4b^2$ $[2x^2y(1 + 3xy^2 - 6y);\ 10a^4(1 - 3ab^3 - 2b^2)]$

2 $2a^2c + 4a^3c^2 - 8a^2x$; $9x^4 - 18ax^6 + 6x^3$ $[2a^2(c + 2ac^2 - 4x);\ 3x^3(3x - 6ax^3 + 2)]$

3 $3a^3x - 3xy$; $4ab - 8ab^2 + 2a$ $[3x(a^3 - y);\ 2a(2b - 4b^2 + 1)]$

4 $\frac{1}{5}x^2y^3 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{7}{5}x^3y - \frac{6}{5}x^2y^2$; $x^5 - 3x^3y + x^2$ $\left[\frac{1}{5}x^2(y^3 - 4 + 7xy - 6y^2);\ x^2(x^3 - 3xy + 1)\right]$

5 $\frac{1}{2}a^2y^2 - \frac{3}{4}a^3y + \frac{1}{6}ay^2$; $a^2b^4 + b^4$ $\left[\frac{1}{2}ay\left(ay - \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{3}y\right);\ b^4(a^2 + 1)\right]$

6 $3x(2a - 1) - y(2a - 1)$; $6a^2(2b + z) - 3a(2b + z)$ $[(2a - 1)(3x - y);\ 3a(2b + z)(2a - 1)]$

7 $x^2(2 - y) + y^2(y - 2) + y - 2$; $4(3 - b) - a^2(b - 3) + 3 - b$ $[(2 - y)(x^2 - y^2 - 1);\ (3 - b)(5 + a^2)]$

Scomponi ricorrendo al raccoglimento parziale.

8 $\underbrace{3ax^2 + 3ay^2}_{3a} + \underbrace{2bx^2 + 2by^2}_{2b}$ $[(x^2 + y^2)(3a + 2b)]$

9 $\underbrace{3xz^2 - z^2}_{z^2} + \underbrace{3x - 1}_{1}$ $[(3x - 1)(z^2 + 1)]$

10 $\underbrace{2ax + 2ay}_{2a} + \underbrace{3x + 3y}_{3} \underbrace{- zx - zy}_{-z}$ $[(x + y)(2a + 3 - z)]$

11 $2ax^2 + bx^2 - 3x^2 - 2ay - by + 3y$ $[(2a + b - 3)(x^2 - y)]$

12 $a^2 - 5ab + 5ay - 25by$ $[(a - 5b)(a + 5y)]$

13 $2x^3y^3 - x^2y - 2xy^2 + 1$ $[(2xy^2 - 1)(x^2y - 1)]$

14 $2ax + 3xy + x - 4ay - 6y^2 - 2y$ $[(3y + 2a + 1)(x - 2y)]$

Scomponi riconoscendo quadrati di polinomi.

15 $b^2 - 10b + 25$; $a^4 + 2a^2 + 1$

16 $x^2 + 2xy - y^2$; $x^2 + 16y^2 - 8xy$

17 $36a^2 - 12at + t^2$; $x^2 + 4ax + 4a^2$

18 $\frac{9}{16}a^4 + \frac{4}{9}x^4 + a^2x^2$; $\frac{9}{25}a^2x - \frac{6}{5}ax + x$

19 $\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}xy + 4y^2$; $9a^3 - 2a^2b + \frac{1}{9}ab^2$

20 $18xy^2 - 12xy + 2x$; $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}xy + \frac{1}{32}y^2$

21 $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab + 4ac - 2bc$

22 $x^2 + 9 + 4y^2 - 6x - 4xy + 12y$

Scomponi riconoscendo differenze di quadrati.

23 $4a^2 - 49$; $25x^2 - 9y^2$

24 $\frac{9}{16}a^2 - \frac{1}{9}$; $25a^2b^2 - 1$

25 $\frac{1}{4}x^2 - 9$; $1 - \frac{49}{4}x^2$

26 $\frac{1}{9}x^2 - 100$; $0,36 - a^2$

27 **ESERCIZIO GUIDA**

$9x^2 - (a + y)^2 = (3x)^2 - (a + y)^2 = [3x - (a + y)][3x + (a + y)] = $ ....

28 $(2x-3)^2-4y^2$

29 $(2a-b)^2-(3a+b)^2$

Scomponi riconoscendo cubi di binomi.

30 b^3-3b^2+3b-1 i due cubi sono b^3 e -1, controlla i tripli prodotti

31 $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$ i due cubi sono a^3 e $-8b^3$, controlla i tripli prodotti

32 $a^3+\frac{1}{8}b^3+\frac{3}{2}a^2b+\frac{3}{4}ab^2$

33 $\frac{1}{27}x^3-x^2+9x-27$

34 $-\frac{1}{8}z^3-8-\frac{3}{2}z^2-6z$

35 $\frac{1}{8}x^6-y^9-\frac{3}{4}x^4y^3+\frac{3}{2}x^2y^6$

Rivedi la teoria

Il trinomio caratteristico

Un'altra regola di scomposizione è quella del **trinomio caratteristico**. Si tratta di un trinomio di secondo grado della forma x^2+ax+b nel quale si devono vedere, se possibile, i coefficienti a e b rispettivamente come la somma e il prodotto di due numeri h e k; se tali numeri esistono allora

$$x^2+ax+b=(x+h)(x+k)$$

Per esempio:

a. x^2-3x+2

Dobbiamo individuare due numeri il cui prodotto sia 2 e la cui somma sia -3.

Poiché $2=2\cdot 1$ ma $2+1=3$

$2=(-2)\cdot(-1)$ e $-2-1=-3$

i due numeri sono -2 e -1. Si ha così che: $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$.

b. a^2+5a+6 $\quad 6=2\cdot 3$ e $2+3=5$ quindi $a^2+5a+6=(a+2)(a+3)$

c. x^2-3x-4 $\quad -4=4\cdot(-1)$ ma $4-1=3$

$-4=-4\cdot(+1)$ e $-4+1=-3$ quindi $x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$

La scomposizione con la regola di Ruffini

Un ulteriore metodo di scomposizione consiste nel ricercare i divisori di primo grado del polinomio. Sappiamo che un polinomio $P(x)$ è divisibile per un binomio della forma $x-a$ se si verifica che $P(a)=0$.

I possibili valori di a si devono ricercare fra i divisori del termine noto di $P(x)$ e fra le frazioni $\frac{m}{n}$ dove m è un divisore del termine noto e n è un divisore del coefficiente del termine di grado massimo. Una volta trovato il divisore, basta poi trovare il quoziente applicando la regola di Ruffini. Vediamo qualche esempio.

a. x^3+4x^2+x-6 I divisori del termine noto sono ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.

$P(1)=1+4+1-6=0$ il polinomio è divisibile per $x-1$.

Calcoliamo il quoziente con la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

Avremo dunque $x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)=$ $\leftarrow$ trinomio caratteristico

$=(x-1)(x+2)(x+3)$

b. $2x^3+3x^2-5x-6$ I divisori del termine noto sono $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$.

$P(1)=2+3-5-6\neq 0$ Le frazioni sono $\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}$.

$P(-1)=-2+3+5-6=0$ Il polinomio è divisibile per $x+1$.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 3 & -5 & -6 \\ -1 & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$2x^3+3x^2-5x-6=(x+1)(2x^2+x-6)$

Troviamo ora i divisori del quoziente ottenuto $2x^2+x-6$, tenendo presente che è inutile calcolare $P(1)$ che non aveva dato resto zero nemmeno prima.

$P(-1)=2-1-6\neq 0$

$P(2)=8+2-6\neq 0$

$P(-2)=8-2-6=0$ Il polinomio è divisibile per $x+2$.

$$\begin{array}{r|rr|r} & 2 & 1 & -6 \\ -2 & & -4 & 6 \\ \hline & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

In definitiva: $2x^3+3x^2-5x-6=(x+1)(2x^2+x-6)=(x+1)(x+2)(2x-3)$

Somme e differenze di cubi

Applicando il metodo precedente si possono mettere in evidenza altre due regole di scomposizione:

- regola della somma di cubi: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- regola della differenza di cubi: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Per esempio:

- $a^3-8=(a-2)(a^2+2a+4)$
- $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$
- $8x^3+27y^3=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

Fai gli esercizi

Scomponi applicando la regola del trinomio caratteristico.

36 $y^2-7y-18$; $a^2+2a-15$ $[(y+2)(y-9);\ (a+5)(a-3)]$

37 y^2-4y-5; y^2+5y-6 $[(y-5)(y+1);\ (y+6)(y-1)]$

38 x^2+x-12; a^2+7a+6 $[(x+4)(x-3);\ (a+6)(a+1)]$

39 $b^2-7b+10$; $c^2+6c-16$ $[(b-5)(b-2);\ (c+8)(c-2)]$

40 $z^2+6az+8a^2$; $x^2-3bx-10b^2$ $[(z+4a)(z+2a);\ (x-5b)(x+2b)]$

Scomponi applicando il metodo di Ruffini.

41 $x^3 - 2x^2 - 11x + 12;$ $x^3 - x^2 - 10x - 8$ $[(x-1)(x+3)(x-4);\ (x-4)(x+2)(x+1)]$

42 $2x^3 - 7x^2 + 2x + 3;$ $4x^3 + 5x^2 - 7x - 2$ $[(x-1)(x-3)(2x+1);\ (x-1)(x+2)(4x+1)]$

43 $2x^3 - 5x^2 + x + 2;$ $3x^3 - 11x^2 + 5x + 3$ $[(x-1)(x-2)(2x+1);\ (x-1)(x-3)(3x+1)]$

Scomponi applicando le regole per la somma e differenza di cubi.

44 $y^3 - 27;$ $\dfrac{a^3}{125} + 1$ $\left[(y-3)(y^2+3y+9);\ \left(\dfrac{a}{5}+1\right)\left(\dfrac{a^2}{25}-\dfrac{a}{5}+1\right)\right]$

45 $\dfrac{1}{8}x^3 - 1;$ $125 + a^3$ $\left[\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)\left(\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x+1\right);\ (5+a)(25-5a+a^2)\right]$

46 $\dfrac{8}{27}x^3 + y^3;$ $64b^3 - 1$ $\left[\left(\dfrac{2}{3}x+y\right)\left(\dfrac{4}{9}x^2-\dfrac{2}{3}xy+y^2\right);\ (4b-1)(16b^2+4b+1)\right]$

47 $1 - y^9;$ $a^3x^3 - 8$ $[(1-y)(1+y+y^2)(1+y^3+y^6);\ (ax-2)(a^2x^2+2ax+4)]$

Scomponi applicando il metodo più adatto.

48 $2x - 3a - 3ax + 2x^2;$ $3y - 2x + 2ax - 3ay + 2bx - 3by$ $[(2x-3a)(x+1);\ (2x-3y)(a+b-1)]$

49 $2a^3 + 18ab^2 + 12a^2b;$ $3x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 3x$ $[2a(a+3b)^2;\ 3x(x-1)^3]$

50 $3b^2y^2 - 12y^2;$ $4a^2 - x^2 - 4y^2 + 4xy$ $[3y^2(b-2)(b+2);\ (2a+x-2y)(2a-x+2y)]$

51 $a^2x - 4x;$ $a^3 - a$ $[x(a-2)(a+2);\ a(a-1)(a+1)]$

52 $a^3 - 4a^2 + 4a,$ $x^2 + x - 2$ $[a(a-2)^2;\ (x+2)(x-1)]$

53 $ax + 2bx - 3a - 6b;$ $a^3x - x^4$ $[(a+2b)(x-3);\ x(a-x)(a^2+ax+x^2)]$

54 $ab^2 - 2ab - 3a;$ $a^2 - (x^2 - 6x + 9)$ $[a(b-3)(b+1);\ (a-x+3)(a+x-3)]$

55 $x^3 + x^2 - 9x - 9;$ $8a^3x + b^3x$ $[(x+1)(x-3)(x+3);\ x(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)]$

Trova il M.C.D. e il m.c.m. fra i seguenti polinomi.

56 **ESERCIZIO GUIDA**

$x^2 - 4$ $ax^2 + 4ax + 4a$ $ax + 2a$

Scomponiamo i tre polinomi:

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

$ax^2 + 4ax + 4a = a(x^2 + 4x + 4) = a(x+2)^2$

$ax + 2a = a(x+2)$

Per trovare il *M.C.D.* si devono ricercare solo i fattori comuni a tutti e tre i polinomi; nel nostro caso il solo fattore comune è $x + 2$, quindi:

$$M.C.D. = x + 2$$

Per il *m.c.m.* si devono prendere tutti i fattori, una sola volta, con l'esponente più grande; quindi:

$$m.c.m. = a(x+2)^2(x-2)$$

57 $x^2 - y^2;$ $ax + ay - bx - by;$ $ax + ay + bx + by$
$[M.C.D. = x + y,\ m.c.m. = (x-y)(x+y)(a-b)(a+b)]$

58 a^3+b^3; $7a^2-7ab+7b^2$; $2a^2-2b^2$

$[M.C.D.=1,\ m.c.m.=14(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)]$

59 $x^4+x^3-x^2-x$; $9x+9$; $7x^2+14x+7$

$[M.C.D.=x+1,\ m.c.m=63x(x+1)^2(x-1)]$

60 b^2-b-2; b^2+b-6; b^2-4

$[M.C.D.=b-2,\ m.c.m.=(b+1)(b+2)(b-2)(b+3)]$

61 $4a+12x$; a^3+27x^3; $2a^3+18ax^2+12a^2x$

$[M.C.D.=a+3x,\ m.c.m.=4a(a+3x)^2(a^2-3ax+9x^2)]$

Cap 3. Le frazioni algebriche

Rivedi la teoria

Le frazioni algebriche

Una frazione algebrica rappresenta il quoziente fra due polinomi; affinchè essa abbia significato, le sue lettere non devono assumere valori che annullano il polinomio al denominatore; per esempio:

- $\dfrac{3x-1}{x+2}$ ha significato se $x+2\neq 0$
- $\dfrac{a^2+3}{a-1}$ ha significato se $a-1\neq 0$

Le due relazioni $x+2\neq 0$ e $a-1\neq 0$ rappresentano le **condizioni di esistenza** delle due frazioni.

La semplificazione

Per **semplificare una frazione algebrica** si deve innanzi tutto scomporre sia il numeratore che il denominatore della frazione se questi sono dei polinomi; individuato poi il loro *M.C.D.*, basta applicare la proprietà invariantiva e dividere numeratore e denominatore per tale *M.C.D.*
Nella pratica poi, una volta scomposti i polinomi, si individuano i fattori comuni e si semplificano. Ad esempio

a. $\dfrac{25x^4y^3}{15x^3y^5}=\dfrac{\overset{5}{\cancel{25}}\,x^{\overset{1}{\cancel{4}}}\cancel{y^3}}{\underset{3}{\cancel{15}}\,\cancel{x^3}\,y^{\cancel{5}\,2}}=\dfrac{5x}{3y^2}$ Abbiamo diviso numeratore e denominatore per 5, per x^3 e per y^3

b. $\dfrac{30y^2-20y}{3xy-2x}$ Dobbiamo innanzi tutto scomporre in fattori: $\dfrac{10y\,\cancel{(3y-2)}}{x\,\cancel{(3y-2)}}=\dfrac{10y}{x}$

Attenzione: non si può semplificare un addendo di un polinomio al numeratore con uno al denominatore ma solo un fattore; ad esempio

$\dfrac{x^2-\cancel{x}}{\cancel{x}}=x^2$ **è sbagliato** $\dfrac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}}=x-1$ **è corretto**

Fai gli esercizi

Determina le condizioni di esistenza di ciascuna delle seguenti frazioni.

1 $\dfrac{1}{2x-4}$ $\dfrac{3a}{a^2-4}$ $\dfrac{2a-b}{2a}$ $[x-2\neq 0;\ a-2\neq 0\ \wedge\ a+2\neq 0;\ a\neq 0]$

2 $\dfrac{2+y}{y-3}$ $\qquad$ $\dfrac{5x+2}{x+4}$ $\qquad$ $\dfrac{2b+6}{3b}$ $\qquad$ $[y-3\neq 0;\ x+4\neq 0;\ b\neq 0]$

3 $\dfrac{7a-3b}{2a}$ $\qquad$ $\dfrac{3x^2-1}{x-2}$ $\qquad$ $\dfrac{x+1}{3x-9}$ $\qquad$ $[a\neq 0;\ x-2\neq 0;\ x-3\neq 0]$

Semplifica le seguenti frazioni algebriche.

4 $\dfrac{ay^2}{2a^2y}$ $\qquad$ $\dfrac{10a^3b^4}{35ab^2}$ $\qquad$ $\dfrac{6a^3y^2}{2a^2y^4}$ $\qquad$ $\left[\dfrac{y}{2a};\ \dfrac{2}{7}a^2b^2;\ \dfrac{3a}{y^2}\right]$

5 $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$ $\qquad$ $\dfrac{8-4y}{4-y^2}$ $\qquad$ $\dfrac{3a+6b}{a+2b}$ $\qquad$ $\left[\dfrac{a+b}{a-b};\ \dfrac{4}{2+y};\ 3\right]$

6 $\dfrac{y^6-1}{y^3+1}$ $\qquad$ $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}$ $\qquad$ $\dfrac{3a^2-27}{6a-18}$ $\qquad$ $\left[y^3-1;\ \dfrac{x+4}{x+1};\ \dfrac{a+3}{2}\right]$

7 $\dfrac{a^2-3a}{a^2-6a+9}$ $\qquad$ $\dfrac{ax^3-a}{ax^2+ax+a}$ $\qquad$ $\dfrac{x-2y}{x^2-3xy+2y^2}$ $\qquad$ $\left[\dfrac{a}{a-3};\ x-1;\ \dfrac{1}{x-y}\right]$

8 $\dfrac{2a-3x}{9x^2-4a^2}$ $\qquad$ $\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{x^2-x-6}$ $\qquad$ $\dfrac{2a^2+2a}{a^2-1}$ $\qquad$ $\left[-\dfrac{1}{2a+3x};\ 2x-1;\ \dfrac{2a}{a-1}\right]$

9 $\dfrac{a^4-a}{a^3-a^2-a-2}$ $\qquad$ $\dfrac{x^2+9y^2+6xy}{x^3+27y^3}$ $\qquad$ $\dfrac{2b^2-5b-3}{2b+1}$ $\qquad$ $\left[\dfrac{a^2-a}{a-2};\ \dfrac{x+3y}{x^2-3xy+9y^2};\ b-3\right]$

Rivedi la teoria

Le operazioni con le frazioni algebriche

Le operazioni con le frazioni algebriche si eseguono con le stesse regole del calcolo con le frazioni numeriche. Vediamo qualche esempio.

- Addizione e sottrazione: $\dfrac{x}{2x-1}+\dfrac{3x-2}{4x+2}-\dfrac{1}{4x^2-1}$

  Scomponiamo i denominatori: $\dfrac{x}{2x-1}+\dfrac{3x-2}{2(2x+1)}-\dfrac{1}{(2x-1)(2x+1)}$

  Il *m.c.m.* fra i denominatori è: $2(2x-1)(2x+1)$

  Eseguiamo le operazioni indicate: $\dfrac{2x(2x+1)+(2x-1)(3x-2)-2}{2(2x-1)(2x+1)}$

  Sviluppiamo i calcoli al numeratore: $\dfrac{4x^2+2x+6x^2-4x-3x+2-2}{2(2x-1)(2x+1)}=\dfrac{10x^2-5x}{2(2x-1)(2x+1)}$

  Semplifichiamo la frazione ottenuta: $\dfrac{5x\,\cancel{(2x-1)}}{2\,\cancel{(2x-1)}(2x+1)}=\dfrac{5x}{4x+2}$

- Moltiplicazione: $\dfrac{3x^2y}{5a}\cdot\dfrac{2a^2-3ax}{6x^3y}$

  Scomponiamo il polinomio al numeratore della seconda frazione: $\dfrac{3x^2y}{5a}\cdot\dfrac{a(2a-3x)}{6x^3y}$

Semplifichiamo un fattore al numeratore con uno al denominatore: $\dfrac{\cancel{3}x^{\cancel{2}}\cancel{y}}{5\cancel{a}} \cdot \dfrac{\cancel{a}(2a-3x)}{\underset{2}{\cancel{6}}x^{\cancel{3}}\cancel{y}}$

Otteniamo: $\dfrac{2a-3x}{10x}$

- Divisione: $\dfrac{4y}{x-y} : \dfrac{12y^2}{3x^2-3y^2}$

Trasformiamo la divisione in moltiplicazione, scomponiamo e semplifichiamo

$$\frac{4y}{x-y} \cdot \frac{3(x^2-y^2)}{12y^2} = \frac{\cancel{4}\cancel{y}}{\cancel{x-y}} \cdot \frac{\cancel{3}\cancel{(x-y)}(x+y)}{\cancel{12}y^{\cancel{2}}} = \frac{x+y}{y}$$

- Potenza: $\left(\dfrac{3x^2-2x}{x^2-2x}\right)^2$

Scomponiamo dapprima i polinomi all'interno della parentesi e semplifichiamo la frazione:

$$\left[\frac{x(3x-2)}{x(x-2)}\right]^2 = \left(\frac{3x-2}{x-2}\right)^2$$

Per elevare al quadrato la frazione indichiamo la potenza del numeratore e del denominatore:

$$\frac{(3x-2)^2}{(x-2)^2}$$

Fai gli esercizi

Semplifica le seguenti espressioni contenenti solo addizioni e sottrazioni.

10 $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x-1}$; $\quad \dfrac{a+2b}{3a} + \dfrac{2b-a}{9b}$ $\quad \left[\dfrac{x-5}{(x+1)(x-1)}; \dfrac{6b^2+5ab-a^2}{9ab}\right]$

11 $\dfrac{x-1}{x^2-16} + \dfrac{4}{2x+8} + 1$; $\quad \dfrac{x}{x-3} - \dfrac{1}{x+1}$ $\quad \left[\dfrac{x^2+3x-25}{x^2-16}; \dfrac{x^2+3}{(x+1)(x-3)}\right]$

12 $\dfrac{x-1}{x^2-25} + \dfrac{2}{3x+15}$; $\quad \dfrac{2x-1}{x} + \dfrac{4}{x^2}$ $\quad \left[\dfrac{5x-13}{3(x^2-25)}; \dfrac{2x^2-x+4}{x^2}\right]$

13 $\dfrac{5}{a-2} + \dfrac{3}{6-3a}$; $\quad \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{5-x}{2x^2-2} + \dfrac{6}{3x+3}$ $\quad \left[\dfrac{4}{a-2}; \dfrac{2x+3}{2(x+1)}\right]$

14 $\dfrac{x-1}{3x+1} - \dfrac{2}{9x^2+6x+1} - \dfrac{2x-1}{9x+3}$; $\quad \dfrac{x}{x^2-4} - \left(\dfrac{x-2}{x+2} - \dfrac{x+2}{x-2}\right)$ $\quad \left[\dfrac{3x^2-5x-8}{3(3x+1)^2}; \dfrac{9x}{x^2-4}\right]$

15 $\dfrac{x}{x^2-9} - \left(\dfrac{x-3}{x+3} - \dfrac{x+3}{x-3}\right)$; $\quad \left(\dfrac{a^4-a^3}{a^2-1} - 1\right) - \left(\dfrac{a^3}{a+1} - \dfrac{a}{2a-2}\right)$ $\quad \left[\dfrac{13x}{x^2-9}; \dfrac{2-a}{2(a-1)}\right]$

Semplifica le seguenti espressioni contenenti anche moltiplicazioni e divisioni.

16 $\dfrac{3xy+y^2}{x^2} \cdot \dfrac{2x}{9x^2-y^2}$; $\quad \dfrac{x^2-y^2}{x^2-5x+6} \cdot \dfrac{3x-6}{x-y}$ $\quad \left[\dfrac{2y}{x(3x-y)}; \dfrac{3(x+y)}{x-3}\right]$

17 $\dfrac{3x^2-48}{6x}\cdot\dfrac{x+1}{2x-8}\cdot\dfrac{4}{x+4}$; $\qquad \dfrac{2a-6b}{a+b}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^2-9b^2}\cdot\dfrac{a+3b}{4}$ $\qquad \left[\dfrac{x+1}{x};\ \dfrac{a-b}{2}\right]$

18 $\dfrac{x^2-9}{x^2+5x}:\dfrac{x^2+6x+9}{x^3-25x}$; $\qquad \dfrac{x}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2+2x+1}{3x-x^2}:\dfrac{x+1}{x^2-9}$ $\qquad \left[\dfrac{(x-3)(x-5)}{x+3};\ \dfrac{x+3}{1-x}\right]$

19 $\dfrac{a-3b}{25a^2}:\dfrac{4a-12b}{5ab}$; $\qquad \dfrac{x^2-25y^2}{x+6y}:\dfrac{x-5y}{3x+18y}$ $\qquad \left[\dfrac{b}{20a};\ 3(x+5y)\right]$

20 $\left(\dfrac{3}{y}-\dfrac{y}{3}\right):\dfrac{9-y^2}{9y^2}$; $\qquad \left(\dfrac{2a-b}{a}-\dfrac{a+2b}{b}\right):\left(\dfrac{a^2}{b}+b\right)$ $\qquad \left[3y;\ -\dfrac{1}{a}\right]$

Semplifica le seguenti espressioni algebriche che contengono tutte le operazioni.

21 **ESERCIZIO GUIDA**

$$\left[\left(\frac{x}{x^2+2x+1}\cdot\frac{x^2+x}{3x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]^2:\frac{x^2-6x+9}{3(x+1)}$$

Eseguiamo la moltiplicazione nelle parentesi rotonde:

$$\left[\left(\frac{x}{(x+1)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{3\cancel{x}}\right)-\frac{1}{x+1}\right]^2:\frac{x^2-6x+9}{3(x+1)}=\left[\frac{x}{3(x+1)}-\frac{1}{x+1}\right]^2:\frac{x^2-6x+9}{3(x+1)}$$

Eseguiamo la sottrazione nelle parentesi quadre ed eleviamo alla potenza indicata:

$$\left[\frac{x-3}{3(x+1)}\right]^2:\frac{x^2-6x+9}{3(x+1)}=\frac{(x-3)^2}{9(x+1)^2}:\frac{x^2-6x+9}{3(x+1)}$$

Scomponiamo la seconda frazione ed eseguiamo la divisione:

$$\frac{(x-3)^2}{9(x+1)^2}:\frac{(x-3)^2}{3(x+1)}=\frac{\cancel{(x-3)^2}}{\underset{3}{\cancel{9}}(x+1)^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{3}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-3)^2}}=\frac{1}{3(x+1)}$$

22 $\left(1+\dfrac{6}{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-1}\right)$ $\qquad [-x-2]$

23 $\left(\dfrac{1}{3x-1}+\dfrac{2}{x-1}\right)\left(3-\dfrac{18x-8}{7x-3}\right)$ $\qquad \left[\dfrac{1}{x-1}\right]$

24 $\left(\dfrac{a+1}{3}-\dfrac{a-2}{a}+\dfrac{a-8}{3a}\right):\dfrac{a-2}{3a^2}$ $\qquad [a(a+1)]$

25 $\left(\dfrac{a}{a-3}+\dfrac{1}{a+2}\right)\left(\dfrac{a-2}{a}+a+1\right)\cdot\dfrac{a^2-a-6}{a^2+2a-2}$ $\qquad \left[\dfrac{a^2+3a-3}{a}\right]$

26 $\left[\left(\dfrac{x}{2y}-\dfrac{2y}{x}\right)\left(\dfrac{2xy}{x+2y}\right)^2\right]\cdot\dfrac{x+2y}{2xy}$ $\qquad [x-2y]$

27 $\left[\dfrac{4}{2a^2-12a+16}-\left(\dfrac{1}{2a-8}+\dfrac{1}{2-a}\right)\right]^3:\dfrac{1}{(a^2+16-8a)}$ $\qquad \left[\dfrac{1}{8(a-4)}\right]$

Verifica del recupero

1 Stabilisci quali delle seguenti uguaglianze sono vere e correggi quelle false:

a. $-3ab + 2ab = -a^2b^2$

b. $7x^2y - 4xy = 3xy$

c. $2a - (-3a + 4b) = 2a + 3a + 4b$

d. $6a^2b : \left(-\frac{1}{2}ab\right) = 6a^2b \cdot (-2ab)$

e. $\frac{5}{2}a^2x^3 : \left(+\frac{5}{3}ax\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{5}ax^2$

f. $5a^2b^3 \cdot \frac{1}{10}a^3b^4 = \frac{1}{2}a^6b^{12}$

0,5 punti

2 Semplifica le seguenti espressioni:

a. $\left[\frac{1}{2}ab^3 + \left(-\frac{5}{2}ab^2\right)\left(-\frac{1}{2}b\right) - \left(-\frac{8}{5}a^2b^6\right) : \left(-\frac{12}{5}ab^3\right)\right]\left(\frac{5}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2\right)$

b. $\left[-\frac{8}{5}abx \cdot \left(-\frac{15}{8}a^2bx\right) - \frac{5}{6}a^4b^5x^3 : \left(-\frac{10}{9}ab^3x\right) + (-ab)^2(-3ax^2)\right] : (-bx)^2$

c. $\left\{\left[\left(-\frac{1}{3}a^4b^3\right)^3 : \left(\frac{1}{9}a^4b^3\right)^2\right]^2 - \left[-2a^4b^3 + (+2a^2b)^2 \cdot b\right]^2\right\} : (-2a^4b)^2$

1,5 punti

3 Calcola il *M.C.D.* e il *m.c.m.* fra i seguenti monomi:

a. $2a^2b^3$; $-6b^4c^2$; $24a^4bc$

b. $6x^3y^2z^2$; $-\frac{1}{2}xz^3$; $-\frac{3}{4}x^3y^3z$; $2xyz$

0,5 punti

4 Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a. $(2a - 3b^2) - \left[b^2 - \left(4a - \frac{1}{2}b^2\right) - (-2a - 5b^2)\right] - \left(-\frac{1}{2}b\right)^2$

b. $2x\left(\frac{1}{3}x^2 - 3a\right) + \left(x - \frac{3}{2}a\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}a\right) - \left[-(2x^2 + a)\left(x + \frac{3}{4}a\right)\right]$

0,5 punti

5 Calcola il valore delle seguenti espressioni applicando anche le regole sui prodotti notevoli:

a. $(a - 1)^2 - (a + 2)^2 + (2a - 3)(2a + 3) - 2a(2a - 3)$

b. $\left[\left(3x - \frac{2}{3}y\right)\left(3x + \frac{2}{3}y\right) - (3x - y)^2\right] : \left(\frac{1}{9}y\right) - 50x$

0,5 punti

6 Applicando il teorema del resto, stabilisci se il seguente polinomio è divisibile per i binomi a fianco segnati: $P(x) = x^3 - 2x - 1$ $\quad (x - 1)$, $\quad (x + 1)$.

0,25 punti

7 Calcola quoziente e resto delle seguenti divisioni applicando la regola di Ruffini:

a. $(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) : (x - 2)$

b. $(x^4 - 3x^3 + x - 8) : (x - 3)$

0,5 punti

8 Di ciascuno dei seguenti polinomi sono indicate diverse scomposizioni; individua quella corretta:

a. $a^3 - b^3 =$ $\quad (a-b)^3;$ $\quad (a-b)(a-b)^2;$ $\quad (a-b)(a^2+ab+b^2)$

b. $x^4 - y^4 =$ $\quad (x-y)(x^3-y^3);$ $\quad (x-y)(x-y)^3;$ $\quad (x+y)(x-y)\left(x^2+y^2\right)$

c. $x^2 + 3x - 10 =$ $\quad (x+2)(x-5);$ $\quad (x-2)(x+5);$ $\quad x(x+3-10)$

0,75 punti

9 Scomponi in fattori i seguenti polinomi:

a. $a - \frac{3}{2}ab - x + \frac{3}{2}bx$ **b.** $a^4 - 9a^2 + 8$

c. $a^5 + 5a^2 - 45 - 9a^3$ **d.** $a^4y - 16y$

e. $a^3x^3 - 8b^3x^3$ **f.** $a^4 - 16x^2$

g. $y^3 - 2y^2 - 3y$ **h.** $a^2x - 6ax + 9x$

1,5 punti

10 Calcola il *M.C.D.* e il *m.c.m.* fra i seguenti gruppi di polinomi:

a. $x^2 - x;$ $\quad x^2 - 2x + 1;$ $\quad ax^2 - a$

b. $2x^2 - 5x - 3;$ $\quad 4x^2 + 4x + 1;$ $\quad 2x^2 - x - 1$

1 punto

11 Stabilisci se sono corrette le seguenti semplificazioni:

a. $\dfrac{2\cancel{x} + y}{\cancel{x}} = 2 + y$ **b.** $\dfrac{x-3}{3-x} = 1$

c. $\dfrac{(1-2x)^2}{(2x-1)^2} = 1$ **d.** $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{-\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} = -1$

0,5 punti

12 Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

a. $\dfrac{5x^2 + 5xy}{x^2 + 2xy + y^2}$ **b.** $\dfrac{4x^2 - 4x - 3}{2x^2 - x - 3}$

c. $\dfrac{x^3 - 9x}{x^2 + 2x - 15}$ **d.** $\dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 4x}$

0,5 punti

13 Semplifica le seguenti espressioni:

a. $\dfrac{3x-2}{x-3} - \dfrac{x-1}{x+8} - \dfrac{10x-19}{x^2+5x-24}$

b. $\left(\dfrac{y+1}{y} - \dfrac{y}{y+1}\right) : \left(\dfrac{3}{y-1} - \dfrac{1}{y}\right) : \dfrac{1}{y^2-1}$

c. $\left[\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \cdot \dfrac{x^4-y^4}{x^2-xy+y^2} : (x+y)^2\right]^3 \cdot \left(\dfrac{2}{x-y}\right)^3$

1,5 punti

Soluzioni

1 **a.** F: $-ab$; **b.** F: $7x^2y - 4xy$; **c.** F: $5a - 4b$; **d.** F: $-12a$; **e.** V; **f.** F: $\frac{1}{2}a^5b^7$

2 **a.** $\frac{39}{16}a^3b^3$; **b.** $\frac{3}{4}a^3$; **c.** $\frac{5}{4}b^4$

3 **a.** $M.C.D. = 2b$, $m.c.m. = 24a^4b^4c^2$; **b.** $M.C.D. = xz$, $m.c.m. = x^3y^3z^3$

4 **a.** $4a - \frac{39}{4}b^2$; **b.** $\frac{11}{3}x^3 - \frac{9}{2}ax$

5 **a.** -12; **b.** $4x - 13y$

6 no, si

7 **a.** $Q(x) = x^2 - 2x + 1$, $R = 0$; **b.** $Q(x) = x^3 + 1$, $R = -5$

8 **a.** la terza; **b.** la terza; **c.** la seconda

9 **a.** $\left(1 - \frac{3}{2}b\right)(a - x)$; **b.** $(a-1)(a+1)(a^2-8)$; **c.** $(a^3+5)(a-3)(a+3)$; **d.** $y(a^2+4)(a-2)(a+2)$; **e.** $x^3(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$; **f.** $(a^2-4x)(a^2+4x)$; **g.** $y(y-3)(y+1)$; **h.** $x(a-3)^2$

10 **a.** $M.C.D. = x - 1$, $m.c.m. = ax(x-1)^2(x+1)$; **b.** $M.C.D. = 2x+1$, $m.c.m. = (2x+1)^2(x-3)(x-1)$

11 **a.** no; **b.** no; **c.** si; **d.** no

12 **a.** $\frac{5x}{x+y}$; **b.** $\frac{2x+1}{x+1}$; **c.** $\frac{x(x+3)}{x+5}$; **d.** $\frac{x-2}{x+2}$

13 **a.** $\frac{2x}{x-3}$; **b.** $(y-1)^2$; **c.** 8

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
Punteggio														

Valutazione in decimi

Math in English

Glossary

expression	espressione	**odd**	dispari
to evalutate	calcolare	**polynomial**	polinomio
even	pari	**product**	prodotto
factor	fattore	**quotient**	quoziente
fraction	frazione	**remainder**	resto

1 Evaluate $\dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}$ for $x=-6$ and $y=4$:

a. not defined **b.** 0 **c.** $\dfrac{6}{13}$ **d.** 52 **e.** none of these

2 Translate the verbal expression "the product of a number and the number increased by 4" into an algebraic expression using n as the number.

a. $n \cdot n+4$ **b.** $n(n+4)$ **c.** $n+n+4$ **d.** $\dfrac{n}{n+4}$ **e.** none of these

3 When the polynomial $ax-3a-bx+3b$ is factored completely, **one** of the factors is:

a. $x+3$ **b.** $a-b$ **c.** $a+b$ **d.** $3-x$ **e.** none of these

4 When the polynomial $x^{12}-y^8$ is factored completely, **one** of the factors is:

a. x^6+y^4 **b.** x^2+y^2 **c.** x^2-y^2 **d.** $x-y$ **e.** none of these

5 Find the quotient and the remainder: $\dfrac{x^3+3x^2-7x+6}{x-2}$

a. $x^2+5x+3+\dfrac{12}{x-2}$ **b.** $x^2+x-9+\dfrac{24}{x-2}$ **c.** $x^2+6x+5+\dfrac{6}{x-2}$

d. $x^2-6x+5-\dfrac{12}{x-2}$ **e.** $x^2+3x-7+\dfrac{6}{x-2}$

6 Simplify the rational expression: $\dfrac{x^3+3x^2-9x-27}{x^2+6x+9}$

a. $(x+3)(x-3)$ **b.** $x-3$ **c.** $x+3$ **d.** $3-x$ **e.** $(x+3)(x+3)$

7 Perform the indicated operation and simplify: $\dfrac{x^3-27}{x^2-9} : \dfrac{x^2+3x+9}{x^2+8x+15}$

a. $\dfrac{(x-3)(x-3)}{x^2+3x+9}$ **b.** $\dfrac{x+5}{x-3}$ **c.** $\dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2+3x+9}$ **d.** $x+5$ **e.** none of these

8 Simplify and express the result with positive exponents only: $(2y^3)^4 \cdot (-4y^2)^{-2}$

a. y^8 **b.** $64y^7$ **c.** y^3 **d.** $64y^8$ **e.** none of these

9 Simplify the fraction: $\dfrac{a^{-1}b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}$

a. $\dfrac{1}{a+b}$ **b.** $\dfrac{1}{ab}$ **c.** $\dfrac{1}{2}$ **d.** $a+b$ **e.** none of these

10 Simplify and express the result with positive exponents only: $\left(\dfrac{5x^{-3}}{3y^{2}}\right)^{-2}$

a. $\dfrac{5x^6y^4}{3}$ **b.** $\dfrac{9x^6}{25y^4}$ **c.** $\dfrac{9y^4}{25x^9}$ **d.** $\dfrac{9x^6y^4}{25}$ **e.** none of these

---

1 b. **2** b. **3** b. **4** a. **5** a. **6** b. **7** d. **8** a. **9** a. **10** d.