APPROFONDIMENTO

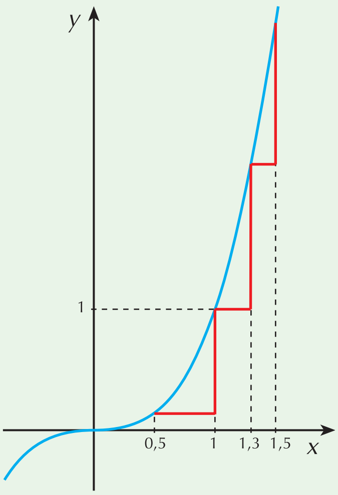
La velocità di variazione di una funzione

In un giornale specializzato si legge che la Ferrari 575 Maranello passa da 0 a 100km/h in 4,2 secondi, mentre la nuova Porsche 911 passa da 0 a 100 km/h in 4,8 secondi.
Il significato di quanto letto è che, poiché 100km/h corrispondono a circa 27,8m/s, la Ferrari ha una accelerazione di $\frac{27{,}8}{4{,}2} = 6{,}6\text{m/s}^2$, la Porsche ha una accelerazione di $\frac{27{,}8}{4{,}8} = 5{,}8\text{m/s}^2$; questo significa che la Ferrari registra una maggiore rapidità nel variare la sua velocità in fase di accelerazione.

Il concetto di *velocità di variazione* è molto importante nello studio di diversi fenomeni che si possono descrivere tramite delle funzioni; esso verrà ripreso e approfondito all'ultimo anno di corso introducendo il concetto di *derivata*. Per ora cerchiamo di comprenderne il significato analizzando il seguente esempio.

Consideriamo la funzione $f(x) = x^3$ e troviamo i valori da essa assunti in corrispondenza di alcuni valori di x:

Figura 1



$\boldsymbol{x}$	0,5	1	1,3	1,5
$\boldsymbol{f(x)}$	0,125	1	2,197	3,375

Ci chiediamo in quali intervalli essa ha una rapidità di crescita più elevata.
Se osserviamo con attenzione il suo grafico (***figura 1***) siamo portati a dire che la curva cresce in modo sempre più rapido man mano che la variabile x cresce; per dare però una indicazione di quanto più rapida sia questa crescita, è necessario valutare di quanto aumenta la variabile y rispetto all'aumento della variabile x:

- nell'intervallo in cui x passa da 0,5 a 1:

$$f(1) - f(0{,}5) = 0{,}875 \qquad \rightarrow \qquad \frac{f(1) - f(0{,}5)}{1 - 0{,}5} = \frac{0{,}875}{0{,}5} = 1{,}75$$

- nell'intervallo in cui x passa da 1 a 1,3:

$$f(1{,}3) - f(1) = 1{,}197 \qquad \rightarrow \qquad \frac{f(1{,}3) - f(1)}{1{,}3 - 1} = \frac{1{,}197}{0{,}3} = 3{,}99$$

- nell'intervallo in cui x passa da 1,3 a 1,5:

$$f(1{,}5) - f(1{,}3) = 1{,}178 \qquad \rightarrow \qquad \frac{f(1{,}5) - f(1{,}3)}{1{,}5 - 1{,}3} = \frac{1{,}178}{0{,}2} = 5{,}89$$

Possiamo concludere che nel terzo intervallo la rapidità di crescita è decisamente maggiore rispetto agli altri due pur essendo l'intervallo di crescita della x più piccolo.

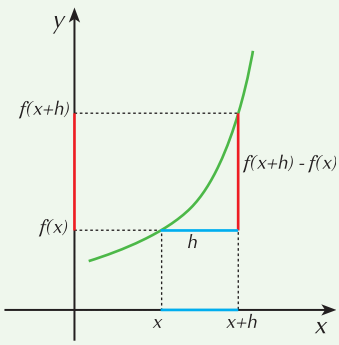
Tutti i problemi nei quali di deve valutare la rapidità con cui una funzione cresce o decresce si possono schematizzare così:

Consideriamo una funzione $f(x)$, un suo punto di ascissa x e il suo punto di ascissa $x + h$ (***figura 2***); il segmento di lunghezza h rappresenta quindi l'incremento Δx subito dalla variabile x nel passaggio da x a $x + h$.
In corrispondenza, sull'asse y, la funzione f passa dal valore $f(x)$ al valore $f(x + h)$ subendo un incremento Δy uguale a $f(x + h) - f(x)$.
Il rapporto tra i due incrementi, rispettivamente sull'asse y e sull'asse x, cioè l'espressione

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

rappresenta la **velocità media o tasso medio di variazione** della $f(x)$ nel passaggio dal punto x al punto $x + h$.

Figura 2

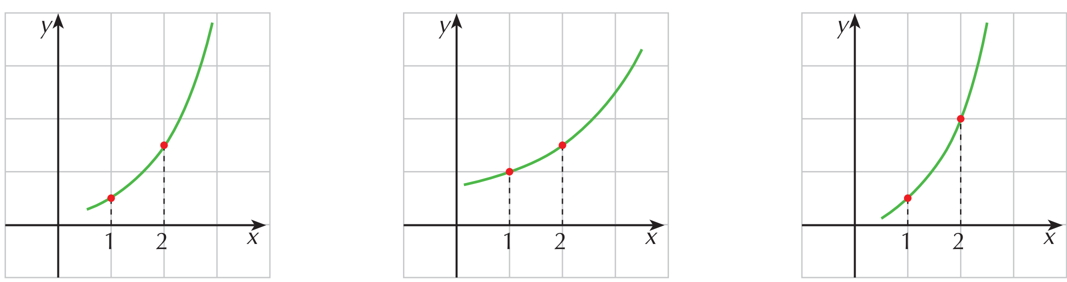


Più piccolo è l'incremento h, più il rapporto $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si avvicina alla velocità di variazione istantanea.

Dal punto di vista geometrico, tale rapporto rappresenta la pendenza media della curva grafico di $f(x)$.
Tra le curve che conosciamo, la retta (non parallela all'asse y) è quella che ha una velocità di variazione costante; infatti il rapporto $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ corrisponde al coefficiente angolare.

ESERCIZI

1 Delle funzioni rappresentate nei seguenti grafici, quale ha una velocità di variazione maggiore nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$?



a. **b.** **c.**

2 Delle due funzioni $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$ si può dire che:

a. $f(x)$ ha un tasso di variazione costante V F

b. $f(x)$ ha un tasso di variazione più grande di $g(x)$ se $1 \leq x \leq 2$ V F

c. $f(x)$ ha un tasso di variazione più piccolo di $g(x)$ se $0 \leq x \leq 1$ V F

Calcola il tasso medio di variazione delle seguenti funzioni nell'intervallo indicato.

3 **a.** $y = x^4 - 1$ $\quad 1 \leq x \leq 2$ $\quad$ **b.** $y = -3x^2 + 1$ $\quad 1 \leq x \leq 3$

4 **a.** $y = -x^3 + 4$ $\quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ $\quad$ **b.** $y = 2x^3 + x^2 - 8$ $\quad -1 \leq x \leq -\dfrac{1}{3}$

5 **a.** $y = 3x^3 - 2x^2 + 1$ $\quad -2 \leq x \leq 2$ $\quad$ **b.** $y = -x^3 + x^2 + 4x - 2$ $\quad \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$

6 **a.** $y = 3x^4 + x^2 + 1$ $\quad 1 \leq x \leq 2$ **b.** $y = x^4 - 3x^3 - 2$ $\quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$

7 **a.** $y = x^4 + 2x^3 - x^2 - 1$ $\quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ **b.** $y = 3x^3 - x^2 + 1$ $\quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$

Stabilisci quale delle due funzioni ha una velocità media di variazione maggiore nell'intervallo indicato.

8 $f(x) = 2x^2 - 2$ e $g(x) = 3x^2 - 4$ nell'intervallo $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ [g]

9 $f(x) = -3x^2 + 4$ e $g(x) = -x^2 + 7$ nell'intervallo $1 \leq x \leq 3$ [f]

10 $f(x) = 4x^3 + x^2$ e $g(x) = 3x^3 - x^2 - 1$ nell'intervallo $-1 \leq x \leq 0$ [g]

11 $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 2$ e $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 1$ nell'intervallo $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ [g]

12 **ESERCIZIO GUIDATO**

Se si aumenta di $\frac{1}{10}$ il lato ℓ di un quadrato, di quanto aumenta la sua area? Qual è in questo caso la velocità di variazione dell'area in rapporto a questo aumento?
Che cosa succede se il lato viene aumentato di $\frac{1}{100}$ e di $\frac{1}{1000}$? Verso quale valore tende la velocità di variazione dell'area al diminuire dell'incremento del lato?

Aumentando il lato di $\frac{1}{10}$ si ottiene un quadrato di lato $\frac{11}{10}\ell$ e la sua area è $\frac{121}{100}\ell^2$.

La velocità di variazione è il rapporto $\dfrac{\frac{121}{100}\ell^2 - \ell^2}{\frac{1}{10}\ell} = 2{,}1\ell$

Aumentando di $\frac{1}{100}$ e ripetendo il calcolo otteniamo: $\dfrac{\left(\frac{101}{100}\ell\right)^2 - \ell^2}{\frac{1}{100}\ell} = 2{,}01\ell$

Aumentando di $\frac{1}{1000}$ si ottiene: $\dfrac{\left(\frac{1001}{1000}\ell\right)^2 - \ell^2}{\frac{1}{1000}\ell} = 2{,}001\ell$

Il valore a cui sembra avvicinarsi la velocità di variazione al diminuire dell'incremento è 2ℓ.

13 Ripeti lo stesso esercizio considerando un cubo di lato ℓ e aumentando il lato di $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{1000}$? Verso quale valore tende la velocità di variazione del volume al diminuire dell'incremento del lato? [$3\ell^2$]

14 Un triangolo di base b ha l'area di 20cm^2; esprimi la sua altezza in funzione della base. Se si aumenta di $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{1000}$ la lunghezza della base, come varia la sua altezza? Qual è la velocità di variazione dell'altezza in rapporto alla variazione della base nei tre casi? Da che cosa dipende?

$\left[h = \frac{40}{b}\text{; velocità di variazione: } \frac{400}{11b^2}, \frac{4000}{101b^2}, \frac{40000}{1001b^2}\right]$

15 Un cilindro di altezza h ha il volume di $1 m^3$; esprimi il suo raggio in funzione dell'altezza. Calcola poi la velocità di variazione del raggio in rapporto alla variazione dell'altezza facendola aumentare, come nei casi precedenti di $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$.

$\left[r = \sqrt{\frac{1}{\pi h}}\text{; velocità di variazione: } \frac{1}{h}\sqrt{\frac{10}{11\pi h}}, \frac{1}{h}\sqrt{\frac{100}{101\pi h}}, \frac{1}{h}\sqrt{\frac{1000}{1001\pi h}} \right]$

16 In laboratorio di Fisica si sta conducendo un esperimento sul moto accelerato; un piccolo carrello, che si sta muovendo con velocità costante di 2m/s su un binario ad aria compressa, viene frenato da una forza costante. Il computer collegato con il sistema rileva la posizione del carrello ogni mezzo secondo a partire da quando viene applicata la forza frenante; nella tabella che segue sono indicati il tempo t in secondi sull'asse delle ascisse, lo spazio s in metri percorso dal carrello sull'asse delle ordinate.

t (in secondi)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
s (in metri)	0	0,95	1,80	2,55	3,20	3,75	4,20	4,55	4,80	4,95	5,00

a. Rappresenta graficamente questi dati e valuta il valore della decelerazione se, trascorsi 5 secondi, il carrello si ferma.
b. Ricorrendo al concetto di velocità di variazione, calcola la velocità media del carrello in ogni tratto e costruisci il relativo grafico.
c. Considerando il grafico ottenuto al precedente punto **b.**, calcola la velocità di variazione della velocità del carrello e verifica che essa è pressocché costante. Che cosa esprime tale costante?

Questo stesso problema può essere risolto utilizzando le formule del moto uniformemente accelerato (in questo caso con accelerazione negativa); verifica che, a meno di errori di approssimazione, i risultati ottenuti coincidono.