Equivalenza, misura di grandezze e aree

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

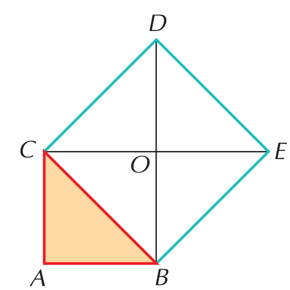
L'equivalenza dei poligoni. Sappiamo che per stabilire se due figure sono **equivalenti** si può vedere se sono **equiscomponibili**, cioè se è possibile suddividere le due figure in parti a due a due congruenti. A questo scopo occorre ricordare che:

- due parallelogrammi sono equivalenti se hanno basi ed altezze congruenti;
- un parallelogramma è equivalente ad un triangolo che ha la stessa base del parallelogramma e altezza doppia di quella del parallelogramma, oppure che ha la stessa altezza del parallelogramma e base doppia;
- due triangoli sono equivalenti se hanno basi ed altezze congruenti;
- un trapezio è equivalente ad un triangolo che ha per base la somma delle basi del trapezio e altezza congruente a quella del trapezio;
- un poligono circoscritto ad una circonferenza è equivalente ad un triangolo che ha per base il perimetro del poligono e per altezza il raggio della circonferenza.

Tenendo presenti queste proprietà dimostriamo il seguente teorema.

Sia ABC un triangolo isoscele e rettangolo in A; costruito il quadrato avente per lato l'ipotenusa, dimostriamo che esso è equivalente al quadruplo del triangolo ABC.

Tracciamo le diagonali del quadrato e osserviamo che ciascuno dei triangoli ottenuti è congruente al triangolo ABC (spiega perché). Possiamo quindi concludere che ....



2 Dato un triangolo isoscele di base BC, traccia la bisettrice dell'angolo esterno di vertice A e da C la perpendicolare a tale bisettrice che la incontra in H. Tracciato il segmento BH, dimostra che i triangoli AHB e AHC sono equivalenti.
(Suggerimento: ricorda che due triangoli sono equivalenti se ....; l'altezza dei due triangoli è il segmento ...., quindi ....)

3 Disegna un parallelogramma $ABCD$, indica con M il punto medio del lato AB e traccia i segmenti che congiungono M con i punti C e D. Dimostra che la somma dei triangoli AMD e BMC è equivalente al triangolo DMC.

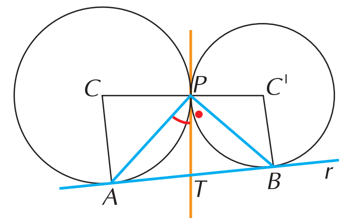
4 **ESERCIZIO GUIDATO**

Il **teorema di Pitagora** afferma che il quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

Servendoci di questo teorema, dimostriamo quanto segue.

Disegniamo due circonferenze tangenti esternamente in P e sia r una tangente comune alle due circonferenze non passante per P; tale retta incontra le due circonferenze in A e in B. Dimostriamo che il quadrato costruito su AB è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui segmenti PA e PB.

Basta dimostrare che il triangolo ABP è rettangolo in P. Osserva allora che, indicato con T il punto di intersezione della retta tangente in P con la retta r, l'angolo $\widehat{APT}$ è metà dell'angolo $\widehat{ACP}$ perché ....; analogamente l'angolo $\widehat{BPT}$ è metà dell'angolo $\widehat{PC'B}$ perché ....



Allora l'angolo $\widehat{APB}$ è retto perché ....

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABP si ottiene la tesi.

5 Un trapezio rettangolo ha il lato obliquo che è perpendicolare alla diagonale. Dimostra che il quadrato costruito sulla base maggiore è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri tre lati.

6 **ESERCIZIO GUIDATO**

Per i triangoli rettangoli valgono anche i teoremi di Euclide, ricordiamoli.

- **Primo teorema di Euclide**. In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.
- **Secondo teorema di Euclide**. In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Dimostriamo il seguente teorema.

Sia AB il diametro di una circonferenza e P un punto ad essa esterno che appartiene alla retta AB (B è più vicino a P di A). Tracciamo una retta per P tangente alla circonferenza e indichiamo con C il punto di tangenza; sia poi H la proiezione di C sulla retta AB. Dimostriamo che il rettangolo che ha per lati i segmenti OH e HP è equivalente al rettangolo che ha per lati i segmenti AH e HB.

Hp. ....
....

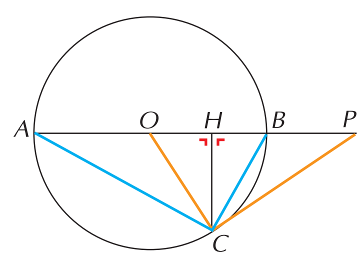
Th. $r(OH, HP) \doteq r(AH, HB)$

Dimostrazione.

Il triangolo OCP è rettangolo in C perché ....;
allora $q(CH) \doteq$...........

Il triangolo ABC è rettangolo in C perché ....;
allora $q(CH) \doteq$...........

Confrontando le due relazioni si ottiene ....



7 Data una circonferenza di centro O e diametro AB, traccia le tangenti in A e B alla circonferenza e una terza tangente in un punto P dell'arco AB che incontra le precedenti tangenti in Q e R. Dimostra che il rettangolo che ha per lati PQ e PR è equivalente al quadrato del raggio.
(Suggerimento: considera PO come raggio; dopo aver dimostrato che il triangolo OQR è rettangolo in O, basta applicare il secondo teorema di Euclide)

8 **ESERCIZIO GUIDATO**

Le proporzioni. Ricordiamo che **quattro grandezze *A, B, C, D* sono in proporzione** se il rapporto fra le prime due è uguale al rapporto fra le seconde due, cioè se $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$; quest'ultima relazione viene di solito scritta nella forma

$$A : B = C : D$$

Sappiamo inoltre che, poiché il rapporto fra due grandezze è uguale al quoziente delle loro misure, se quattro grandezze sono in proporzione lo sono anche le loro misure e viceversa. Allora, indicando con a, b, c, d tali misure, dalla relazione precedente si deduce che

$$a : b = c : d$$

Ricordiamo poi le **proprietà delle proporzioni numeriche**; data la proporzione $a : b = c : d$, valgono le seguenti proprietà:

a. fondamentale $bc = ad$

b. del permutare $a : c = b : d$ oppure $d : b = c : a$

c. dell'invertire $b : a = d : c$

d. del comporre $(a + b) : b = (c + d) : d$

e. dello scomporre $(a - b) : b = (c - d) : d$

Tali proprietà, ad esclusione di quella fondamentale perché non ha senso in generale moltiplicare due grandezze omogenee (ad esempio due pesi o due angoli), valgono anche per le corrispondenti proporzioni fra grandezze se assumiamo che esse siano tutte omogenee fra loro.

In base a quanto ricordato, stabilisci, nei casi indicati di seguito, se le grandezze A, B, C, D, tutte omogenee fra loro e di cui sono date le misure sono in proporzione; nei casi in cui ciò si verifica, scrivi le corrispondenti proporzioni ed applica le proprietà ricordate.

a. $a = 5$, $b = 8$, $c = 10$, $d = 16$

b. $a = 10$, $b = 6$, $c = 15$, $d = 9$

c. $a = 25$, $b = 3$, $c = 50$, $d = 9$

d. $a = 6$, $b = 14$, $c = 9$, $d = 21$

9 Di tre grandezze omogenee A, B, C si sa che A è il triplo di B e che B, a sua volta, è i $\frac{4}{3}$ di C. Calcola i seguenti rapporti: $\frac{B}{A}$ $\frac{C}{B}$ $\frac{A}{C}$.

10 Se A, B, C, D sono quattro grandezze omogenee fra loro e se $A : B = C : D$, quali fra le seguenti proporzioni sono vere?

a. $3A : 3B = 2C : 2D$ **b.** $3A : B = 2C : D$ **c.** $A : 4B = C : 4D$

d. $2A : C = 2B : D$ **e.** $\frac{1}{2}D : B = \frac{1}{2}C : A$ **f.** $B : 6A = C : 6D$

11 Dalla proporzione $A : B = C : D$, se $\frac{D}{B} = \frac{5}{6}$, che cosa si può dire del rapporto $\frac{A}{C}$?

12 **ESERCIZIO GUIDATO**

Il **teorema di Talete** ci garantisce che se abbiamo un fascio di rette parallele, tagliato da due trasversali, i segmenti che si individuano sulla prima trasversale sono proporzionali a quelli corrispondenti che si determinano sulla seconda (***figura a.*** di pagina seguente).

Conseguenza di questo teorema è che se in un triangolo si traccia una corda parallela ad uno dei lati, gli altri due rimangono divisi in parti proporzionali (***figura b.***).

Tenendo presente quanto ricordato dimostriamo il seguente teorema.

Per un punto D del lato AB di un triangolo ABC traccia la parallela al lato BC che incontra AC in E e la parallela al lato AC che incontra BC in F; sia poi G il punto di intersezione di AF con DE. Dimostra che $AE : DF = AG : GF$ (***figura c.***).

Hp. $DE \parallel BC$ **Th.** $AE : DF = AG : GF$

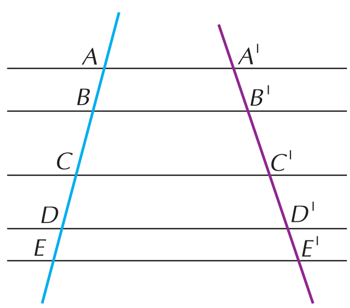
$DF \parallel AC$

Dimostrazione.

Se consideriamo il triangolo AFC, essendo $GE \parallel FC$, possiamo scrivere la proporzione AE : ...... = ... : ....

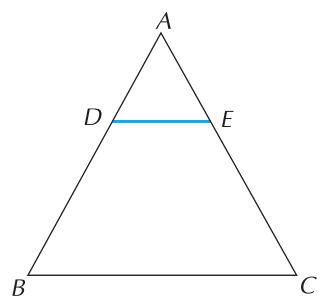
Osserviamo poi che il quadrilatero $DECF$ è un ...., quindi $EC \cong$ ....

Allora ....



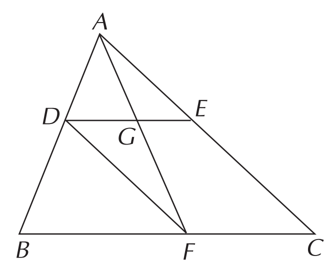
a.

$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' =$ .....



b. $AD : AB = AE : AC$

$AD : DB = AE : EC$



c.

13 Sono dati due segmenti AB e CD ed un terzo segmento PQ. Spiega come puoi trovare un punto S su PQ in modo che PS e SQ siano proporzionali ad AB e CD.
(Suggerimento: traccia una semiretta di origine P e riporta su di essa, a partire da P, i segmenti AB e CD in modo che siano adiacenti; se ora tracci ....)

14 **ESERCIZIO GUIDATO**

Il calcolo delle aree. I teoremi sull'equivalenza e le considerazioni sulla misura permettono di individuare delle regole per il calcolo delle aree S dei poligoni fondamentali; le ricordiamo di seguito:

- area del quadrato di lato ℓ : $S = \ell^2$
- area del rettangolo di lati a e b : $S = a \cdot b$
- area del parallelogramma di base b e altezza h : $S = b \cdot h$
- area del triangolo di base b e altezza h : $S = \dfrac{1}{2} b \cdot h$
- area del trapezio di basi b_1 e b_2 e altezza h : $S = \dfrac{1}{2} h \cdot (b_1 + b_2)$
- area del rombo di diagonali d_1 e d_2 : $S = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2$

- area del poligono di perimetro $2p$ circoscritto ad una circonferenza di raggio r : $S = \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot r = p \cdot r$

Relazioni fra i lati di poligoni particolari. Ricordiamo alcune fra le relazioni più significative che intervengono spesso nella risoluzione di problemi soprattutto di tipo numerico:

- in un quadrato, fra il lato ℓ e la diagonale d sussiste la relazione $d = \ell\sqrt{2}$
- in un triangolo equilatero, fra il lato ℓ e l'altezza h sussiste la relazione $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$
- il lato ℓ del quadrato inscritto in una circonferenza di raggio r è $\ell = r\sqrt{2}$
- il lato ℓ del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r è $\ell = r\sqrt{3}$

In base a quanto ricordato, risolviamo il problema che segue.

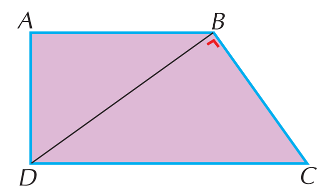
Le basi di un trapezio rettangolo misurano 16cm e 25cm e la diagonale minore è perpendicolare al lato obliquo. Trova il perimetro e l'area del trapezio.

Dati del problema: $\overline{AB} = 16$

$\overline{DC} = 25$

$DB \perp BC$

$AD \perp DC$



Per trovare il perimetro devi prima calcolare le misure del lato AD, che rappresenta anche l'altezza del trapezio, e del lato BC. Tracciata anche l'altezza BH e considerato che $\overline{DH} =$ .... e che $\overline{HC} =$ ...., puoi applicare il secondo teorema di Euclide al triangolo DBC e trovare così la misura di BH che è anche quella di AD.
Per trovare BC puoi adesso applicare il teorema di Pitagora al triangolo BHC oppure il primo teorema di Euclide al triangolo DBC.

15 Un rettangolo è inscritto in una circonferenza il cui raggio misura 25cm; trova la sua area sapendo che un lato è i $\frac{4}{5}$ del diametro.

16 Un triangolo rettangolo ha un angolo che misura 60° e l'altezza relativa all'ipotenusa che misura 15cm. Trova l'area del triangolo.

17 Un triangolo equilatero è inscritto in una circonferenza di raggio r; dopo aver dimostrato che la congiungente i punti medi di due suoi lati individua un altro triangolo equilatero, calcola l'area di quest'ultimo.

18 **ESERCIZIO GUIDATO**

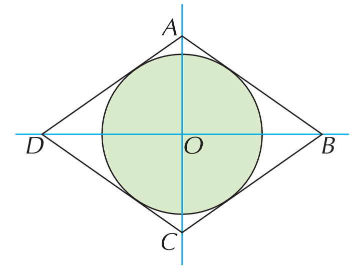
La lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio. Ricordiamo che la lunghezza ℓ della circonferenza rettificata di raggio r è data dalla formula $\ell = 2\pi\, r$ e che l'area S del cerchio è data da $S = \pi\, r^2$.

Risolviamo allora il seguente problema.

In un rombo una diagonale e il lato misurano rispettivamente 18 cm e 15 cm. Calcola la lunghezza della circonferenza in essa inscritta e l'area del cerchio.

Dati del problema: $\overline{AC} = 18$

$\overline{AB} = 15$



Calcoliamo la misura della diagonale BD. Sappiamo che

$$\overline{AO} = \frac{\overline{AC}}{2} = 9$$

Calcoliamo la misura di OB applicando il teorema di Pitagora al triangolo AOB:

$$\overline{OB} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AO}^2} = \text{................} \qquad \rightarrow \qquad \overline{DB} = 2\overline{OB} = 24$$

Per calcolare il raggio della circonferenza inscritta applichiamo la formula $r = \frac{A}{p}$, dove A rappresenta l'area del rombo e p il suo semiperimetro.

$A = \frac{\overline{DB} \cdot \overline{AC}}{2} = \text{......}$

$p = \overline{AB} \cdot 2 = \text{.....}$

$r = \frac{A}{p} = \frac{216}{30} = 7{,}2$

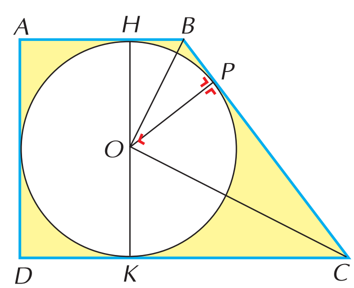
La lunghezza della circonferenza è: ....

L'area del cerchio è: ....

19 **ESERCIZIO GUIDATO**

Un trapezio rettangolo è circoscritto ad una circonferenza di raggio r; di esso si sa che la base minore è i $\frac{3}{4}$ dell'altezza. Trova l'area della parte di piano in colore nella figura.

Dati del problema: $\overline{AB} = \frac{3}{4}\overline{AD}$



Osserviamo subito che l'altezza del trapezio è congruente al diametro della circonferenza, quindi sappiamo che:

$\overline{AD} = 2r$

$\overline{AH} = \overline{DK} = \overline{OP} = r$

Essendo poi $\overline{AB} = \frac{3}{4}\overline{AD} = \frac{3}{2}r$, si ha che $\overline{HB} = \frac{1}{2}r$

Ma $HB \cong BP$ per il teorema delle tangenti, quindi anche $BP = \frac{1}{2}r$.

Il triangolo BOC è rettangolo in O perché ....

Applicando a tale triangolo il secondo teorema di Euclide troviamo che $\overline{PO}^2 = \overline{BP} \cdot \overline{PC}$ da cui $\overline{PC} = \text{..........}$ Allora $\overline{BC} = \text{..........}$

Ma $KC \cong CP$, quindi $\overline{DC} = \text{....................}$

L'area del trapezio è dunque ....

L'area del cerchio è ....

L'area richiesta vale ....

Risultati di alcuni esercizi.

9. $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 4$

10. **a.**, **c.**, **d.**, **e.**

11. $\frac{A}{C} = \frac{6}{5}$

14. $2p = 68\text{cm}$; area $= 246\text{cm}^2$

15. $1\,200\text{cm}^2$

16. $150\sqrt{3}\text{cm}^2$

17. $\frac{3\sqrt{3}}{16}r^2$

18. $14{,}4\pi\text{cm}$; $51{,}84\pi\text{cm}^2$

19. $\left(\frac{9}{2} - \pi\right)r^2$