APPROFONDIMENTO

Particolari equazioni di grado superiore al primo

Consideriamo l'equazione $x^2 - 5x + 4 = 0$
che è di secondo grado in forma normale; se scomponiamo il polinomio al primo membro otteniamo

$$(x-1)(x-4) = 0$$

Risolvere questa equazione significa chiedersi per quali valori di x il prodotto dei due fattori $(x-1)$ e $(x-4)$ è uguale a zero.
Ma il prodotto di due numeri a e b è zero se e solo se almeno uno di essi è uguale a zero. Vale cioè la seguente regola:

Legge di annullamento del prodotto:

$$a \cdot b = 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad a = 0 \quad \vee \quad b = 0$$

Allora, visto che al variare di x nell'insieme dei numeri reali i fattori $(x-1)$ e $(x-4)$ rappresentano dei numeri, il loro prodotto sarà zero se e solo se

$$x - 1 = 0 \qquad \vee \qquad x - 4 = 0$$

Siamo quindi ricondotti a risolvere due equazioni di primo grado, dalle quali ricaviamo che deve essere

$$x = 1 \qquad \vee \qquad x = 4$$

L'equazione data ha quindi come insieme delle soluzioni $S = \{1, 4\}$.

Usiamo il simbolo $\vee$ per indicare che, affinché il prodotto $a \cdot b$ sia nullo, è sufficiente che sia verificata una delle due equazioni:

$a = 0$ oppure $b = 0$

Questo metodo di risoluzione di un'equazione di grado superiore al primo si può applicare a tutte le equazioni di grado $n \geq 2$ ridotte in forma normale a condizione di saper scomporre il polinomio al primo membro in fattori di primo grado.

Considerata dunque un'equazione nella forma $E(x) = 0$, per trovare le sue soluzioni si procede in questo modo:

- si scompone il polinomio $E(x)$ in fattori tutti di primo grado
- si risolvono le equazioni che si ottengono annullando ciascun fattore della scomposizione.

L'insieme S delle soluzioni è quello che ha per elementi le radici di ciascuna equazione.

$(x+1) \quad (x-2) \quad (x+3) = 0$

$x + 1 = 0$

$x - 2 = 0$

$x + 3 = 0$

$S = \{-1, 2, -3\}$

Risolviamo, ad esempio, i seguenti esercizi.

1. $3x^2 = 6x$

Riduciamo in forma normale e scomponiamo $3x^2 - 6x = 0 \quad \rightarrow \quad 3x(x-2) = 0$

per la legge di annullamento del prodotto deve essere $3x = 0 \ \vee \ x - 2 = 0$

da cui ricaviamo che $x = 0 \ \vee \ x = 2$ quindi $S = \{0, 2\}$.

2. $5x^2 - 80 = 0$

L'equazione è già in forma normale; dividiamo entrambi i membri per 5 e scomponiamo in fattori

$x^2 - 16 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-4)(x+4) = 0$

per la legge di annullamento del prodotto deve essere:

$x - 4 = 0 \ \vee \ x + 4 = 0$ cioè $x = 4 \ \vee \ x = -4$ quindi $S = \{4, -4\}$.

Attenzione agli errori

L'equazione $x(2x+1) = 1$ **non è equivalente** alle due equazioni

$$x = 1 \qquad 2x + 1 = 1$$

Infatti il prodotto di due numeri è 1 in infiniti modi diversi; potrebbe essere

$x = \frac{1}{3}$ e $2x + 1 = 3$ oppure $x = -\frac{2}{5}$ e $2x + 1 = -\frac{5}{2}$

e così via.

Per risolvere l'equazione si procede in questo modo:

$x(2x+1) - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 + x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (x+1)(2x-1) = 0$

e applicando la legge di annullamento del prodotto:

$x + 1 = 0 \ \vee \ 2x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1 \ \vee \ x = \frac{1}{2}$.

Esercizi

Comprensione

1 La legge di annullamento del prodotto afferma che:

a. $a + b = 0$ se $a = 0 \ \vee \ b = 0$ **b.** $a + b = 0$ se $a = 0 \ \wedge \ b = 0$

c. $a \cdot b = 0$ se $a = 0 \ \vee \ b = 0$ **d.** $a \cdot b = 0$ se $a = 0 \ \wedge \ b = 0$

2 L'equazione $(x-2)(x+1) = 4$ è equivalente a:

a. $x - 2 = 4 \ \vee \ x + 1 = 4$ **b.** $x - 2 = 2 \ \vee \ x + 1 = 2$

c. $x - 2 = 0 \ \vee \ x + 1 = 0$ **d.** $x + 2 = 0 \ \vee \ x - 3 = 0$

3 L'equazione $x(3x-1) = 2$ è equivalente a:

a. $x = 2 \ \vee \ 3x - 1 = 0$ **b.** $x = 2 \ \vee \ 3x - 1 = 1$

c. $x - 1 = 0 \ \vee \ 3x + 2 = 0$ **d.** $x = 2 \ \vee \ x = \frac{2}{3x-1}$

4 L'equazione che ha come insieme delle soluzioni $S = \{3, -1, 0\}$ è:

a. $(x-3)(x-1) = 0$ **b.** $(x+3)(x-1) = 0$

c. $x(x+3)(x-1) = 0$ **d.** $x(x-3)(x+1) = 0$

Applicazione

Risolvi le seguenti equazioni particolari di grado superiore al primo.

5 **ESERCIZIO GUIDATO**

$x^2 - x = 0$

L'equazione è di secondo grado ed è già scritta in forma normale. Scomponiamo allora il polinomio $x^2 - x$ in fattori ed applichiamo la legge di annullamento del prodotto:

$$x(x-1)=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \ \vee \ x-1=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \ \vee \ x=1$$

Dunque $S = \{0, 1\}$.

6 **ESERCIZIO GUIDATO**

$x(7-3x) = 2$

Riduciamo prima l'equazione in forma normale $7x - 3x^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 7x + 2 = 0$

scomponiamo in fattori $(x-2)(3x-1) = 0$

applichiamo la legge di annullamento del prodotto

$$x-2=0 \ \vee \ 3x-1=0 \quad \rightarrow \quad x=2 \ \vee \ x=\frac{1}{3}$$

Dunque $S = \left\{2, \frac{1}{3}\right\}$.

7 **ESERCIZIO GUIDATO**

$3x^2 + 3x = x + 1$

$3x(x+1) - (x+1) = 0 \quad \rightarrow \quad (x+1)(\ldots\ldots\ldots) = 0 \quad \rightarrow \quad (\ldots\ldots\ldots) = 0 \ \vee \ (\ldots\ldots\ldots) = 0$

Dunque $S = \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$.

8 $2x + x^2 = 0 \qquad x^2 - 25 = 0 \qquad 7x - x^2 = 0$ $[S = \{0, -2\}; S = \{\pm 5\}; S = \{0, 7\}]$

9 $9x^2 + 21x = 0 \qquad 4x^2 - 12x + 9 = 0 \qquad 4x^2 - 1 = 0$ $\left[S = \left\{0, -\frac{7}{3}\right\}; S = \left\{\frac{3}{2}\right\}; S = \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}\right]$

10 **ESERCIZIO GUIDATO**

$9x^2 - 6x + 1 = 0$

$(3x-1)^2 = 0$

Riflettiamo ora sul fatto che una potenza è zero se è zero la sua base; possiamo dunque risolvere l'equazione:

$$3x - 1 = 0 \qquad \text{da cui ricaviamo} \qquad x = \frac{1}{3}$$

Dunque $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

11 $(x+1)(25x^2 + 10x + 1) = 0 \qquad 3x(x^2 - 2x + 1) = 0$ $\left[S = \left\{-1, -\frac{1}{5}\right\}; S = \{0, 1\}\right]$

12 $(x-3)(x^2-1)=0$ $\quad(x^2-4)(x+1)=0$ $\quad x^2-4x=0$ $\quad[S=\{3,\ \pm1\};\ S=\{-1,\ \pm2\};\ S=\{0,\ 4\}]$

13 $x^2-9=0$ $\quad x^2-6x=0$ $\quad x(x+1)^3=0$ $\quad[S=\{3,-3\};\ S=\{0,\ 6\};\ S=\{-1,\ 0\}]$

14 $x^3-4x=0$ $\quad 2x^3-4x^2=0$ $\quad 20-x-x^2=0$ $\quad[S=\{0,\ \pm2\};\ S=\{0,\ 2\};\ S=\{-5,\ 4\}]$

15 $3x^2-7x+2=0$ $\quad 4x^2-7x-2=0$ $\quad 12x^2-3x=0$ $\quad\left[S=\left\{\frac{1}{3},\ 2\right\};\ S=\left\{-\frac{1}{4},\ 2\right\};\ S=\left\{0,\ \frac{1}{4}\right\}\right]$

16 $8x^3+12x^2-2x-3=0$ $\quad 3x^3-4x^2-3x+4=0$ $\quad\left[S=\left\{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\};\ S=\left\{\pm1,\ \frac{4}{3}\right\}\right]$

17 $x^3+5x^2-14x=0$ $\quad x^4-3x^3-4x^2=0$ $\quad[S=\{-7,\ 0,\ 2\};\ S=\{-1,\ 0,\ 4\}]$

18 $x^3-x^2-2x=0$ $\quad x^3-x-x^2+1=0$ $\quad[S=\{-1,\ 0,\ 2\};\ S=\{\pm1\}]$

19 $x^4=4x^3$ $\quad x^3+5x^2=4(x+5)$ $\quad[S=\{0,\ 4\};\ S=\{-5,\ \pm2\}]$

20 $x^3-4x^2-x+4=0$ $\quad (x^2-x)(x^2+3x-4)=0$ $\quad[S=\{-1,\ 1,\ 4\};\ S=\{0,\ 1,-4\}]$

21 $\dfrac{x^2+x}{x}=0$ $\quad \dfrac{3x^2-x-2}{x-1}=0$ $\quad\left[S=\{-1\};\ S=\left\{-\frac{2}{3}\right\}\right]$

22 $\dfrac{4x^2-1}{2x+1}=0$ $\quad \dfrac{5x^2+3x}{x+1}=0$ $\quad\left[S=\left\{\frac{1}{2}\right\};\ S=\left\{0,-\frac{3}{5}\right\}\right]$

23 $\dfrac{(x-3)(x^2-16)}{(x-4)^2}=0$ $\quad \dfrac{2x(1-x^2)}{x-x^2}=0$ $\quad[S=\{3,\ -4\};\ S=\{-1\}]$

24 $\dfrac{(x^2-1)(2x-3)}{x^2+3x+2}=0$ $\quad \dfrac{(x^2+x)(x-2)}{x^2-2x}=0$ $\quad\left[S=\left\{1,\ \frac{3}{2}\right\};\ S=\{-1\}\right]$

CORREGGI GLI ERRORI

Individua gli errori che sono stati commessi nel risolvere le seguenti equazioni.

25 $x^2-x=3$ $\quad x(x-1)=3$ $\quad x=3\ \vee\ x-1=3$

26 $(x-5)=x(x-5)$ $\quad x=5\ \vee\ x=x-5$

27 $(x+1)(x+2)=0$ $\quad x^2+3x+2=0$ $\quad x(x+3)=2$ $\quad x=2\ \vee\ x+3=2$ $\quad x=2\ \vee\ x=-1$

28 $(x-2)(3x+1)-(x+1)(x-3)=0 \quad\rightarrow\quad (x-2)(3x+1)=(x+1)(x-3)$

$x-2=0 \quad\vee\quad 3x+1=0 \quad\vee\quad x+1=0 \quad\vee\quad x-3=0$

$x=2 \quad\vee\quad x=-\dfrac{1}{3} \quad\vee\quad x=-1 \quad\vee\quad x=3$

29 $(x+1)(x-1)(x-3)(x+4)=0$ $\quad (x^2-1)(x^2+x-12)=0$ $\quad x^4+x^3-13x^2-x+12=0$

Nella risoluzione di questa equazione i passaggi algebrici sono corretti; il metodo impiegato però non porta a determinare le soluzioni. Perché?