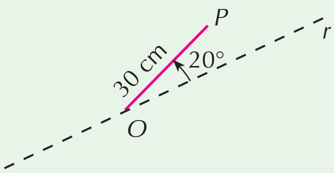
Le coordinate polari

Il sistema di riferimento cartesiano non è il solo modo per individuare la posizione di un punto nel piano.
Pensiamo ad una situazione reale: dobbiamo dare delle indicazioni precise ad un robot che deve tracciare il percorso di un utensile su un piano. Supponiamo che il robot stia procedendo in modo rettilineo in una certa direzione r; per indicargli che deve raggiungere un punto P dalla posizione O in cui si trova (***figura 1***) basta ad esempio dirgli in modo opportuno: «Gira a sinistra di 20° e vai avanti di 30cm». In sostanza, basta fornirgli un numero reale che rappresenta la distanza di P da O (cioè il modulo del vettore $\overrightarrow{OP}$) e l'ampiezza dell'angolo che la direzione r precedente forma con $\overrightarrow{OP}$.

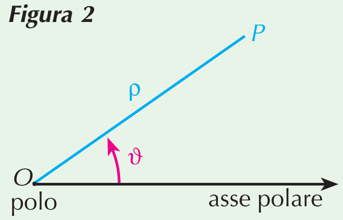
Figura 1



Per individuare un punto nel piano si può far riferimento ad un altro sistema di coordinate, che chiameremo **coordinate polari**, e che viene definito in questo modo. In un piano fissiamo (***figura 2***):

- un punto O che chiamiamo **polo**
- una semiretta orientata avente origine in O, detta **asse polare**
- una unità di misura per i segmenti
- il verso antiorario come verso positivo per la misura degli angoli orientati.

Figura 2



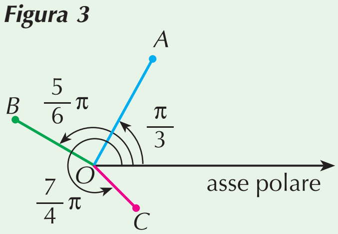
In questo modo, un qualsiasi punto P del piano può essere individuato assegnando la misura ρ del segmento OP e quella ϑ dell'angolo orientato che la semiretta OP forma con l'asse polare. E' evidente che l'angolo ϑ è definito a meno di multipli dell'angolo giro; infatti ogni punto P è definito sia dalla coppia (ρ, ϑ) sia dalla coppia $(\rho, \vartheta + 2k\pi)$.
Viceversa, dati due numeri reali (ρ, ϑ), dove $\rho > 0$ e ϑ è definito a meno di multipli di 2π, il punto P ad essi associato si determina disegnando la semiretta uscente da O che forma l'angolo ϑ con l'asse polare e prendendo su di essa il punto P tale che $\overline{OP} = \rho$.
Possiamo quindi dire che:

> qualunque punto P del piano diverso da O è individuato da una coppia di numeri reali (ρ, ϑ), dove $\rho > 0$, che costituiscono le sue **coordinate polari**. Il numero ρ si dice **modulo** di P e il numero ϑ si dice **anomalia**.

L'angolo ϑ per il quale vale la relazione $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ costituisce l'**anomalia principale** del punto P.
Per completare la definizione includendo anche il punto O in questo sistema, si conviene poi che O abbia modulo 0 e anomalia indefinita; il punto O è quindi definito da una qualunque coppia $(0, \vartheta)$.

Per esempio, fissato un sistema di riferimento polare, i punti $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{6}\pi\right)$, $C\left(1, \frac{7}{4}\pi\right)$ si rappresentano come in ***figura 3***.

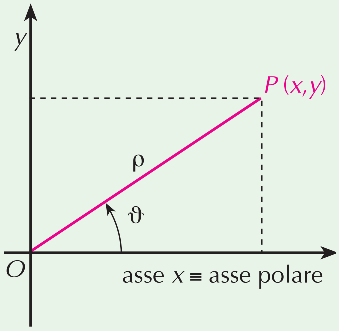
Figura 3



Relazioni fra coordinate polari e coordinate cartesiane

Consideriamo un punto P avente coordinate polari (ρ, ϑ) e fissiamo il sistema cartesiano in modo che l'origine coincida con il polo O e l'asse delle ascisse coincida con l'asse polare (***figura 4***).

Figura 4



Se (x, y) sono le coordinate cartesiane di P, allora sussistono le seguenti relazioni

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}} \qquad (\mathbf{A})$$

Viceversa, se sono note le coordinate cartesiane (x, y) di P, da queste relazioni e applicando il teorema di Pitagora, ricaviamo che le sue coordinate polari (ρ, ϑ) sono espresse dalle relazioni:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \vartheta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \sin \vartheta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (\mathbf{B})$$

Per esempio:

- se $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ sono le coordinate polari di un punto A, le sue coordinate cartesiane sono

$$x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \qquad y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \qquad \text{quindi} \quad A\left(\sqrt{3}, 1\right);$$

- se un punto B ha coordinate cartesiane $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$, le sue coordinate polari sono

$$\rho = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4 \qquad \cos \vartheta = -\frac{1}{2} \qquad \sin \vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{quindi} \quad B\left(4, \frac{2}{3}\pi\right).$$

L'equazione di una curva in coordinate polari

Il grafico di una curva si può descrivere mediante un'equazione che lega le coordinate dei suoi punti una volta che sia stato fissato un sistema di riferimento.

Se l'equazione della curva è data in forma cartesiana, la si può scrivere in coordinate polari applicando le formule di trasformazione (**A**) precedenti; viceversa, se l'equazione è data in forma polare, si può trovare la corrispondente equazione cartesiana applicando le trasformazioni (**B**). Per esempio:

- la circonferenza avente equazione cartesiana $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$ ha come equazione polare la seguente:

$$(\rho \cos \vartheta)^2 + (\rho \sin \vartheta)^2 + 2(\rho \cos \vartheta) - 4(\rho \sin \vartheta) - 1 = 0$$

  cioè, sviluppando i calcoli $\rho^2 + \rho(2\cos \vartheta - 4\sin \vartheta) - 1 = 0$

- la curva di equazione polare $2\cos \vartheta = \rho \sin^2\vartheta$ ha equazione cartesiana:

$$2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2$$

  cioè, sviluppando i calcoli $x = \frac{1}{2}y^2$ che corrisponde a una parabola con vertice nell'origine e asse di simmetria coincidente con l'asse x.

Esercizi

In un sistema di riferimento polare, individua i punti che hanno le seguenti coordinate.

1 $P\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ $Q\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ $R\left(7, -\frac{\pi}{6}\right)$ $S\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ $T\left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$

2 $P\left(6, \frac{\pi}{4}\right)$ $Q\left(4, -\frac{3}{4}\pi\right)$ $R\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)$ $S\left(\sqrt{2}, \frac{5}{6}\pi\right)$ $T\left(\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}\pi\right)$

Determina le coordinate cartesiane dei punti che hanno le seguenti coordinate polari.

3 $P\left(5, \frac{3}{4}\pi\right)$ $Q\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$ $R\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\pi\right)$ $S\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

4 $P\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ $Q(1, \pi)$ $R\left(4, \frac{2}{3}\pi\right)$ $S\left(10, -\frac{3}{4}\pi\right)$

5 $P\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$ $Q\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ $R\left(4, \frac{5}{6}\pi\right)$ $S\left(2, \frac{3}{4}\pi\right)$

6 $P\left(5, -\frac{\pi}{6}\right)$ $Q(2, -\pi)$ $R\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ $S\left(1, -\frac{\pi}{2}\right)$

Determina le coordinate polari dei punti aventi le seguenti coordinate cartesiane.

7 $P(3, -3)$ $Q(-\sqrt{3}, 3)$ $R\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}, -\frac{5}{2}\right)$

8 $P(-5, 5\sqrt{3})$ $Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $R(1, -2)$

9 $P(-3, 3)$ $Q(10, 5\sqrt{2})$ $R(0, 3)$

10 $P(0, -5)$ $Q(-2, 4\sqrt{2})$ $R(3, -\sqrt{3})$

11 Scrivi l'equazione polare della retta passante per i punti di coordinate cartesiane $A(1, 1)$ e $B(0, 2)$. $\left[\sqrt{2} = \rho \cos\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right)\right]$

12 Scrivi l'equazione polare della retta che ha equazione cartesiana $x - 2y - 1 = 0$. $[\rho\,(\cos\vartheta - 2\sin\vartheta) = 1]$

13 Scrivi in coordinate polari l'equazione della bisettrice del primo e terzo quadrante di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. $\left[\vartheta = \frac{\pi}{4}\right]$

14 Scrivi l'equazione polare della circonferenza che ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 9$. $[\rho = 3]$

15 Scrivi l'equazione polare della parabola $y = x^2 + 3$. $[\rho\sin\vartheta - \rho^2\cos^2\vartheta = 3]$

16 Scrivi l'equazione polare della circonferenza che ha centro nel punto C di coordinate cartesiane $(1, 1)$ e raggio $\sqrt{2}$. $[\rho^2 - 2\rho\,(\cos\vartheta + \sin\vartheta) = 0]$

17 Scrivi l'equazione polare della circonferenza che ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 - ax - ay = 0$. $[\rho = a\,(\sin\vartheta + \cos\vartheta)]$

18 Scrivi l'equazione polare dell'iperbole di equazione cartesiana $x^2 - y^2 = 1$. $[\rho^2\cos 2\vartheta = 1]$

19 Scrivi in coordinate polari l'equazione della curva di equazione cartesiana $x^2 - y^2 = a^2$.

$\left[\rho^2 = \dfrac{a^2}{\cos 2\vartheta}\right]$

20 Data l'equazione in coordinate polari $\rho^2 - 4\rho \cos\left(\vartheta - \dfrac{\pi}{6}\right) + 3 = 0$, trasformala in coordinate cartesiane.

$\left[x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - 2y + 3 = 0\right]$

21 Trasforma in coordinate cartesiane l'equazione polare $\rho \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \vartheta\right) = 1$ e, dopo averne individuato il tipo, rappresentala graficamente.

$\left[\sqrt{3}x + y = 2\right]$

22 Trasforma in coordinate cartesiane l'equazione polare $\rho = 2 \sin \vartheta$ e, dopo averne individuato il tipo, rappresentala graficamente.

$\left[x^2 + y^2 - 2y = 0\right]$

23 Trasforma in coordinate cartesiane l'equazione polare $\rho^2 \sin 2\vartheta = 6$ e, dopo averne individuato il tipo, rappresentala graficamente. [iperbole equilatera di equazione $xy = 3$]