Il ragionamento logico e la deduzione

Siamo finalmente nella condizione di poter affrontare il discorso sulla conduzione corretta di un ragionamento, anche se non è certamente possibile essere esaustivi sull'argomento che comporta conoscenze molto più ampie di quelle che abbiamo. Il problema che vogliamo affrontare è dunque il seguente:

se sappiamo che alcune proposizioni sono vere e queste costituiscono la premessa di un ragionamento, quali sono le conseguenze logiche che si possono trarre?

La risposta a questa domanda è data da alcune regole di deduzione.

La regola di particolarizzazione

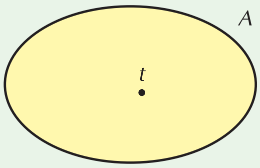
Tutti i pesci vivono nell'acqua — premessa vera
quindi Lillo, che è il mio pesce rosso, vive nell'acqua. — conseguenza vera

Questo ragionamento si basa sulla seguente considerazione (***figura 1***):

se per tutti gli x di un insieme A vale la proprietà p, allora per un particolare elemento t di A vale p:

$$\forall x \in A, \quad p(x) \text{ è V} \quad \wedge \quad t \in A \qquad \Longrightarrow \qquad p(t) \text{ è V}.$$

Figura 1



Non fare confusione fra i simboli:
- $\rightarrow$ *è un connettivo che rappresenta l'implicazione materiale*
- $\Longrightarrow$ *rappresenta la deduzione logica e si applica ad un ragionamento*

Il simbolo $\Longrightarrow$ indica la deduzione logica.
Nel caso dell'esempio, A è l'insieme dei pesci, p è la proprietà enunciata dal predicato "vivere nell'acqua", t è il pesce rosso Lillo.
Notiamo che A è un sottoinsieme dell'insieme di verità definito da p.
Riferendoci all'esempio, ci sono altri elementi che vivono nell'acqua oltre ai pesci.

Il modus ponens

Se Leo è un gatto allora è un felino.
Ma Leo è un gatto.
Allora è un felino.

Questo ragionamento è formato da due sole proposizioni: a: «Leo è un gatto» b: «Leo è un felino» e ci dice che:

se è vera l'implicazione $a \rightarrow b$ ed è vera la premessa a, allora è vera anche la conseguenza b.

Il modus ponens si può rappresentare anche con il seguente schema:

$$\begin{array}{rl} a \rightarrow b & \textit{premessa} \\ a & \textit{premessa} \\ \hline b & \textit{deduzione} \end{array}$$

La correttezza di questa deduzione è confermata dalla tavola di verità dell'implicazione che puoi vedere a lato.
Il solo caso in cui $a \rightarrow b$ è V e anche a è V è quello che corrisponde alla prima riga della tabella dalla quale si deduce che anche b deve essere vero.
Si è soliti rappresentare questo tipo di ragionamento con la scrittura

a	b	$a \rightarrow b$
$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$$(a \rightarrow b) \wedge a \quad \Longrightarrow \quad b$$

nella quale si evidenzia che le due proposizioni $a \rightarrow b$ e a sono le premesse, mentre b è la deduzione logica.

Il modus ponens e i teoremi

Un **teorema** è una proposizione che esprime proprietà generali di oggetti, per esempio figure geometriche o numeri, quando queste presentano determinate caratteristiche.
I teoremi si possono sempre scrivere sotto forma di implicazione materiale, dove le proposizioni che costituiscono la premessa si chiamano **ipotesi** e le proposizioni che rappresentano la conseguenza si chiamano **tesi**.

In un teorema, quando un'ipotesi I implica una tesi T, si dice che:
- *I è condizione sufficiente per T*
- *T è condizione necessaria per I*

Sono per esempio teoremi alcune proprietà che conosci dalla scuola di base:
- se un triangolo è isoscele (ipotesi), allora ha due angoli congruenti (tesi);
- se la somma delle cifre di un numero è un multiplo di 3 (ipotesi), allora quel numero è divisibile per 3 (tesi).

Il sapere che le precedenti due proposizioni sono vere e il sapere che un oggetto particolare rende vera l'ipotesi, permette di affermare che quell'oggetto rende vera anche la tesi.
Relativamente ai due teoremi precedenti si può quindi dire per esempio che:
- se in una figura geometrica c'è un particolare triangolo che è isoscele, allora si può affermare che quel triangolo ha due angoli congruenti
- il numero 37215, la cui somma delle cifre vale 18, è divisibile per 3.

Il modus tollens

Se un numero è divisibile per 10, allora è pari
c'è un numero che non è pari
quindi quel numero non è divisibile per 10.

Questo ragionamento è formato da due proposizioni: a: «il numero dato è divisibile per 10», b: «il numero è pari» e ci dice che:

se è vera l'implicazione $a \rightarrow b$ ed è vera la proposizione $\overline{b}$ (cioè b è F), allora è vera anche la proposizione $\overline{a}$ (cioè a è F).

Il modus tollens si può rappresentare anche con il seguente schema:

$$\begin{array}{rl} a \rightarrow b & \text{premessa} \\ \overline{b} & \text{premessa} \\ \hline \overline{a} & \text{deduzione} \end{array}$$

La correttezza di questa deduzione è confermata dalla tavola di verità dell'implicazione che vedi a lato.
Il solo caso in cui $a \rightarrow b$ è V e b è F è quello che corrisponde all'ultima riga della tabella dalla quale si deduce che anche a deve essere falsa.

a	b	$a \rightarrow b$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	**F**	**V**

Si è soliti rappresentare questo tipo di ragionamento con il seguente schema

$$(a \rightarrow b) \wedge \overline{b} \quad \Longrightarrow \quad \overline{a}$$

nel quale si evidenzia che le due proposizioni $a \rightarrow b$ e $\overline{b}$ sono le premesse, mentre $\overline{a}$ è la deduzione logica.

Il modus tollens e i teoremi

Questo schema di ragionamento è quello che ci permette di dire che se un oggetto non verifica la tesi di un teorema, non può avere le caratteristiche specificate dall'ipotesi. Riferendoci ancora ai teoremi precedenti:
- se un triangolo non ha due angoli uguali, allora non può essere isoscele;
- se un numero non è divisibile per 3, allora la somma delle sue cifre non può essere un multiplo di 3.

La deduzione per assurdo

Un ulteriore schema logico fondamentale è il seguente:

se è vera l'implicazione $a \to \overline{b}$ ed è vera la proposizione b, allora è vera anche la proposizione $\overline{a}$.
In simboli: $(a \to \overline{b}) \wedge b \quad \Longrightarrow \quad \overline{a}$

La deduzione per assurdo si può rappresentare con il seguente schema:

$$\begin{array}{rl} a \to \overline{b} & \text{premessa} \\ b & \text{premessa} \\ \hline \overline{a} & \text{deduzione} \end{array}$$

La validità di questo schema può essere dedotta ancora una volta analizzando la tavola di verità dell'implicazione riportata a lato.

a	**b**	$\boldsymbol{a \to \overline{b}}$
V	V	F
V	F	V
$\boxed{\textbf{F}}$	$\boxed{\textbf{V}}$	$\boxed{\textbf{V}}$
F	F	V

Questo tipo di deduzione viene usata nella conduzione delle dimostrazioni di molti teoremi e avrai occasione di applicarla soprattutto in geometria.

Esempio 1.
Se un quadrilatero è un parallelogramma, allora i lati opposti sono congruenti; *ABCD* è un parallelogramma. Che cosa si può dedurre?

Se a: «un quadrilatero è un parallelogramma» e b: «il quadrilatero ha i lati opposti congruenti» la premessa si può scrivere in questo modo: $(a \to b) \wedge a$
Applicando la regola del modus ponens deduciamo che *ABCD* ha i lati opposti congruenti.

Esempio 2.
Se due rette si intersecano in un punto allora, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli alterni che non sono congruenti; due rette r e s, tagliate da una trasversale, formano angoli congruenti. Che cosa si può dire di r e s?

Proposizione a: «due rette si intersecano in un punto»
Proposizione b: «le rette, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli alterni congruenti»
Premessa: $(a \to \overline{b}) \wedge b$
Si tratta allora dello schema di deduzione per assurdo; la sola conseguenza che si può trarre è $\overline{a}$, quindi che le due rette non si intersecano in un punto.

Esempio 3.
Se Maria ha sposato Carlo, allora è ricca; ma Maria non è ricca. Che cosa si può dedurre?

Se a: «Maria ha sposato Carlo» e b: «Maria è ricca»

lo schema di ragionamento è quello del modus tollens: $(a \to b) \wedge \overline{b} \quad \Longrightarrow \quad \overline{a}$

Dobbiamo quindi concludere che Maria non ha sposato Carlo.

Esempio 4.
Se Anna ha una laurea in lingue orientali, allora sa parlare in cinese; ma Anna non è laureata in lingue orientali. Si può dedurre che Anna non sa parlare in cinese?

Purtroppo questo ragionamento non rientra in nessuno degli schemi che abbiamo studiato e non è possibile fare alcuna deduzione. In effetti Anna potrebbe saper parlare cinese anche senza essere laureata in lingue orientali, magari perché è cinese o perché ha vissuto in Cina per molti anni; non è però da escludere che non sappia pronunciare nemmeno una parola di cinese.