AREA 3: GLI INTEGRALI

1

L'INTEGRALE INDEFINITO

Per ricordare

★ La funzione $F(x)$ è la **primitiva** di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a,b]$ se per tutti i punti di tale intervallo è $F'(x) = f(x)$.
Una funzione $f(x)$ ha infinite primitive che sono però definite a meno di una costante additiva; l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$ è il suo **integrale indefinito**:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Per esempio, la primitiva della funzione $f(x) = x^3$ è

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c$$

perché la derivata della funzione $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$ è $F'(x) = f(x) = x^3$.

★ Per trovare l'integrale indefinito delle funzioni elementari basta leggere da destra a sinistra, con alcuni accorgimenti, la tabella delle derivate elementari; si trova così che:

- $\int x^k dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + c$ e in particolare $\int dx = x + c$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\text{cotan } x + c$
- $\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$ e in particolare $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

★ L'integrale indefinito gode di alcune proprietà:

- si può portare fuori dal simbolo di integrazione una costante moltiplicativa

$$\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx \qquad \text{con } k \in R$$

- l'integrale della somma di due o più funzioni è la somma degli integrali

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

★ Per calcolare l'integrale indefinito di una funzione che non è elementare si usano diversi metodi a seconda della forma della funzione.

- **Integrazione per scomposizione.** E' un'applicazione delle due proprietà precedenti e si applica quando $f(x)$ è la somma di più funzioni.

  Per esempio:

$$\int \left(3\cos x + \frac{2}{\sin^2 x}\right)dx = 3\int \cos x\, dx + 2\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = 3\sin x - 2\cot an\, x + c$$

$$\int \left(4\sqrt{x} - \frac{3}{x^5}\right)dx = 4\int x^{\frac{1}{2}}\, dx - 3\int x^{-5}\, dx = 4 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} + c = \frac{8}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{4x^4} + c$$

- **Integrazione per sostituzione.** Si usa quando, operando un cambio di variabile, si riesce ad ottenere un integrale immediato o più facilmente calcolabile; posto $x = g(t)$, si sfrutta l'uguaglianza

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t)dt$$

  Per esempio: $\displaystyle\int \frac{1}{4+\sqrt{x}}dx$ ponendo $\sqrt{x} = t$, cioè $x = t^2$, si ha che $dx = 2t\, dt$.

  Con questa sostituzione l'integrale diventa:

$$\int \frac{1}{4+t} \cdot 2t\, dt = 2\int \frac{t}{4+t}dt = 2\int \frac{4+t-4}{4+t}dt = 2\left(\int dt - 4\int \frac{1}{4+t}dt\right) = 2t - 8\ln|t+4| + c$$

  Operando la sostituzione inversa si ottiene infine che:

$$\int \frac{1}{4+\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} - 8\ \ln\left(\sqrt{x}+4\right) + c$$

- **Integrazione per parti.** Si usa quando la funzione integranda può essere vista come prodotto di due funzioni di cui una si può interpretare come la derivata di una funzione nota; se $f'(x)$ è la derivata della funzione nota e $g(x)$ è l'altro fattore del prodotto, la formula di integrazione per parti è la seguente:

$$\int g(x) \cdot f'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$$

  Per esempio: $\displaystyle\int \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{f'(x)}\, dx = \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{f(x)} - \int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{f(x)}\, dx = xe^x - e^x + c$

★ In particolare, applicando uno dei metodi di integrazione, si ricavano le seguenti formule:

- $\int \frac{1}{x^2+k^2}dx = \frac{1}{k} \arctan\frac{x}{k}+c$ e $\int \frac{1}{[f(x)]^2+k^2}\cdot f'(x)dx = \frac{1}{k} \arctan\frac{f(x)}{k}+c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{k}+c$ e $\int \frac{1}{\sqrt{k^2-[f(x)]^2}}\cdot f'(x)dx = \arcsin\frac{f(x)}{k}+c$

★ L'integrazione delle funzioni che si presentano nella forma $\frac{A(x)}{B(x)}$ (funzioni razionali fratte), dove $A(x)$ è un polinomio di grado inferiore al polinomio $B(x)$, se non rientra in uno dei casi precedenti, ha una procedura particolare che si può riassumere nei seguenti passi:

- si scompone, se possibile, il denominatore della frazione
- si scrive la funzione come somma di altre frazioni ciascuna delle quali ha come denominatore un fattore della scomposizione
- si integra ciascuna frazione ottenuta.

Nel caso particolare in cui la frazione si possa ricondurre alla forma $\frac{1}{x^2+px+q}$ occorre distinguere tre casi a seconda delle caratteristiche del polinomio al denominatore; posto $\Delta = p^2-4q$:

- se $\Delta = 0 \quad \rightarrow \quad x^2+px+q$ è il quadrato di un binomio e l'integrazione è immediata.

  Per esempio: $\int \frac{1}{x^2+10x+25}dx = \int \frac{1}{(x+5)^2}dx = -\frac{1}{x+5}+c$

- se $\Delta > 0 \quad \rightarrow$ dette x_1 e x_2 le radici dell'equazione $x^2+px+q=0$, la funzione si può scrivere nella forma $\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$ con $A, B \in R$; trovati i due numeri A e B l'integrazione è immediata.

  Per esempio: $\int \frac{1}{x^2+x-2}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+2)}dx = \int \left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}\right)dx$

  Per trovare A e B eseguiamo la somma delle due frazioni:

  $$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x(A+B)+2A-B}{(x-1)(x+2)}$$

  Affinché la frazione ottenuta sia uguale a quella data occorre che sia:

  $$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B=1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

  L'integrale dato è quindi equivalente a:

  $$\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2|+c$$

- se $\Delta < 0$ il denominatore della frazione non si può scomporre e si deve cercare di scriverlo come somma del quadrato di un binomio con un numero in modo da poter utilizzare la formula di integrazione dell'arcotangente.

  Per esempio:

$$\int \frac{1}{x^2-2x+4}dx = \int \frac{1}{(x^2-2x+1)+3}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+3}dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}+c$$

Esercizi

Calcola i seguenti integrali indefiniti applicando i vari metodi di integrazione.

1 $\int \left(\sin^2\frac{x}{2}+x^2\right)dx$ $\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{x^3}{3}+c\right]$

2 $\int \frac{6x^2}{1+x^6}dx$ $[2\arctan x^3]$

3 $\int \left(\frac{4\tan^3 x}{\cos^2 x}+3\frac{\ln x}{x}\right)dx$ $\left[\tan^4 x+\frac{3}{2}\ln^2 x+c\right]$

4 $\int (3\tan^2 x+4)dx$ $[x+3\tan x+c]$

5 $\int \frac{2x^3}{\cos^2(x^4)}dx$ $\left[\frac{1}{2}\tan x^4+c\right]$

6 $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $[3\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+c]$

7 $\int \frac{x(x^2-1)}{3\cos^2(2x^4-4x^2)}dx$ $\left[\frac{1}{24}\tan(2x^4-4x^2)+c\right]$

8 $\int \frac{1}{3(x-\sqrt{x})}dx$ $\left[\frac{2}{3}\ln|\sqrt{x}-1|+c\right]$

9 $\int \frac{7e^x}{5+5e^{2x}}dx$ $\left[\frac{7}{5}\arctan e^x+c\right]$

10 $\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}dx$ $\left[\frac{e^{2x}}{2}-2e^x+4\ln(e^x+2)+c\right]$

11 $\int \frac{\arcsin x-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\left[\frac{1}{2}\arcsin^2 x+\sqrt{1-x^2}+c\right]$

12 $\int \sin 4x \sin 6x \, dx$ $\left[\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{20}\sin 10x + c\right]$

13 $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x} dx$ $\left[-\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)\right]$

14 $\int x^2 \sin 2x \, dx$ (poni $x^2 = t$) $\left[\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{2}x^2 \cos 2x + c\right]$

15 $\int \sqrt{9-x^2} \, dx$ (poni $x = 3\sin t$) $\left[\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + c\right]$

16 $\int \frac{1}{x \ln 2x} dx$ $[\ln(\ln 2x) + c]$

17 $\int \frac{1}{3x \cos^2 \ln 2x} dx$ $\left[\frac{1}{3}\tan(\ln 2x) + c\right]$

18 $\int \frac{1}{\sqrt{16+x^2}} dx$ (poni $\sqrt{16+x^2} = t - x$) $\left[\ln\left(\sqrt{16+x^2} + x\right) + c\right]$

19 $\int \frac{1}{\sqrt{9+4x^2}} dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{9+4x^2} + 2x\right) + c\right]$

20 $\int \frac{2}{2+\sin x} dx$ (poni $\tan\frac{x}{2} = t$) $\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + c\right]$

21 $\int \frac{3}{\sqrt{x^2-4}} dx$ $\left[3\ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| + c\right]$

22 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $\left[-\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + c\right]$

23 $\int \frac{\sqrt{x-3}}{x+5} dx$ (poni $\sqrt{x-3} = t$) $\left[2\sqrt{x-3} - 4\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{x-3}}{2\sqrt{2}} + c\right]$

24 $\int x \sin 2x \, dx$ $\left[\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + c\right]$

25 $\int \cos^2(3x+4) dx$ $\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin(6x+8) + c\right]$

26 $\int x^2 \arctan x \, dx$ $\left[\frac{1}{3}x^3 \arctan x + \frac{1}{6}\ln(x^2+1) - \frac{1}{6}x^2 + c\right]$

27 $\int e^{-2x} \sin 2x \, dx$ $\left[-\frac{1}{4}e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x) + c\right]$

28 $\int x^2 \cos x \, dx$ $[\sin x\,(x \sin x - 2) + 2x\cos x + c]$

29 $\int \arcsin x \, dx$ $\left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c\right]$

30 $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $\left[x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + c\right]$

31 $\int \frac{1}{x^2} \ln x \, dx$ $\left[-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + c\right]$

32 $\int e^{3x} \ln(1 + e^{3x}) dx$ $\left[\frac{1}{3} e^{3x} [\ln(e^{3x} + 1) - 1] + \frac{1}{3} \ln(e^{3x} + 1) + c\right]$

33 $\int \sin x \cdot \ln(\cos x) dx$ $[\cos x (1 - \ln \cos x) + c]$

34 $\int \sqrt{1 - 5x^2} \, dx$ $\left[\frac{\sqrt{5}}{10} \arcsin(\sqrt{5}x) + \frac{x\sqrt{1-5x^2}}{2} + c\right]$

35 $\int \cos^3 x \operatorname{cotan} x \, dx$ $\left[\frac{1}{3}\cos^3 x + \cos x + \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + c\right]$

36 $\int \frac{3}{2x(\ln^2 x + 3 \ln x - 4)} dx$ $\left[\frac{3}{10} \ln\left|\frac{\ln x - 1}{\ln x + 4}\right| + c\right]$

37 $\int \frac{e^{3x}}{2 + e^{2x}} dx$ $\left[e^x - \sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^x\right) + c\right]$

38 $\int \arctan(x - 2) dx$ $\left[(x-2)\arctan(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x^2 - 4x + 5) + c\right]$

39 $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 3x - 6}} dx$ (poni $\sqrt{x^2 + x - 2} = t - x$) $\left[\frac{\sqrt{3}}{3} \ln\left|2\sqrt{x^2 + x - 2} + 2x + 1\right| + c\right]$

40 $\int \cos(3x) \cdot \cos(9x) dx$ $\left[\frac{1}{12}\left(\frac{\sin 12x}{2} + \sin 6x\right) + c\right]$

41 $\int \sqrt{2 + x^2} \, dx$ $\left[\ln\left(\sqrt{x^2+2} + x\right) + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 2} + c\right]$

42 $\int \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ $\left[2(x - \sqrt{1 - x^2} \arcsin x) + c\right]$

43 $\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin x} dx$ $[2 \sin x - 2\ln(\sin x + 1) + c]$

44 $\int \frac{\cos^2 2x}{e^{2x}} dx$ $\left[\frac{e^{-2x}}{10}(\sin 4x - \cos^2 2x - 2) + c\right]$

45 $\int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx$ $[2\ln(\ln x) + \ln x + c]$

46 $\int \frac{3 \cos x}{3 \sin^2 x - 5 \sin x - 2} dx$ $\left[-\frac{3}{7} \ln\left|\frac{1 + 3 \sin x}{2 - \sin x}\right| + c\right]$

47 $\int \frac{4e^{3x} + e^{6x}}{1 + e^{6x}} dx$ $\left[\frac{4}{3}\arctan e^{3x} + \frac{1}{6}\ln(1 + e^{6x}) + c\right]$

48 $\int \frac{x^2 - 4x + 6}{x^3 - 1 - 3x^2 + 3x} dx$ $\left[\ln|x - 1| + \frac{4x - 7}{2(x-1)^2} + c\right]$

49 $\int \frac{\sqrt{1 + \ln^2 x}}{x \ln^4 x} dx$ $\left[-\frac{\sqrt{(1 + \ln^2 x)^3}}{3 \ln^3 x} + c\right]$

Calcola i seguenti integrali indefiniti di funzioni razionali fratte.

50 $\int \frac{3x^2+4}{x^2+1}\,dx$ $\quad [3x+\arctan x+c]$

51 $\int \frac{16x+1}{16x^2+24x+9}\,dx$ $\quad \left[\frac{11}{4(4x+3)}+\ln|4x+3|+c\right]$

52 $\int \frac{2x-5}{x^2+3x+5}\,dx$ $\quad \left[\ln(x^2+3x+5)-\frac{16}{\sqrt{11}}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{11}}+c\right]$

53 $\int \frac{x-5}{x^2-12x+11}\,dx$ $\quad \left[\frac{2}{5}\ln|x-1|+\frac{3}{5}\ln|x-11|+c\right]$

54 $\int \frac{x^3-4x}{x^2+3x+4}\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{1}{2}\ln(x^2+3x+4)+3\sqrt{7}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+c\right]$

55 $\int \frac{2x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{5}{6}\ln|x+2|+c\right]$

56 $\int \frac{x+3}{x^3-1}\,dx$ $\quad \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3}-\frac{2}{3}\ln(x^2+x+1)+\frac{4}{3}\ln(x-1)+c\right]$

57 $\int \frac{x^2-4}{x^3+x^2+4x}\,dx$ $\quad [\ln(x^2+x+4)-\ln|x|+c]$

58 $\int \frac{x^2+x}{x^2+x+3}\,dx$ $\quad \left[x-\frac{6}{\sqrt{11}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{11}}+c\right]$

59 $\int \frac{x^2+2}{x^3-x^2-x+1}\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{3}{4}\ln|x+1|-\frac{3}{2x-2}+c\right]$

60 $\int \frac{(x-2)^2}{x^3-1}\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{3}\ln|x^3-1|-\frac{8}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c\right]$

61 $\int \frac{1}{(x+2)(x-1)^2}\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{9}\ln|x+2|-\frac{1}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{3(x-1)}+c\right]$

62 $\int \frac{5}{(x^2+4)(x-1)^2}\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{5}\ln(x^2+4)-\frac{2}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{10}\arctan\frac{x}{2}+c\right]$

PROBLEMI

Per ognuna delle seguenti funzioni $f(x)$, trova la primitiva $F(x)$ che soddisfa alla condizione indicata.

63 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ sapendo che passa per l'origine. $\quad \left[F(x)=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+\frac{1}{3}\right]$

64 $f(x)=\frac{\ln x}{x^3}$ sapendo che passa per il punto $P\left(1,\,-\frac{1}{4}\right)$. $\quad \left[F(x)=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}\right]$

65 $f(x)=e^x\sin x$ sapendo che passa per il punto $P(0,\,1)$. $\quad \left[F(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+\frac{3}{2}\right]$

66 $f(x)=\ln(x^2+1)$ sapendo che $F(0)=1$. $\quad [F(x)=x\ln(x^2+1)-2x+2\arctan x+1]$

67 $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$ sapendo che interseca l'asse x nel punto di ascissa 2.
$\left[F(x) = \dfrac{1}{2}\ \ln\left|\dfrac{(x-1)^3}{x+1}\right| + \dfrac{1}{2}\ \ln 3\right]$

68 $f(x) = -\dfrac{e^{\frac{x+1}{3x}}}{3x^2}$ sapendo che passa per il punto $P(2,\ \sqrt{e})$. $\left[F(x) = e^{\frac{x+1}{3x}}\right]$

69 $f(x) = x \arctan x$ sapendo che interseca l'asse y nel punto di ordinata 3.
$\left[F(x) = \dfrac{x^2}{2} \arctan x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} \arctan x + 3\right]$

70 $f(x) = \dfrac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} - 1}$ sapendo che ammette come asintoto orizzontale destro la retta $y = 1$.
$\left[F(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\dfrac{2e^x + 1}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{3 - \sqrt{3}\pi}{3}\right]$

71 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3x + 2}$ sapendo che $F(3) = 0$. $\left[F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 3x + \ln\dfrac{(x-2)^8}{|x-1|} - \dfrac{27}{2} + \ln 2\right]$

72 $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 + 3}$ sapendo che passa per il punto $P(0,\ 1)$. $\left[F(x) = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \arctan\dfrac{\sqrt{6}x}{3} + 1\right]$

73 $f(x) = \dfrac{2}{x(x^2 - 1)}$ sapendo che ha come asintoto orizzontale la retta $y = \dfrac{1}{2}$.
$\left[F(x) = \ln\dfrac{|x^2 - 1|}{x^2} + \dfrac{1}{2}\right]$

74 $f(x) = (2x-1)^3 + 2x - 1$ sapendo che ha minimo assoluto uguale a zero.
$\left[F(x) = 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x + \dfrac{3}{8}\right]$

75 $f(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ sapendo che $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = -1$. $\left[F(x) = \dfrac{e^x - x}{x}\right]$

76 $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{\sqrt{x - x^2}}$ sapendo che ha massimo assoluto che vale 2. $\left[F(x) = 2\sqrt{x - x^2} + 1\right]$

77 $f(x) = (x-1) \ln x$ sapendo che ha massimo assoluto uguale a 2 nell'intervallo $(0,\ 2]$.
$\left[F(x) = \left(\dfrac{1}{2}x^2 - x\right)\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + x + 1\right]$

78 $f(x) = \ln(x+1)$ sapendo che ha minimo assoluto uguale a 1.
$[F(x) = (x+1)\ln(x+1) - x + 1]$

79 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ sapendo che ha come asintoto orizzontale la retta $y = 4$.
$\left[F(x) = \ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right| + 4\right]$

80 $f(x) = \sin^2 x \cos x$ sapendo che ha come massimo assoluto $\dfrac{4}{3}$ nell'intervallo $[0,\ 2\pi]$.
$\left[F(x) = \dfrac{1}{3}\sin^3 x + 1\right]$

81 $f(x) = \dfrac{e^{4x} + 1}{e^{2x}}$ sapendo che l'ordinata del suo punto di flesso vale 1.
$\left[F(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} - \dfrac{1}{2}e^{-2x} + 1\right]$

82 Trova la primitiva $F(x)$ della funzione di equazione $y = \frac{x^2}{x^6 - 2ax^3 + a^2}$ sapendo che ha come asintoto verticale la retta $x - 2 = 0$ e che passa per il punto $P(1, 1)$.

$\left[F(x) = -\frac{1}{3(x^3-8)} + \frac{20}{21}\right]$

83 Data la funzione $f(x) = 3\cot an\, x \cdot \ln(\sin x)$, determina la primitiva $F(x)$ definita nell'intervallo $(0, \pi)$ che incontra la retta $y = x$ nel punto di ascissa $\frac{\pi}{2}$. Verifica poi che la curva ottenuta è simmetrica rispetto alla retta parallela all'asse y che passa per il suo punto di minimo relativo.

$\left[F(x) = \frac{3}{2}\ln^2 \sin x + \frac{\pi}{2}\right]$

84 Trova la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ sapendo che interseca la curva di equazione $y = -\frac{3}{4}x^4 - 2x$ nel suo punto di ascissa 1. Studia la curva ottenuta e verifica che essa è simmetrica rispetto alla retta parallela all'asse y che passa per il suo punto di massimo relativo.

$\left[F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - 3\right]$

85 Trova la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = ax\, e^{x^2-1}$ sapendo che passa per il punto $P\left(0, \frac{a}{2e}\right)$; verifica poi che P è un punto estremante e stabilisci quali condizioni deve verificare il parametro a affinché P sia un punto di massimo relativo. Studia poi la funzione per $a = -1$.

$\left[F(x) = \frac{a}{2}e^{x^2-1}\right]$

86 Trova la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$ sapendo che l'equazione $F(x) = 3\ln|x+1|$ ha una sola soluzione reale. Determina poi un valore approssimato degli zeri di $F(x)$.

$\left[F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\ln|x+1| + 2;\ x = -1{,}18 \ \vee\ x = -0{,}70\right]$

87 Fra le primitive della funzione $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x^2 - 6x + 9}$ determina quella che ha come asintoto obliquo la retta di equazione $y = x + 3$ e studia la funzione $F(x)$ così ottenuta. Considerata poi la retta r di equazione $y = -4$, inscrivi nella parte di piano delimitata da $F(x)$ e da r il rettangolo di area massima avente un lato su r.

$\left[F(x) = \frac{x^2}{x-3};\ \text{retta del lato del rettangolo } y = \frac{7-\sqrt{97}}{2}\right]$

88 Fra le primitive della funzione $f(x) = \frac{3x}{4\sqrt{16 - x^2}}$ determina quella che interseca la retta di equazione $y = 2$ nei punti di ascissa -4 e 4. Verificato che si tratta di una semiellisse, trova le coordinate del centro e la lunghezza dei semiassi.

$\left[F(x) = 2 - \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2};\ (0, 2);\ \text{semiassi } 4 \text{ e } 3\right]$

89 Trova la primitiva di $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ che interseca la funzione $g(x) = -2e^{\sqrt{x}}$ nel punto di ascissa 1 e studia la funzione così ottenuta.

$\left[F(x) = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) - 2e\right]$

90 Sia $F(x)$ la primitiva della funzione $f(x) = x \sin x$ che interseca la $g(x) = -\sin x$ in un punto di ascissa $\frac{\pi}{2}$. Verifica che $F(x)$ è simmetrica rispetto al punto $A(0, -2)$ e, sfruttando anche la simmetria evidenziata, studiane l'andamento. Trova poi le coordinate del punto $P(x, F(x))$ con $x \in [0, \pi]$ per il quale è massima oppure minima la differenza fra l'ascissa e l'ordinata.

$\left[\begin{array}{l} F(x) = \sin x - x \cos x - 2; \text{ funzione differenza } h(x) = x \cos x - \sin x + x + 2 \\ \text{i punti di massimo e di minimo si trovano mediante risoluzione grafica dell'equazione } \sin x = \dfrac{1}{x} \\ \text{massimo in } x = 1{,}11; \text{ minimo in } x = 2{,}77 \end{array} \right]$

91 Fra le primitive della funzione $f(x) = e^x(1 + x)$ determina quella $F(x)$ che ha come asintoto orizzontale sinistro la retta $y = 1$ e studia la funzione ottenuta determinando, in particolare, le coordinate del suo punto di flesso A. Detto poi P un punto della $F(x)$ appartenente al tratto di curva che si trova a destra del punto di flesso, sia $g(x)$ la funzione che esprime il rapporto fra l'ascissa e l'ordinata di P; determina il punto P per il quale la funzione g è massima.

$\left[\begin{array}{l} F(x) = xe^x + 1; \ A\left(-2, 1 - \dfrac{2}{e^2}\right); \ g(x) = \dfrac{x}{x\, e^x + 1}; \\ \text{il punto di massimo si ottiene dal confronto grafico delle curve } y = e^x \text{ e } y = \dfrac{1}{x^2} \text{ ed è } x = 0{,}7 \end{array} \right]$

AREA 3: GLI INTEGRALI

2

L'INTEGRALE DEFINITO

Per ricordare

★ Data una funzione $f(x)$ continua e positiva in un intervallo $[a,b]$, si chiama **trapezoide** la parte di piano delimitata dalla curva corrispondente, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$.
L'area di un trapezoide è il limite comune delle due successioni $\{s_n\}$ e $\{S_n\}$ dei plurirettangoli inscritti e circoscritti e prende il nome di **integrale definito** della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$. In simboli esso si indica con la scrittura $\int_a^b f(x)dx$.

★ Le proprietà dell'integrale definito sono le seguenti:

- se gli estremi di integrazione sono uguali, l'integrale è uguale a zero: $\int_a^a f(x)dx = 0$
- se si scambiano gli estremi di integrazione, l'integrale cambia segno: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- se a, b, c sono punti qualunque di un intervallo in cui $f(x)$ è continua, l'integrale fra a e b è uguale alla somma degli integrali fra a e c e fra c e b: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- l'integrale fra a e b della somma di due o più funzioni continue è uguale alla somma degli integrali fra a e b di ciascuna funzione:
$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + ... + \int_a^b f_n(x)dx$$
- l'integrale fra a e b di una funzione continua $f(x)$ moltiplicata per una costante k è uguale a k volte l'integrale della funzione:
$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$
- se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a,b]$, esiste almeno un punto $c \in [a,b]$, per il quale vale la relazione $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$; il valore assunto dalla funzione nel punto c, cioè $f(c)$, si dice **valor medio** della funzione.

★ Considerata una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a,b]$, il suo integrale calcolato fra a ed un punto x variabile in $[a,b]$ è esso stesso una funzione che si chiama **funzione integrale;** tale funzione ha espressione

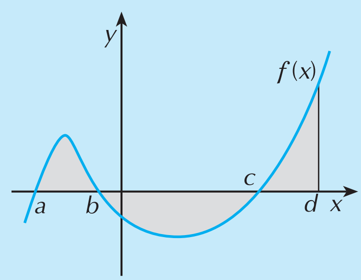
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \text{con } x \in [a,b]$$

La funzione integrale ha come proprietà che la sua derivata coincide con $f(x)$, cioè $F'(x) = f(x)$.

★ Per calcolare il valore di un integrale definito si usa la **formula di Newton-Leibniz;** se $\varphi(x)$ è una primitiva di $f(x)$, si ha che:

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[\varphi(x)\Big]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$$

★ Per calcolare l'area di una regione finita di piano delimitata da una funzione continua $f(x)$ e dall'asse delle ascisse in un intervallo $[a,b]$ si deve calcolare l'integrale definito di $f(x)$ fra a e b quando $f(x)$ è positiva o nulla, l'opposto di questo integrale se $f(x)$ è negativa.
In pratica, si individuano gli intervalli dell'asse x nei quali la funzione $f(x)$ è positiva e quelli in cui è negativa e poi si calcolano gli integrali definiti in questi intervalli prendendoli con segno positivo quando $f(x) \geq 0$, con segno negativo quando $f(x) < 0$.
Con riferimento alla prima figura, l'area della parte in colore è espressa da:

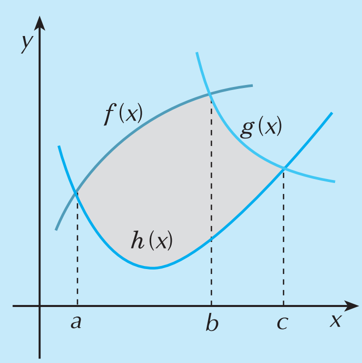


$$\int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$$

Se la superficie di cui calcolare l'area è delimitata da più funzioni come nella seconda figura, si seguono i seguente passi:

- si individuano le ascisse dei punti di intersezione di ciascuna coppia di curve
- si calcolano gli integrali definiti in ciascuno degli intervalli individuati da tali punti, ad iniziare da uno di essi e percorrendo il contorno della figura in senso orario:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c g(x)dx + \int_c^a h(x)dx$$



★ Con il calcolo di un integrale definito si possono anche calcolare misure di volumi, di superfici di rotazione, di lunghezze di linee curve. Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a,b]$:

- il volume V del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse x di $f(x)$ si calcola con la formula $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$
- la lunghezza ℓ della linea individuata da $f(x)$ fra a e b si calcola con la formula:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

- l'area S della superficie generata dalla rotazione di $f(x)$ attorno all'asse x si calcola con la formula

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

★ Quando uno degli estremi di integrazione tende all'infinito oppure è un punto di discontinuità per la funzione $f(x)$, allora l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ si dice **improprio**. I casi che si possono presentare sono i seguenti:

- se uno degli estremi di integrazione è infinito:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

- se in uno degli estremi di integrazione la funzione non è continua:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to0^+}\int_{a+\delta}^b f(x)dx \qquad \text{se è discontinua in } a$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to0^+}\int_a^{b-\delta} f(x)dx \qquad \text{se è discontinua in } b$$

- se esiste un punto di discontinuità c nell'intervallo $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to0^+}\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \lim_{\delta\to0^+}\int_{c+\delta}^b f(x)dx$$

La funzione $f(x)$ è integrabile se i limiti indicati esistono finiti, non è integrabile in caso contrario.

ESERCIZI

Calcola il valore dei seguenti integrali definiti.

1 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{9+\cos^2 x}dx$ $\left[\frac{1}{3}\arctan\frac{1}{3}\right]$

2 $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x+3}{1+9x^2}dx$ $[2\arctan 6]$

3 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$ $[\arctan 2]$

4 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x\sin^2 x\,dx$ $\left[\frac{7\sqrt{2}}{120}\right]$

5 $\displaystyle\int_3^4 \frac{8x}{x^3-x^2-2x+2}dx$ $\left[-4\sqrt{2}\ln\left(\frac{51-10\sqrt{2}}{49}\right)-4\ln\frac{9}{8}\right]$

6 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^6}{x^4-x^2-2}dx$ $\left[\frac{4}{3}+\frac{\pi}{12}+\frac{4\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}-1)}{3}\right]$

7 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx$ $\left[\frac{6-3\sqrt{3}-\pi}{12}\right]$

8 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos 2x}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$

9 $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{\sqrt{-9x^2+18x-4}}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\ \arcsin\frac{2}{5}\sqrt{5}\right]$

Determina il valore di k per il quale sono verificate le seguenti uguaglianze.

10 $\int_1^2 \frac{x+k}{x^2+4x+4}\,dx = \ln\frac{4}{3}-\frac{1}{12}$ $[k=1]$

11 $\int_2^3 \frac{x^2-2x+k}{x-1}\,dx = \ln 2+\frac{3}{2}$ $[k=2]$

12 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\cos x}{\sin^3 x}\,dx = \frac{1}{4}$ $\left[k=\frac{1}{2}\right]$

13 $\int_1^k \frac{1}{x+2\sqrt{x}}\,dx = 2\ln\frac{4}{3}$ $[k=4]$

14 $\int_0^k x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{7}{3}$ $[k=\sqrt{3}]$

15 $\int_k^{k+1} \frac{2x}{x-1}\,dx = 2\ln 2+2$ $[k=2]$

16 $\int_{\frac{k}{2}}^{k} (x^2-2x+3)dx = \frac{7}{3}$ $[k=2]$

Calcola il valor medio delle seguenti funzioni negli intervalli indicati.

17 $f(x)=\frac{2x^3}{1+x^2}$ in $[0, \sqrt{e}]$ $\left[\frac{e-\ln(e+1)}{\sqrt{3}}\right]$

18 $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\left[\frac{4\left(\sqrt{2}-1\right)}{\pi}\right]$

19 $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$ in $[1, 3]$ $[\sqrt{2}-\arctan\sqrt{2}]$

Delle seguenti funzioni calcola, quando possibile, il valor medio e l'ascissa c del punto in cui assumono tale valore.

20 $f(x)=\frac{2-x}{x+1}$ in $[0, 2]$ $\left[\frac{3\ln 3-2}{2};\ c=\frac{2}{\ln 3}-1\right]$

21 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$ in $[-1, 3]$ $\left[\frac{3\sqrt{2}-10}{4};\ c=\sqrt{3\sqrt{5}-6}\right]$

22 $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$ in $[-3, 2]$ $[f(x) \text{ non continua}]$

23 $f(x) = 1 - \ln x$ in $[1, e]$ $\left[\dfrac{e-2}{e-1};\ c = e^{\frac{1}{e-1}}\right]$

24 $f(x) = |x-1|x+1$ in $[-2, 1]$ $\left[-\dfrac{1}{2};\ x = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right]$

25 Stabilisci per quale valore del parametro k la funzione di equazione $y = \dfrac{kx}{x-1}$ ha valor medio uguale a $\log_{\frac{3}{2}} e + 1$ nell'intervallo $[3, 4]$. $\left[k = \dfrac{1}{\ln \frac{3}{2}}\right]$

26 Considerato l'insieme dei triangoli ABC inscritti in una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 4$cm, esprimi la loro area in funzione della misura x di uno dei cateti; determina quindi il valor medio di tale area e la lunghezza dei cateti in corrispondenza dei quali viene assunto tale valore. $\left[\dfrac{8}{3};\ \dfrac{2\sqrt{3}(\sqrt{5}\pm 1)}{3}\right]$

27 Data la funzione $f(x) = ax^2 + 2$, determina il valore del parametro a in modo che l'area del trapezoide individuato dalla curva, dall'asse delle ascisse e dalle rette di equazioni $x = 0$ e $x = 2$ sia equivalente al rettangolo che ha per base il segmento dell'asse delle ascisse di estremi 0 e 2 e altezza $h = \dfrac{14}{3}$. $[a = 2]$

28 Un corpo in caduta libera in assenza di attrito possiede, in ogni istante, una velocità $v(t) = gt$ dove g è l'accelerazione di gravità; calcola la velocità media raggiunta dal corpo nell'intervallo di tempo $[0, 5]$. $\left[v = \dfrac{5}{2}g\right]$

SUL CALCOLO DI AREE

29 Dopo aver studiato la funzione di equazione $y = \dfrac{x^2-3}{x^2+3}$ e aver costruito il suo grafico, calcola l'area della regione finita di piano da essa delimitata insieme all'asse x. $[\sqrt{3}(\pi - 2)]$

30 Calcola l'area della regione di piano delimitata dalle funzioni che hanno le seguenti equazioni:

a. $y = \dfrac{x}{2} + 1$ e $y = \sqrt{x+2}$ $\left[\dfrac{4}{3}\right]$

b. $y = x(\pi - x)$ e $y = \sin x$ $\left[\dfrac{\pi^3}{6} - 2\right]$

31 Dopo aver costruito i grafici delle funzioni di equazione $y = \dfrac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$ e $y = \dfrac{11}{45}x^2 + 1$, calcola l'area della regione finita di piano da essi delimitata. $\left[40 \arctan \dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{5}\right]$

32 Dopo aver costruito i grafici delle funzioni $f(x) = \dfrac{x+5}{(2x+1)^2}$ e $g(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$, calcola l'area della regione finita di piano da esse delimitata insieme all'asse y. $[4 \ln 3]$

33 Dopo aver disegnato i grafici delle funzioni di equazioni $y = x^3 + 2$ e $y = 2 - 2\sqrt{1-(x+1)^2}$, calcola l'area della regione finita di piano da esse delimitata insieme alla retta $x = -1$. $\left[\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{4}\right]$

34 Dopo aver studiato la funzione di equazione $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$ ed averne costruito il grafico, calcola l'area della regione di piano delimitata dalla funzione stessa, dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = \dfrac{1}{2}$ e $x = 2$. $\left[\dfrac{3}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\right]$

35 Dopo aver costruito il grafico della funzione $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x$, calcola l'area delle due regioni finite di piano da essa delimitate insieme all'asse x. $\left[\dfrac{37}{12}\right]$

36 Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 2x + 2$ e dalla sua simmetrica rispetto all'origine. $\left[\dfrac{16}{3}\sqrt{2}\right]$

37 Calcola l'area della regione di piano definita dal sistema $\begin{cases} y \geq x^2 - 2x + 2 \\ x + y - 8 \leq 0 \\ x - y + 6 \geq 0 \end{cases}$. $\left[\dfrac{44}{3}\right]$

38 Calcola l'area della regione finita di piano definita dal sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 8 \\ 2y \geq x^2 \\ 2y \leq \left(1 - 4\sqrt{2}\right)x + 4\sqrt{2} \end{cases}$.

$\left[\pi + \sqrt{2} + \dfrac{3}{4}\right]$

39 Calcola l'area della regione di piano racchiusa dalle due curve di equazioni $x = 2y^2 + 1$ e $x = 3$. $\left[\dfrac{8}{3}\right]$

40 Calcola l'area della regione di piano delimitata dalle curve di equazioni $y = 2x^2 - 5x + 4$ e $y = \dfrac{1}{x}$. $\left[\dfrac{17}{24} - \ln 2\right]$

41 Calcola l'area della regione di piano delimitata dal grafico delle due funzioni $f(x) = x^2 - x$ e $g(x) = -x^2 + 2x$. Considerata poi la retta che passa per i loro punti di intersezione, calcola l'area di ciascuna delle due parti nelle quali viene suddivisa la regione individuata precedentemente. $\left[\dfrac{9}{8}, \dfrac{9}{16}, \dfrac{9}{16}\right]$

42 Determina i coefficienti della parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che sia tangente all'asse x nel punto di ascissa 2 e che l'area della regione finita di piano da essa delimitata insieme alla retta $y = 2$ sia uguale a $\dfrac{16}{3}$. $\left[y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2\right]$

43 Considerata l'iperbole equilatera avente per asintoti gli assi cartesiani e passante per il punto di coordinate $(4, 1)$ e la parabola di equazione $y = ax^2$, determina il valore del parametro $a > 0$ in modo che l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve e dell'asse x nell'intervallo $[0, 4]$ sia uguale a $\dfrac{4}{3} + 4\ln 2$. $\left[a = \dfrac{1}{2}\right]$

44 Scrivi l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine degli assi e passante per i punti di coordinate $(5, 0)$ e $\left(1, \dfrac{8\sqrt{6}}{5}\right)$ e l'equazione dell'iperbole avente un vertice di coordinate $(2, 0)$ e eccentricità uguale a $\frac{\sqrt{37}}{5}$; calcola l'area di ciascuna delle regioni di piano in cui l'ellisse rimane suddivisa dall'iperbole.

$\left[\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1;\ \frac{x^2}{4}-\frac{25y^2}{48}=1;\ 40 \arctan\frac{1}{3}-\frac{8}{5}\sqrt{3}\ \ln\left(\sqrt{3}+2\right);\ 20\pi+\frac{16}{5}\sqrt{3}\ \ln\left(\sqrt{3}+2\right)-80 \arctan\frac{1}{3}\right]$

SUL CALCOLO DI VOLUMI

45 Dopo aver costruito il grafico della funzione di equazione $y=\frac{1}{2}\left(6x-x^3\right)$ mettendone in evidenza le simmetrie, calcola il volume del solido che si ottiene dalla rotazione completa intorno all'asse x delle due regioni finite di piano delimitate dalla curva e dall'asse delle ascisse.

$\left[\frac{288\sqrt{6}\pi}{35}\right]$

46 Calcola il volume del solido generato da una rotazione completa intorno alla retta di equazione $x=-3$ della parte di piano limitata dalla parabola $x=\frac{1}{9}y^2$ e dalle rette $y=-3$ e $y=3$.

$\left[\frac{336}{5}\pi\right]$

47 Calcola il volume del solido generato da una rotazione completa intorno all'asse y delle due regioni finite di piano delimitate dalla curva di equazione $3x+2y-y^3=0$ e dall'asse y.
(Suggerimento: studia la funzione considerando y come variabile indipendente)

$\left[\frac{128\sqrt{2}\pi}{945}\right]$

48 Calcola il volume del solido generato dalla rotazione intorno alla retta $x=4$ della parte di piano limitata dalla curva di equazione $6x=-y^2+24$ e dall'asse y.

$\left[\frac{256\sqrt{6}\pi}{5}\right]$

49 Considerata la retta r, bisettrice del primo e terzo quadrante, e la curva Γ di equazione $y=\frac{x+1}{x-1}$, sia A la regione finita di piano da esse delimitata insieme all'asse x nell'intervallo $[1, 3]$. Calcola il volume del solido che si ottiene mediante una rotazione completa attorno all'asse x della regione A.

$\left[2\pi\left(\ln 2+1+\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)\right]$

50 Sia A la regione finita di piano delimitata dalla funzione $f(x)=\sin x-1$ nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Calcola il rapporto fra i volumi dei solidi che si ottengono facendo ruotare A intorno all'asse x e all'asse y.

$\left[\frac{3\pi-8}{\pi^2-8}\right]$

SUL CALCOLO DI LUNGHEZZE DI ARCHI E AREE DI SUPERFICI DI ROTAZIONE

51 Determina la lunghezza dell'arco di parabola di equazione $y=1-9x^2$ situato nel semipiano delle ordinate positive e delimitato dai punti in cui la curva interseca l'asse delle ascisse.

$\left[\frac{\ln\left(\sqrt{37}+6\right)+6\sqrt{37}}{18}\right]$

52 Calcola il perimetro del triangolo mistilineo individuato dalla curva di equazione $y=2x\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta di equazione $x=1$.

$\left[\frac{20\sqrt{10}+79}{27}\right]$

53 Considerata la curva di equazione $y = x^2 - 2x$ ed il suo arco OA avente per estremi i punti di intersezione con l'asse delle ascisse, calcola la lunghezza di OA e l'area della superficie da esso generata in una rotazione completa attorno all'asse x.

$\left[\frac{2\sqrt{5} - \ln(\sqrt{5} - 2)}{2}; \; \frac{14\sqrt{5} - 17\ln(\sqrt{5} - 2)}{16}\pi\right]$

54 La retta $y + x - 2 = 0$ interseca la parabola $y = x^2$ nel punto A di ascissa positiva e l'asse x nel punto B. Indicata con O l'origine degli assi cartesiani, calcola il perimetro del triangolo mistilineo OAB e l'area della superficie che si ottiene facendo ruotare tale triangolo attorno all'asse x.

$\left[\frac{\ln(\sqrt{5} + 2) + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 8}{4}; \; \frac{[18\sqrt{5} + 32\sqrt{2} - \ln(\sqrt{5} + 2)]\pi}{32}\right]$

55 Considerata la superficie sferica come rotazione completa di una semicirconferenza attorno all'asse x, dimostra che l'area di tale superficie è $4\pi r^2$.

56 Una curva ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 1 - 2\sin t \end{cases}$; calcola la lunghezza dell'arco che si ottiene per $t \in [0, \pi]$.
(Suggerimento: scrivi la curva in forma algebrica mediante i seguenti passaggi

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ 1 - y = 2\sin t \end{cases} \quad \to \quad x^2 + (1-y)^2 = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t \quad \to \quad x^2 + (1-y)^2 = 4$$

Per $t \in [0, \pi]$ si genera quindi una semicirconferenza) $[2\pi]$

57 Una curva ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3\cos t - 1 \\ y = 2 + 3\sin t \end{cases}$; calcola la lunghezza dell'arco che si ottiene per $t \in [0, 2\pi]$. $[6\pi]$

58 Una curva ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = t^2 \end{cases}$; calcola la lunghezza dell'arco che si ottiene per $t \in [-1, 1]$. $\left[\frac{\ln(\sqrt{17} + 4) + 4\sqrt{17}}{8}\right]$

59 Studia la curva di equazione $4y^2 = 9x^3$ e tracciane il grafico; calcola poi la lunghezza dell'arco OA situato nel primo quadrante, essendo O l'origine degli assi e A il punto di ascissa 1.

$\left[\frac{97\sqrt{97} - 64}{486}\right]$

SUGLI INTEGRALI IMPROPRI

Stabilisci se convergono o divergono i seguenti integrali impropri e, nel caso in cui convergano, trova il loro valore.

60 $\int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}dx$ $\qquad \int_{-5}^{5} \sqrt{\frac{5 + x}{5 - x}}dx$ $\qquad [\pi; 5\pi]$

61 $\int_{-1}^{1} \frac{3x - 1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ $\qquad \int_{0}^{+\infty} \frac{3x^2}{x^3 + 1}dx$ $\qquad [-6; \text{diverge}]$

62 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 3x + 6}dx$ $\qquad \int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$ $\qquad \left[\frac{2\pi}{\sqrt{15}}; 1\right]$

63 $\int_{-3}^{1} \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}dx$ $\qquad \int_{0}^{3} \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}dx$ $\qquad [-\pi; 3]$

64 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^3}\,dx$ $\int_0^1 \frac{(x+1)\ln x}{x}\,dx$ $\left[\frac{1}{4};\ \text{diverge}\right]$

65 $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$ $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ $\left[2\sqrt{2};\ -\frac{4}{3}\right]$

PROBLEMI

66 Calcola l'area della regione di piano delimitata dalla funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, dagli assi cartesiani e dalla retta $x = 1$. $\left[\frac{3}{2}\right]$

67 Stabilisci se è finita l'area della regione di piano delimitata dalla curva di equazione $y = \frac{1}{1+4x^2}$ e dal suo asintoto orizzontale e, in caso affermativo, calcolane il valore. $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

68 Calcola l'area della regione di piano delimitata dalla curva di equazione $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, dal suo asintoto verticale, dall'asse x e dalla retta $x = 2$; verifica poi che l'area della parte di piano delimitata dalla curva stessa e dai suoi asintoti verticale e orizzontale non è finita. $[2]$

69 Dopo aver costruito il grafico della funzione di equazione $y = (x-2)e^x$, verifica che la regione illimitata di piano da essa delimitata insieme all'asse x nel semipiano negativo delle ordinate ha area finita e calcola il valore di tale area. $[e^2]$

70 Costruito il grafico della curva di equazione $y = \frac{1}{(x+1)^2}$, verifica che la parte di piano da esso delimitata insieme all'asse x per $x \geq 0$ ha area finita e che il suo valore è il doppio dell'area delimitata dalla curva stessa, dall'asse x e dalla retta $x = 1$. [area complessiva: 1]

71 Studia la funzione di equazione $y = |\sin^2 x \cos x|$ mettendo in evidenza eventuali simmetrie e tracciane il grafico; calcola poi l'area della regione finita di piano da essa delimitata insieme all'asse x nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. $\left[\frac{4}{3}\right]$

72 Studia la funzione di equazione $y = \frac{x-3}{x(x-2)^2}$ e tracciane il grafico; detto A il suo punto d'intersezione con l'asse x dimostra che l'area della parte di piano da essa delimitata insieme all'asse x a destra del punto A è finita e calcolane il valore. $\left[\frac{3}{4}\ln 3 - \frac{1}{2}\right]$

73 Dopo aver costruito il grafico della funzione di equazione $y = \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}$ verifica che le due parti di piano delimitate rispettivamente dalla curva e dal suo asintoto orizzontale per $x < 0$ e per $x \geq 2$ hanno area finita e calcolane il valore. $\left[\frac{1}{2},\ \frac{e-1}{2}\right]$

74 Studia la funzione di equazione $y = (x^2-4)e^{1-x}$ e tracciane il grafico; considera poi la regione finita di piano R_1 delimitata dalla curva e dall'asse delle ascisse e la regione illimitata R_2 delimitata dalla curva e dal suo asintoto orizzontale. Verifica che anche R_2 ha area finita e calcola il rapporto fra le due aree. $\left[\text{area } R_1 = \frac{2e^4+6}{e};\ \text{area } R_2 = \frac{6}{e};\ \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{3}e^4 + 1\right]$

75 Studia la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^4}$ e tracciane il grafico. Dopo aver verificato che la parabola $y=x^2-1$ è ad essa tangente nel punto di ascissa 1, trova l'equazione della tangente comune r; indicata con R_1 la regione finita di piano delimitata dalla retta r, dalla parabola e dall'asse y e con R_2 la regione illimitata definita dalla $f(x)$ e dall'asse x nel primo quadrante, calcola il rapporto fra le rispettive aree.

$\left[\text{area } R_1=\dfrac{1}{3};\ \text{area } R_2=\dfrac{2}{3};\ \text{rapporto}=\dfrac{1}{2}\right]$

76 Costruisci il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ e stabilisci se ha area finita la regione di piano da essa delimitata insieme all'asse y e alla retta $x=k$ con k numero reale finito. In caso affermativo, determina le coordinate di un punto P su f in modo che l'area della parte di piano delimitata dal grafico di f, dalla retta OP e dall'asse y sia uguale a 2.

$\left[P\left(\dfrac{16}{9},\ \dfrac{3}{4}\right)\right]$

77 Data la famiglia di funzioni $f(x)=\dfrac{\ln^\alpha x}{x}$, determina per quali valori del parametro reale α ha valore finito l'area della parte di piano compresa tra il grafico di f e l'asse x per $x\geq 2$. $[\alpha<-1]$

78 Dopo aver costruito il grafico della funzione di equazione $y=\sin x-\cos x$ nell'intervallo $[-\pi,\ \pi]$, sia G la regione finita di piano delimitata dalla curva e dall'asse x che appartiene al semipiano negativo delle ordinate. Calcola l'area di G e il volume del solido che si ottiene da una rotazione completa di G attorno all'asse x.

$[2\sqrt{2};\ \pi^2]$

79 Tracciato il grafico della curva di equazione $y=(x^2-4x+3)^2$, considera la regione di piano che la curva individua con la retta $y=1$ e calcolane l'area. Successivamente considera l'arco di curva compreso fra i due minimi relativi e calcola il volume del solido generato da una rotazione completa attorno all'asse x della regione che tale arco individua con l'asse stesso.

$\left[\dfrac{16\sqrt{2}}{15};\ \dfrac{256\pi}{315}\right]$

80 Sia G la regione finita di piano delimitata dalle curve $\gamma: y=x^2$ e $\gamma': y=\dfrac{2}{x^2+1}$ che si intersecano in A e B. Calcola:

a. l'area di G; $\left[\pi-\dfrac{2}{3}\right]$

b. il volume del solido ottenuto da una rotazione completa di G attorno all'asse x; $\left[\pi\left(\pi+\dfrac{8}{5}\right)\right]$

c. il volume del solido ottenuto da una rotazione completa di G attorno all'asse y; $\left[2\ln 2-\dfrac{1}{2}\right]$

d. la lunghezza dell'arco AB appartenente alla curva γ. $\left[\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)\right]$

81 Determina i coefficienti della cubica di equazione $y=ax^3+bx^2+cx+d$ in modo che abbia due punti estremanti di ascisse 0 e $\dfrac{2}{3}$, intersechi l'asse x solo nel punto di ascissa 2 e che l'area della parte di piano da essa delimitata insieme agli assi cartesiani e la retta $x=2$ sia uguale a $\dfrac{20}{3}$.

$[y=-x^3+x^2+4\ \vee\ y=x^3-x^2-4]$

82 Data la funzione $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{cx+1}$, determina i valori reali dei coefficienti a, b, c in modo che essa abbia un punto estremamente in $A(1, 2)$ e che intersechi l'asse y nel punto di ordinata 3. Studia la funzione ottenuta e tracciane il grafico. Considerata poi la parte di piano delimitata dalla funzione f e dal suo asintoto obliquo nell'intervallo $[0, k]$, con k numero reale positivo, esprimi la sua area A in funzione di k e studia la funzione $A(k)$ così ottenuta.

$\left[y = \dfrac{x^2+3}{x+1};\ A(k) = 4\ln(k+1)\right]$

83 La circonferenza di centro $C(3, 3)$ è tangente in $P(1, 2)$ ad una parabola avente per asse la retta $x = 3$. Dopo aver trovato l'equazione della parabola, calcola l'area della parte di piano compresa fra le due curve.

$\left[y = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + \dfrac{9}{2};\ \text{area} = \dfrac{22}{3} - 5\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right]$

84 Dimostra che la funzione $f(x) = \displaystyle\int_0^x (3 - 2\sin^2 2t)dt$ è invertibile dovunque è definita e calcola poi il valore della derivata della funzione inversa nel punto y_0 che corrisponde a $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$. $\left[\dfrac{2}{3}\right]$

85 Considerata la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x (1 - \cos t)dt$, dimostra che $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{6}$.