Concetti chiave e regole

Angoli e misure

Gli angoli si possono misurare in **gradi** oppure in **radianti**:

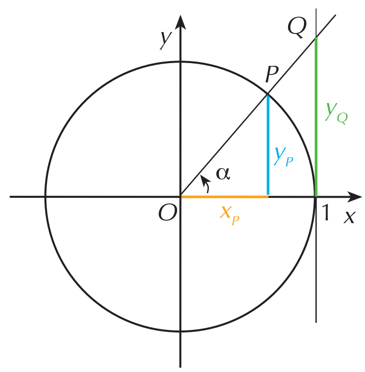
- se α è un angolo al centro di una circonferenza di raggio r che insiste su un arco AB:

$$\alpha \text{ (in radianti)} = \frac{\text{lunghezza dell'arco } AB \text{ rettificato}}{r}$$

- se x è la misura di α in radianti e y è quella in gradi, per passare da un sistema all'altro si usa la proporzione $x : y = \pi : 180$

Le funzioni goniometriche fondamentali e i grafici

Considerata la circonferenza goniometrica (avente centro nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali e raggio unitario) ed un angolo α avente vertice nell'origine e un lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse, si definisce:



- $\sin\alpha$ l'ordinata del punto P
- $\cos\alpha$ l'ascissa del punto P
- $\tan\alpha$ l'ordinata del punto Q

Si introducono poi le seguenti funzioni che sono le reciproche di quelle fondamentali:

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Le relazioni fondamentali

Le relazioni fondamentali che legano le funzioni goniometriche sono:

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

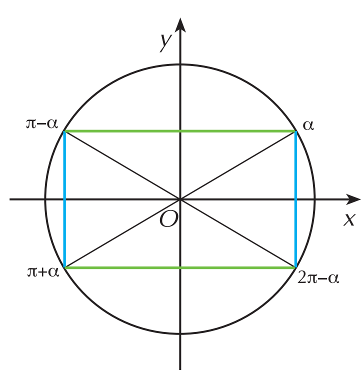
Da esse si ricavano le formule di:

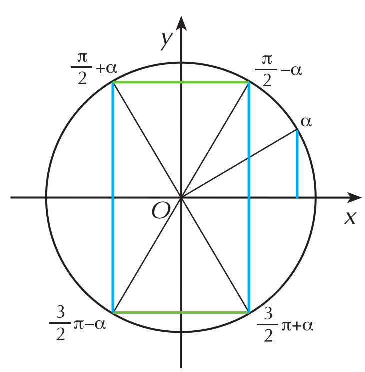
- $\sin\alpha$ in funzione di $\cos\alpha$: $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$
- $\sin\alpha$ in funzione di $\tan\alpha$: $\sin\alpha = \pm\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$
- $\cos\alpha$ in funzione di $\sin\alpha$: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$
- $\cos\alpha$ in funzione di $\tan\alpha$: $\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

La seconda relazione fondamentale consente poi di stabilire che il coefficiente angolare di una retta rappresenta la tangente dell'angolo α che essa forma con la direzione positiva dell'asse x: $m = \tan\alpha$.

Gli archi associati

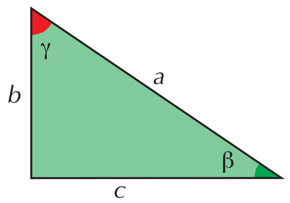
Gli angoli associati ad un angolo α sono quelli che hanno i valori delle funzioni goniometriche complessivamente uguali a quelli di α. Per ricavare i valori del seno, del coseno e della tangente di tali angoli basta ricordare i seguenti disegni:





I triangoli rettangoli

I triangoli rettangoli godono delle proprietà enunciate dai seguenti teoremi:



- **Primo teorema.** In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'ipotenusa per
  - il seno dell'angolo opposto: $b = a \sin \beta$ $\quad c = a \sin \gamma$
  - il coseno dell'angolo adiacente: $b = a \cos \gamma$ $\quad c = a \cos \beta$
- **Secondo teorema.** In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'altro cateto per
  - la tangente dell'angolo opposto: $b = c \tan \beta$ $\quad c = b \tan \gamma$
  - la cotangente dell'angolo adiacente: $b = c \operatorname{cotan} \gamma$ $\quad c = b \operatorname{cotan} \beta$