MATEMATICA *per* TUTTI

Le equazioni e le disequazioni frazionarie

Le equazioni frazionarie

1 **ESERCIZIO SVOLTO**

Le equazioni frazionarie. Quando **l'equazione è frazionaria**, cioè l'incognita compare al denominatore, il suo dominio non è più l'intero insieme R, perché da esso bisogna eliminare quei valori che annullano i denominatori; inoltre, una volta trovata la soluzione, bisogna vedere se essa appartiene al dominio dell'equazione. Osserva gli esempi che seguono.

a. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x-1} = 0$

Affinché i denominatori non siano nulli deve essere $x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 1$.

Il dominio dell'equazione è allora $D = R - \{0, 1\}$.

Calcoliamo il denominatore comune e riduciamo l'equazione in forma normale

$$\cancel{x(x-1)} \cdot \frac{x-1-3x}{\cancel{x(x-1)}} = 0 \qquad -2x-1=0 \qquad -2x=1 \qquad x=-\frac{1}{2}$$

Poiché $-\dfrac{1}{2} \in D$ l'insieme delle soluzioni è $S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

b. $\dfrac{2}{3x} + \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{2+x}{3x(x+1)}$

Deve essere $x \neq 0 \wedge x \neq -1$ quindi $D = R - \{0, -1\}$.

$$\cancel{3x(x+1)} \cdot \frac{2(x+1)+12x}{\cancel{3x(x+1)}} = \frac{2+x}{\cancel{3x(x+1)}} \cdot \cancel{3x(x+1)}$$

$$2x + \cancel{2} + 12x = \cancel{2} + x \qquad 14x - x = 0 \qquad 13x = 0 \qquad x = 0$$

Questa volta $0 \notin D$, la soluzione non è accettabile e quindi $S = \varnothing$.

2 Risolvi ora da solo le seguenti equazioni:

a. $\dfrac{x-3}{x-2} - \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{-5}{x^2-3x+2}$

b. $\dfrac{3}{x^2-4} - \dfrac{x-1}{2-x} = \dfrac{x+1}{x+2}$

c. $\dfrac{2x-1}{x+2} + \dfrac{6}{x^2+5x+6} = \dfrac{2x}{x+3}$

d. $\dfrac{4-x}{x-3} - \dfrac{x}{x-2} + 1 = \dfrac{3-x^2}{x^2-5x+6}$

Le disequazioni frazionarie

3 **ESERCIZIO SVOLTO**

Le disequazioni frazionarie. Una disequazione è **frazionaria** se l'incognita compare al denominatore di almeno una frazione, per esempio è frazionaria la disequazione $\frac{1}{2}+\frac{1}{3x+1}<2$.

Una disequazione frazionaria, dopo aver eseguito le operazioni indicate, si può sempre scrivere nella forma

$$\frac{A(x)}{B(x)}>0 \quad \left(\frac{A(x)}{B(x)}\geq 0\right) \qquad \text{oppure} \qquad \frac{A(x)}{B(x)}<0 \quad \left(\frac{A(x)}{B(x)}\leq 0\right)$$

Per esempio la disequazione precedente diventa:

$$\frac{-9x-1}{2(3x+1)}<0 \qquad \text{cioè, cambiando i segni al numeratore} \qquad \frac{9x+1}{2(3x+1)}>0.$$

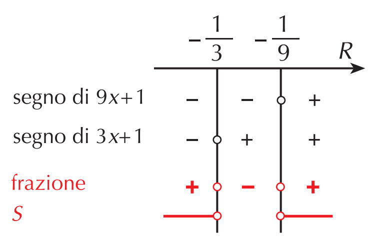
I **denominatori di una disequazione frazionaria non possono in generale essere eliminati** perché di essi non si conosce il segno; per risolvere una tale disequazione, una volta stabilito il suo dominio, dobbiamo quindi studiare il segno dei fattori al numeratore, il segno dei fattori al denominatore e costruire la tabella dei segni.
Nel caso del nostro esempio, possiamo moltiplicare per 2 eliminando tale fattore dal denominatore perché sappiamo che 2 è positivo, ma non possiamo moltiplicare per $3x+1$ perché non ne conosciamo il segno; la disequazione assume alla fine la forma:

$$\frac{9x+1}{3x+1}>0$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore andando a vedere quando ognuno di essi è positivo:

- $9x+1>0 \quad$ se $\quad x>-\frac{1}{9}$
- $3x+1>0 \quad$ se $\quad x>-\frac{1}{3}$

Costruiamo la tabella dei segni:



Dalla tabella deduciamo che la frazione è positiva quando $x<-\frac{1}{3} \vee x>-\frac{1}{9}$.

4 **ESERCIZIO GUIDATO**

Seguendo lo schema indicato, risolvi la disequazione $\quad \frac{1}{x+1}\geq 3$

Trasporta tutti i termini al primo membro ed esegui le operazioni indicate: ....

Ottieni infine la frazione: $\quad \frac{3x+2}{x+1}\leq 0$

Studia il segno del numeratore risolvendo la disequazione $3x + 2 \geq 0$: ....

Studia il segno del denominatore risolvendo la disequazione $x + 1 > 0$: ....

Costruisci la tabella dei segni: ....

L'insieme delle soluzioni corrisponde all'intervallo in cui hai trovato un segno negativo, cioè ....

Risolvi le seguenti disequazioni frazionarie.

5 $\dfrac{4x+3}{4} + 1 < \dfrac{x^2}{x-1}$

6 $\dfrac{x-1}{3x} + \dfrac{x-1}{7} \geq \dfrac{x}{7}$

7 $\dfrac{x^2-1}{2x-3} - \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{x-1}{2}$

8 **ESERCIZIO SVOLTO**

Disequazione intera non lineare. Sappiamo risolvere una **disequazione di grado superiore al primo** soltanto se, una volta scritta la disequazione nella forma $E(x) > 0$, il polinomio $E(x)$ si può scomporre nel prodotto di fattori tutti di primo grado o di cui comunque si può stabilire il segno.

Per esempio, risolviamo la disequazione $9x^2 - 16 > 0$

Scomponiamo in fattori $(3x-4)(3x+4) > 0$

Il segno del polinomio $9x^2 - 16$ dipende da quello dei suoi fattori; studiamo quindi il segno di ciascuno di essi andando a vedere quando sono positivi:

- $3x - 4 > 0$ se $x > \dfrac{4}{3}$
- $3x + 4 > 0$ se $x > -\dfrac{4}{3}$

Costruiamo la tabella dei segni:

		$-\frac{4}{3}$		$\frac{4}{3}$	R
segno di $3x-4$	$-$		$-$	o	$+$
segno di $3x+4$	$-$	o	$+$		$+$
prodotto	$+$	o	$-$	o	$+$
S	———	o		o	———

Da essa deduciamo che l'intervallo in cui il polinomio $E(x)$ è positivo è $x < -\dfrac{4}{3} \vee x > \dfrac{4}{3}$.

Risolvi le seguenti disequazioni non lineari.

9 $x^2 - 5x < 0$

10 $x^3 - x^2 - 2x > 0$

11 $x^2(2x+3) > 2x+3$

12 $x^2(x-1) \leq 12x$

13 **ESERCIZIO GUIDATO**

Sistemi di disequazioni. Ricordiamo che un sistema di disequazioni è verificato nell'insieme intersezione delle soluzioni di ciascuna disequazione.
I passaggi da seguire sono i seguenti:

- risolvere ciascuna disequazione
- costruire la tabella delle soluzioni in modo da mettere in evidenza le eventuali intersezioni.

Osserva l'esempio che segue.

$$\begin{cases} x-3 > \dfrac{2x+4}{5} & (\mathbf{A}) \\ x^2-25 \geq 0 & (\mathbf{B}) \end{cases}$$

Risolviamo le disequazioni una alla volta.

- **Disequazione A**

$$x-3 > \frac{2x+4}{5}$$

$$5x-15 > 2x+4 \quad \rightarrow \quad 3x > 19 \quad \rightarrow \quad x > \frac{19}{3}$$

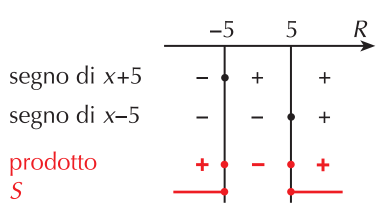
- **Disequazione B**

Scomponiamo il primo membro della disequazione: $(x+5)(x-5) \geq 0$

Studiamo il segno di ogni fattore: $x+5 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq -5$

$x-5 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 5$

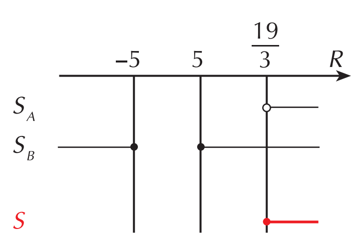
Tabella dei segni:



$x \leq -5 \;\vee\; x \geq 5$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema: $\begin{cases} x > \dfrac{19}{3} & \leftarrow \quad S_A \\ x \leq -5 \;\vee\; x \geq 5 & \leftarrow \quad S_B \end{cases}$

Costruiamo la tabella delle soluzioni:



Il sistema è verificato per $x > \dfrac{19}{3}$

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

14 $\begin{cases} \dfrac{x-4}{x+7} > 0 \\ 3x - 2 \leq 0 \end{cases}$

15 $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ -3x > 0 \end{cases}$

16 $\begin{cases} \dfrac{3x-6}{4x} \geq 0 \\ \dfrac{x}{x-5} \leq 0 \end{cases}$

Risultati di alcuni esercizi.

2. **a.** $S = \{3\}$; **b.** $S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$; **c.** $S = \emptyset$; **d.** $S = \left\{\dfrac{5}{4}\right\}$

4. $-1 < x \leq -\dfrac{2}{3}$

5. $1 < x < \dfrac{7}{3}$

6. $x < 0 \ \vee \ x > \dfrac{7}{4}$

7. $x \leq \dfrac{2}{3} \ \vee \ x > \dfrac{3}{2}$

9. $0 < x < 5$

10. $-1 < x < 0 \ \vee \ x > 2$

11. $-\dfrac{3}{2} < x < -1 \ \vee \ x > 1$

12. $x \leq -3 \ \vee \ 0 \leq x \leq 4$

14. $x < -7$

15. $x < 0$

16. $2 \leq x < 5$