# APPROFONDIMENTO

## Dal grafico di $f'(x)$ a quello di $f(x)$

Consideriamo adesso il problema inverso, supponiamo cioè che una funzione $f(x)$, di cui è noto il grafico, sia la derivata di una funzione $F(x)$, cioè che sia

$$F'(x) = f(x)$$

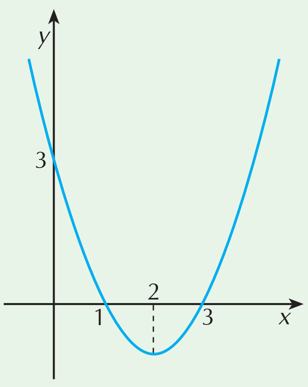
La funzione $F(x)$ si dice **primitiva** della funzione $f(x)$.
Vogliamo costruire il grafico di $F(x)$ a partire da quello di $f(x)$.
Cominciamo col dire che, poiché la derivata di una costante è zero, allora

$$D[F(x)] \quad \text{e} \quad D[F(x)+k] \quad \text{sono entrambe uguali a } f(x)$$

La funzione $F(x)$ si può quindi determinare a meno di una costante additiva $k$, cioè i grafici di $F(x)$ si ottengono uno dall'altro per traslazione.
Per costruire il grafico di $F(x)$ facciamo le seguenti osservazioni.

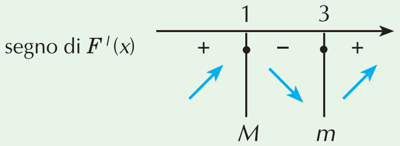
- Poiché $f(x)$ è la derivata di $F(x)$, possiamo dire che:
  - quando $f(x)$ è positiva $\rightarrow$ $F(x)$ è crescente
  - quando $f(x) = 0$ $\rightarrow$ $F(x)$ ha un punto stazionario
  - quando $f(x)$ è negativa $\rightarrow$ $F(x)$ è decrescente.
- La derivata di $f(x)$ rappresenta la derivata seconda di $F(x)$: $f'(x) = F''(x)$; allora:
  - quando $f(x)$ è crescente, $F''(x)$ è positiva e quindi $F(x)$ è concava verso l'alto
  - quando $f(x)$ è decrescente, $F''(x)$ è negativa e quindi $F(x)$ è concava verso il basso
  - quando $f(x)$ ha un punto stazionario, $F''(x) = 0$ e quindi in tale punto vi è un flesso oppure un massimo o un minimo a seconda di che cosa questo punto rappresenta per $f(x)$.
- Occorre poi scegliere fra le infinite funzioni $F(x) + k$, quale rappresentare nel piano cartesiano; basta allora stabilire il valore della primitiva per un particolare valore di $x$. Scelto per esempio $x = 0$, basta imporre che $F(x)$ passi per il punto $(0, y_0)$ dove $y_0$ è un valore stabilito.

Vediamo come applicare queste considerazioni alla curva $f(x)$ il cui grafico è in figura.




- $f(x)$ è positiva se $x < 1 \ \vee \ x > 3$; in questi intervalli $F(x)$ è crescente
- $f(x)$ è negativa se $1 < x < 3$; in questi intervalli $F(x)$ è decrescente
- $f(x) = 0$ se $x = 1 \ \vee \ x = 3$; in questi punti $F'(x)$ si annulla e quindi la $F(x)$ ha retta tangente parallela all'asse $x$.

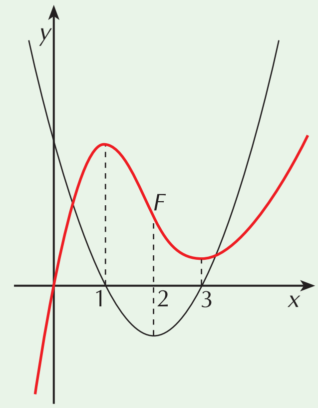
Schematizziamo la situazione di $F(x)$ rappresentando il segno della sua derivata:



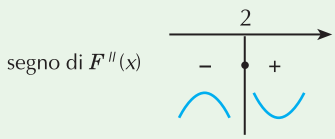

In $x = 1$ vi è dunque un punto di massimo, in $x = 3$ vi è un punto di minimo.
Inoltre:

- $f(x)$ è decrescente per $x < 2$; quindi in tale intervallo $F(x)$ è concava verso il basso

- $f(x)$ è crescente per $x > 2$; in tale intervallo $F(x)$ è concava verso l'alto
- $f(x)$ ha un punto di minimo in $x = 2$; allora $F''(2) = 0$ e poiché cambia la concavità a sinistra e a destra di 2, tale punto è un flesso per $F(x)$



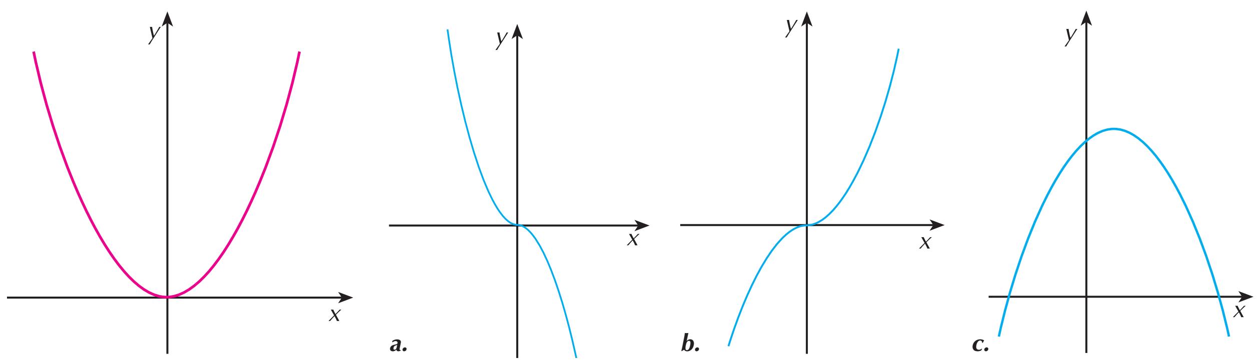

Schematizziamo la situazione:




Dobbiamo adesso scegliere un punto nel piano per il quale far passare il grafico della funzione; se scegliamo l'origine (abbiamo in questo modo imposto che sia $F(0) = 0$), il grafico che otteniamo è in figura (per facilità di lettura abbiamo lasciato in nero il grafico di $f(x)$).

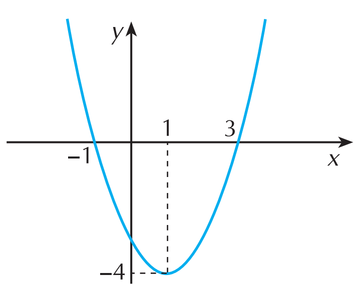
## ESERCIZI

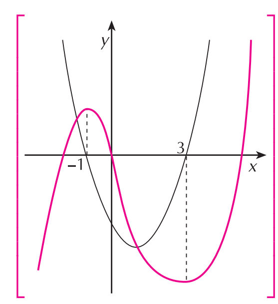
**1** Data la funzione il cui grafico è rappresentato in colore rosso, individua quale fra i grafici in colore blu può rappresentare quello della sua primitiva.



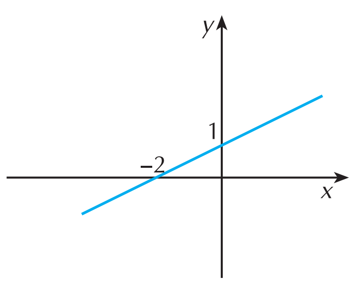

*Dati i grafici delle funzioni $f(x)$ nelle seguenti figure, costruisci quelli delle loro primitive $F(x)$ supponendo $F(0) = 0$.*

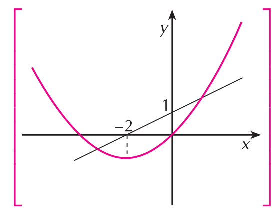
**2**



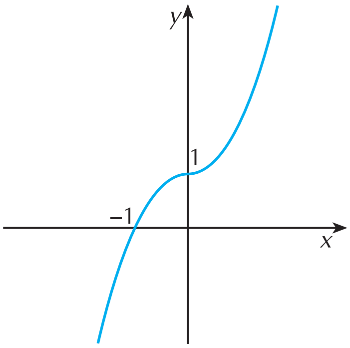



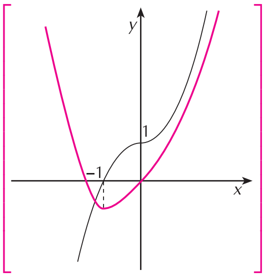

**3**



**4**




**5**