APPROFONDIMENTO

Il grafico della funzione $y = a \sin x + b \cos x$

Ogni espressione della forma $a \sin x + b \cos x$ può essere vista come lo sviluppo del seno oppure del coseno della somma di due angoli. Vediamo quali sono i passaggi che ci possono ricondurre a questa forma.

Riscriviamo innanzi tutto l'espressione raccogliendo a fattor comune il termine $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

I coefficienti $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ sono minori di 1 e inoltre la somma dei loro quadrati vale 1; questo significa che essi possono essere considerati uno il seno e l'altro il coseno di un angolo α, cioè:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha \qquad \text{oppure} \qquad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$$

In questo modo l'espressione iniziale diventa:

$$\sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\alpha \sin x + \cos\alpha \cos x) \qquad \text{oppure} \qquad \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\alpha \sin x + \sin\alpha \cos x)$$

Tenendo presente che le due espressioni fra parentesi rappresentano rispettivamente il coseno di $(x-\alpha)$ e il seno di $(x+\alpha)$, possiamo in definitiva dire che

$$a \sin x + b \cos x = \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x-\alpha) \\ \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\alpha) \end{cases}$$

Per esempio, trasformiamo con la stessa sequenza di passaggi l'espressione $\sin x + \sqrt{3}\cos x$ nella quale $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+3} = 2$

- raccogliamo il fattore 2 : $\quad 2\left(\dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$
- poniamo $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ e $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, da cui ricaviamo che è $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$
- riscriviamo l'espressione mettendo in evidenza il coseno di $(x-\alpha)$:

  $$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin x + \cos\frac{\pi}{6}\cos x\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

oppure:

- poniamo $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ e $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, da cui ricaviamo che è $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$
- riscriviamo l'espressione mettendo in evidenza il seno di $(x+\alpha)$:

  $$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Questa procedura rende possibile la costruzione del grafico della funzione $f(x) = a \sin x + b \cos x$ mediante l'applicazione di opportune trasformazioni.

Vediamo alcuni esempi.

I esempio

Costruiamo il grafico della funzione di equazione $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$.

Abbiamo visto che possiamo scrivere la funzione nella forma

(**A**) $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ oppure (**B**) $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Per costruire il grafico possiamo considerare:

(**A**) la cosinusoide come funzione base (in nero) e applicare ad essa in successione le seguenti trasformazioni (***figura 1a***):

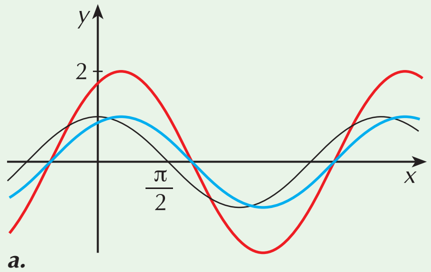
- traslazione lungo l'asse x del vettore $\vec{v} = \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ (in azzurro)
- dilatazione lungo l'asse y del fattore 2 (in rosso)

(**B**) la sinusoide come funzione base (in nero) e applicare ad essa in successione le seguenti trasformazioni (***figura 1b***):

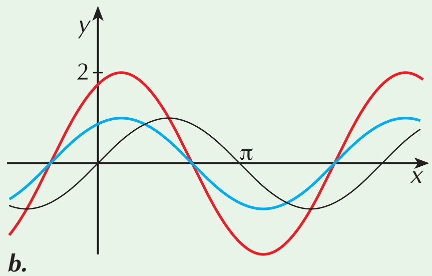
- traslazione lungo l'asse x del vettore $\vec{v} = \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ (in azzurro)
- dilatazione lungo l'asse y del fattore 2 (in rosso).

In entrambi i casi otteniamo ovviamente lo stesso grafico.

Figura 1



a.



b.

II esempio

Costruiamo il grafico della funzione $y = \cos x - \sin x + 1$

Trasformiamo l'espressione $\cos x - \sin x$ tenendo presente che è $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$:

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$

Ponendo $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cioè $\alpha = \frac{\pi}{4}$, la funzione può essere riscritta in una delle due forme:

(**A**) $y = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ oppure (**B**) $y = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

Se consideriamo l'equazione nella forma (**A**), a partire dal grafico della cosinusoide dobbiamo applicare:

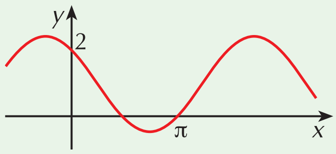
- la traslazione di vettore $\vec{v} = \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$
- la dilatazione lungo l'asse x di fattore $\sqrt{2}$
- la traslazione di vettore $\vec{s} = (0, 1)$.

Se consideriamo l'equazione nella forma (**B**), a partire dal grafico della sinusoide dobbiamo applicare:

- la traslazione di vettore $\vec{v} = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$
- la dilatazione lungo l'asse x di fattore $\sqrt{2}$
- la simmetria rispetto all'asse x
- la traslazione di vettore $\vec{s} = (0, 1)$.

In entrambi i casi otteniamo il grafico in ***figura 2***.

Figura 2



ESERCIZI

Traccia il grafico delle seguenti funzioni.

1 $y = \sin x - \cos x$

2 $y = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

3 $y = \sin x + \cos x - 1$

4 $y = 2 - \cos x + \sqrt{3}\sin x$

5 $y = \sin x + \cos x$

6 $y = \cos x - \sin x + 2$

7 $y = \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x$

8 $y = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

9 $y = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

10 $y = -\frac{3}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$