Approfondimento

Le equazioni irrazionali con due radicali

Per risolvere un'equazione irrazionale contenente più di un radicale si possono applicare due metodi.

I metodo

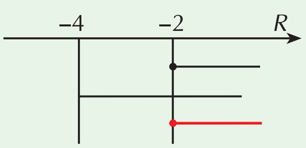
- Si determina il dominio, imponendo che tutti i radicandi esistano e che i denominatori non risultino zero;
- si cerca di riscrivere l'equazione nella forma $\sqrt{A(x)} = B(x)$, elevando al quadrato entrambi i membri e isolando il radicale rimasto;
- si individua la nuova condizione di concordanza dei segni e quindi il nuovo dominio e si ripete l'operazione di innalzamento al quadrato, quindi si risolve l'equazione ottenuta;
- si controlla se le soluzioni fanno parte del dominio.

II metodo

- Si elevano al quadrato entrambi i membri fino a ricondurre l'equazione ad una equazione razionale;
- si trovano le soluzioni e si controlla l'accettabilità verificando se soddisfano l'equazione irrazionale.

I esempio.

Risolviamo l'equazione $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} = \dfrac{6}{\sqrt{x+4}}$

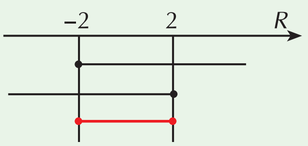


Imponiamo le condizioni di esistenza dei radicali

$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+4 > 0 \end{cases}$ cioè $x \geq -2$

Riduciamo l'equazione in forma intera: $\sqrt{(x+2)(x+4)} + x + 4 = 6$

Isoliamo il radicale: $\sqrt{(x+2)(x+4)} = 2 - x$



Possiamo elevare al quadrato entrambi i membri, ma dobbiamo imporre la condizione di concordanza dei segni.

Quindi le soluzioni saranno accettabili se: $\begin{cases} x \geq -2 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad -2 \leq x \leq 2$

Eleviamo al quadrato e risolviamo l'equazione: $(x+2)(x+4) = (2-x)^2 \quad \rightarrow \quad 10x + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\dfrac{2}{5}$

La soluzione trovata appartiene all'insieme di accettabilità, quindi $S = \left\{-\dfrac{2}{5}\right\}$.

II esempio.

Risolviamo l'equazione $\sqrt{x+2} = 2 - \sqrt{x+1}$

Applichiamo i due possibili metodi.

- Imponiamo le condizioni di esistenza dei radicali $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x \geq -1$

Spostiamo il secondo radicale al primo membro in modo che entrambi i membri siano positivi e sia quindi garantita la condizione di concordanza dei segni ed eleviamo al quadrato.

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}=2 \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)^2=4 \quad \rightarrow \quad x+2+x+1+2\sqrt{(x+2)(x+1)}=4$$

$$2\sqrt{(x+2)(x+1)}=1-2x$$

Prima di elevare ancora entrambi i membri al quadrato dobbiamo imporre le condizione di concordanza dei segni, le soluzioni saranno quindi accettabili se

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad -1 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Troviamo ora le soluzioni $\quad 4(x+2)(x+1)=(1-2x)^2 \quad \rightarrow \quad x=-\dfrac{7}{16}$.

La soluzione appartiene al dominio ed è quindi è accettabile: $\quad S=\left\{-\dfrac{7}{16}\right\}$.

- Troviamo la soluzione e verifichiamo poi l'accettabilità sostituendola al posto dell'incognita nel testo.

Eleviamo al quadrato entrambi i membri: $\quad x+2=4-4\sqrt{x+1}+x+1$

Svolgiamo i calcoli e isoliamo il radicale: $\quad 4\sqrt{x+1}=3$

Eleviamo una seconda volta al quadrato: $\quad 16(x+1)=9$

Troviamo la soluzione: $\quad x=-\dfrac{7}{16}$

Verifichiamo adesso se la soluzione trovata è anche soluzione dell'equazione iniziale:

$$\sqrt{-\frac{7}{16}+2}=2-\sqrt{-\frac{7}{16}+1} \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{25}{16}}=2-\sqrt{\frac{9}{16}} \quad \rightarrow \quad \frac{5}{4}=\frac{5}{4}$$

Avendo trovato un'identità, possiamo dire che l'insieme delle soluzioni è $S=\left\{-\dfrac{7}{16}\right\}$.

ESERCIZI

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con due radicali.

1 $\sqrt{4-x}-2\sqrt{x}=2 \qquad \sqrt{x}+\sqrt{x+2}=-1 \qquad [S=\{0\};\ S=\varnothing]$

2 $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=4 \qquad \sqrt{2x+1}-\sqrt{x}=1 \qquad [S=\{3\};\ S=\{4,\ 0\}]$

3 $\sqrt{x+8}=3+\sqrt{x-1} \qquad \sqrt{x+2}=\sqrt{3x+3}-1 \qquad [S=\{1\};\ S=\{2\}]$

4 $\sqrt{3+x}+2=\sqrt{x+19} \qquad \sqrt{x+18}-3=\sqrt{x} \qquad \left[S=\{6\};\ S=\left\{\frac{9}{4}\right\}\right]$

5 $\sqrt{3x-1}+\sqrt{3x+1}=2 \qquad 2\sqrt{x-1}=2-\sqrt{2x-4} \qquad \left[S=\left\{\frac{5}{12}\right\};\ S=\{2\}\right]$

6 $\sqrt{-3x-1}-\sqrt{4x+3}=0$ $\qquad$ $\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x^2+16}=7$ $\qquad$ $\left[S=\left\{-\frac{4}{7}\right\};\ S=\{\pm 3\}\right]$

7 $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-6}=3\sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt{x-1}-\sqrt{3x+1}+2=0$ $\qquad$ $\left[S=\left\{\frac{34}{3}\right\};\ S=\{1,\ 5\}\right]$

8 $\sqrt{2(6x+5)}=9-\sqrt{12x+1}$ $\qquad$ $\sqrt{4(x+1)}=5-\sqrt{9-2x}$ $\qquad$ $\left[S=\left\{\frac{5}{4}\right\};\ S=\left\{0,\ \frac{40}{9}\right\}\right]$

9 $\sqrt{4x+2}-\sqrt{4x-2}=2$ $\qquad$ $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}=2$ $\qquad$ $\left[S=\left\{\frac{1}{2}\right\};\ S=\{\pm 2\}\right]$

10 $\sqrt{x^2-x-6}+\sqrt{x-3}=0$ $\qquad$ $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+2}=1$ $\qquad$ $[S=\{3\};\ S=\{-1\}]$

11 $\sqrt{1+2x}+\sqrt{2x-1}=x+2$ $\qquad$ $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+3}=0$ $\qquad$ $[S=\varnothing;\ S=\{2\}]$