Attività di recupero

Cap 1. I PRIMI ELEMENTI

Rivedi la teoria

I termini primitivi

In qualsiasi disciplina non si può definire tutto e non si può dimostrare tutto; è necessario introdurre alcuni oggetti (**termini primitivi**) e alcune regole (**assiomi**) che consentano di manipolare questi oggetti per crearne altri e per stabilirne le caratteristiche.
In geometria i termini primitivi sono **punto**, **retta** e **piano**.
A questi va aggiunto anche il concetto di **movimento rigido** che permette di trasportare gli oggetti geometrici nel piano o nello spazio senza che questi si possano in qualche modo deformare.

Gli assiomi

Gli assiomi si possono raggruppare a seconda del tipo di regola che stabiliscono; abbiamo quindi:

- gli **assiomi di appartenenza** che stabiliscono che:
  - per definire una retta sono necessari e sufficienti due punti
  - per definire un piano sono necessari e sufficienti tre punti non allineati
  - per sapere se una retta sta su un piano basta verificare che due punti della retta appartengano al piano
- gli **assiomi di ordinamento** che ci assicurano la possibilità di fissare un ordinamento dei punti su una retta orientata e di stabilire che qualsiasi retta è illimitata e contiene infiniti punti
- l'**assioma di partizione** (per ora solo del piano) che ci garantisce la possibilità di ripartire i punti di un piano in due regioni distinte mediante una retta in modo che, per passare da una regione all'altra, occorre necessariamente intersecare la retta
- gli **assiomi di costruzione** che danno la possibilità di:
  - trasportare segmenti e angoli nel piano conservando lunghezze e ampiezze
  - costruire il multiplo e il sottomultiplo di un segmento e di un angolo secondo un numero naturale n non nullo e garantirne l'unicità.

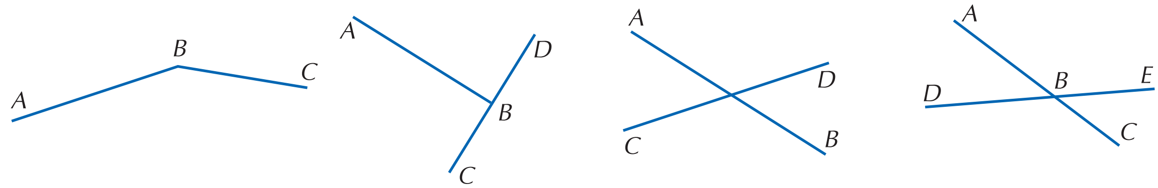
Le prime definizioni

A partire dai termini primitivi e dagli assiomi possiamo definire nuovi oggetti della geometria.

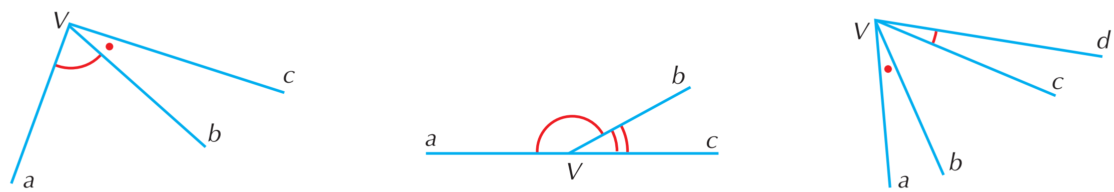
- **Semiretta** è ciascuna delle due parti in cui un punto divide una retta.
- **Segmento** è la parte di retta delimitata da due suoi punti.
- **Semipiano** è ciascuna delle due parti in cui una retta divide un piano.
- **Angolo** è la parte di piano delimitata da due semirette (i lati dell'angolo) che hanno l'origine in comune (il vertice); si dice poi che un angolo è *convesso* se non contiene il prolungamento dei suoi lati, *concavo* in caso contrario.

Fai gli esercizi

1 Nelle seguenti figure indica se ci sono segmenti consecutivi o segmenti adiacenti.



2 Nelle seguenti figure indica se ci sono angoli consecutivi o angoli adiacenti.



3 Disegna:
a. un angolo convesso
b. un angolo concavo
c. un angolo convesso e un angolo concavo in modo che siano consecutivi.

4 E' possibile che di due angoli adiacenti uno sia concavo?

5 Disegna due segmenti consecutivi *AB* e *BC* e il segmento *CD* adiacente a *BC*. Si può dire che sono consecutivi i segmenti:
a. *AB* e *BD* V F
b. *AC* e *CD* V F
c. *AC* e *BD* V F
d. *AC* e *BC*. V F

6 Disegna due angoli consecutivi $\widehat{ab}$ e $\widehat{bc}$ e l'angolo $\widehat{cd}$ tale che il lato *d* sia la semiretta opposta ad *a*. Si può dire che:
a. $\widehat{ac}$ e $\widehat{cd}$ sono adiacenti V F
b. $\widehat{bc}$ e $\widehat{cd}$ sono consecutivi ma non adiacenti V F
c. $\widehat{ab}$ e $\widehat{bd}$ sono consecutivi V F
d. $\widehat{ab}$ e $\widehat{bd}$ sono adiacenti ma non consecutivi. V F

Rivedi la teoria

I teoremi

Le caratteristiche degli oggetti geometrici sono stabilite dai **teoremi**.
Un teorema è una proposizione che si può scrivere nella forma "se .... allora ...."; in essa le premesse costituiscono le **ipotesi del teorema**, la conseguenza ne è la **tesi**. Il ragionamento con il quale, supposte vere le ipotesi, si deduce la verità della tesi costituisce la *dimostrazione* del teorema.

Il movimento rigido e la congruenza

Diciamo che due figure F e F' sono **congruenti**, e scriviamo $F \cong F'$ se esiste un movimento rigido che possa sovrapporre una figura all'altra in modo che si corrispondano punto a punto.

La relazione di congruenza gode delle proprietà:

- **riflessiva:** ogni figura è congruente a se stessa
- **simmetrica:** se $F \cong F'$ allora $F' \cong F$
- **transitiva:** se $F \cong F'$ e $F' \cong F''$ allora $F \cong F''$.

Confronto fra segmenti e fra angoli

Segmenti e angoli si possono confrontare mediante un movimento rigido e, data una qualunque coppia di segmenti AB e CD o di angoli $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$, fra di essi si verifica una e una sola delle seguenti situazioni:

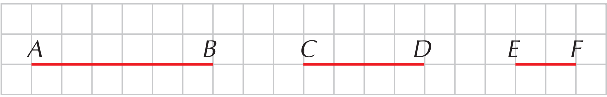
$AB < CD \qquad AB \cong CD \qquad AB > CD \qquad\qquad \widehat{ab} < \widehat{cd} \qquad \widehat{ab} \cong \widehat{cd} \qquad \widehat{ab} > \widehat{cd}$

Di tutti i segmenti congruenti fra loro si dice che hanno la stessa *lunghezza* e di tutti gli angoli congruenti fra loro si dice che hanno la stessa *ampiezza*.

Fai gli esercizi

7 Dati i segmenti AB, CD, EF della figura a lato, costruisci i segmenti:

a. $AB + CD + EF$ **b.** $AB + CD - EF$
c. $3AB$ **d.** $4CD$
e. $\frac{1}{2}(AB + EF)$

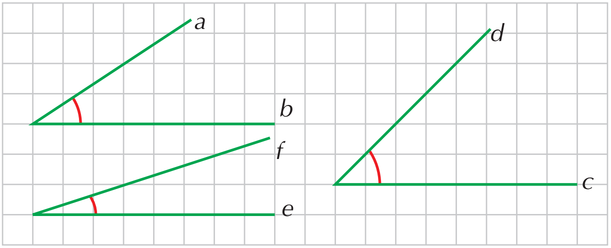


8 Stabilisci il valore di verità delle seguenti proposizioni.

a. Se una semiretta divide un angolo piatto in due angoli retti ne è la bisettrice. V F
b. La bisettrice di un angolo ottuso individua angoli ottusi. V F
c. Una qualunque semiretta interna ad un angolo piatto ed uscente dal suo vertice individua angoli complementari. V F
d. Il supplementare di un angolo ottuso è acuto. V F

9 Dati gli angoli della figura a lato, costruisci gli angoli:

a. $\widehat{ab} + \widehat{cd}$ **b.** $\widehat{cd} - \widehat{ab}$
c. $\widehat{ab} + \widehat{cd} - \widehat{ef}$ **d.** $3\widehat{cd}$
e. $2\left(\widehat{ab} - \widehat{ef}\right)$ **f.** $\frac{1}{2}\left(\widehat{ab} + \widehat{cd}\right)$



10 Sia M il punto medio del segmento AB e sia BC un segmento adiacente ad AB e tale che sia $BC \cong \frac{1}{2}AB$. Dimostra che:

a. B è il punto medio di MC
b. $AB \cong MC$.

11 Due angoli sono complementari; a che frazione dell'angolo piatto corrisponde l'ampiezza dell'angolo formato dalle loro bisettrici?

Risultati di alcuni esercizi.

5 **a.** V, **b.** V, **c.** F, **d.** V   **6** **a.** V, **b.** V, **c.** V, **d.** F   **8** **a.** V, **b.** F, **c.** F, **d.** V   **11** $\frac{1}{4}$

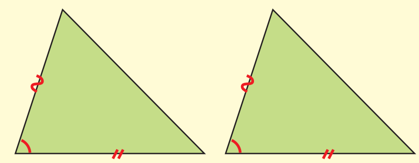
Cap 2. I TRIANGOLI E I CRITERI DI CONGRUENZA

Rivedi la teoria

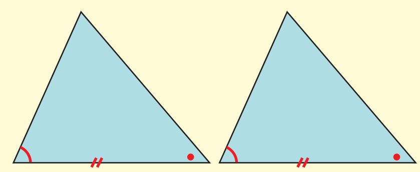
Il primo e il secondo criterio di congruenza dei triangoli

Se due poligoni, e in particolare due triangoli, hanno tutti i lati e tutti gli angoli ordinatamente congruenti, possiamo concludere che sono congruenti. Ma per stabilire la congruenza non è necessario verificare che tutti gli elementi siano tali; ci sono dei teoremi, che prendono il nome di *criteri di congruenza*, che permettono di arrivare alle stesse conclusioni con un numero inferiore di confronti fra lati e fra angoli.
I primi due criteri di congruenza dei triangoli ci dicono che:

- **primo criterio:** due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo fra essi compreso

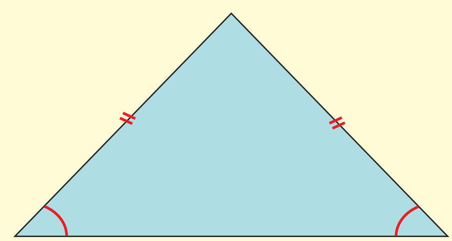


- **secondo criterio:** due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un lato e i due angoli ad esso adiacenti.



Una prima applicazione di questi teoremi ci permette di dire che:

- se un triangolo ha due lati congruenti (cioè è isoscele), ha anche gli angoli opposti a tali lati che sono congruenti; viceversa, se due angoli sono congruenti, anche i lati ad essi opposti sono congruenti.
  Di conseguenza, per dimostrare che un triangolo è isoscele basta dimostrare che ha:
  due lati congruenti   oppure   due angoli congruenti.



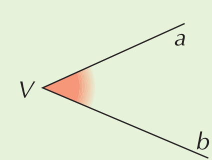
Fai gli esercizi

1 **ESERCIZIO GUIDA**

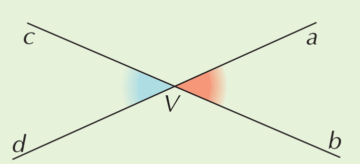
Consideriamo un angolo $\widehat{ab}$ di vertice V ed il suo opposto al vertice $\widehat{cd}$; prendiamo poi un punto P sulla semiretta a, un punto Q sulla semiretta c, un punto R su b e un punto S su d, in modo che $VP \cong VQ$ e $VR \cong VS$. Dimostriamo che $PR \cong QS$.

Per prima cosa costruiamo il disegno seguendo le indicazioni del testo. La costruzione della figura relativa ad un teorema avviene per gradi; nel nostro caso dobbiamo:

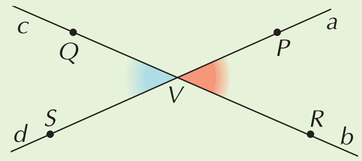
- disegnare l'angolo $\widehat{ab}$ di vertice V



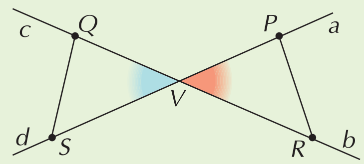
- disegnare il suo opposto al vertice $\widehat{cd}$



- prendere i punti *P, R, Q, S* sulle semirette *a, b, c, d* in modo che $VP \cong VQ$ e $VR \cong VS$



- tracciare i segmenti *PR* e *QS*

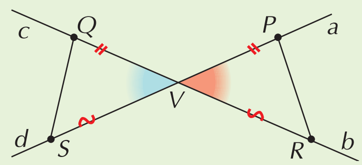


Quando la figura è completata, occorre rileggere il teorema per scrivere l'ipotesi e la tesi e contemporaneamente segnare sulla figura le congruenze rilevate:

Hp. $\widehat{cd}$ opposto al vertice di $\widehat{ab}$ **Th.** $PR \cong QS$

$VP \cong VQ$

$VR \cong VS$

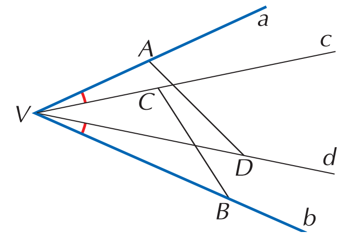


La tesi prevede di dimostrare che i segmenti *PR* e *QS* sono congruenti, quindi dobbiamo individuare un triangolo che abbia come lato *PR* ed un triangolo che abbia come lato *QS* che possano essere congruenti. E' facile intuire che i triangoli cercati sono *PVR* e *QVS*. Di essi sappiamo che:

$VP \cong VQ$	per ipotesi
$VR \cong VS$	per ipotesi
$\widehat{PVR} \cong \widehat{QVS}$	perché angoli opposti al vertice sono congruenti

Sono in questo modo verificate le ipotesi del primo criterio di congruenza e perciò i due triangoli sono congruenti; se due triangoli sono congruenti, hanno tutti gli elementi a due a due congruenti e quindi il lato *PR* è congruente al suo omologo che è *QS*.
La dimostrazione del teorema è in questo modo completata.

2 Disegna un angolo $\widehat{ab}$ di vertice *V* e traccia due semirette *c* e *d* interne all'angolo in modo che $\widehat{ac} \cong \widehat{db}$, prendi poi un punto *A* su *a* ed un punto *C* su *c* in modo che sia $VA \cong VC$, un punto *D* su *d* ed un punto *B* su *b* in modo che sia $VD \cong VB$. Dimostra che $AD \cong BC$.



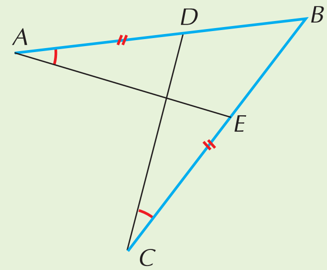
3 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo due segmenti congruenti e consecutivi *AB* e *BC*; tracciamo dal vertice *A* e dal vertice *C* due semirette che formano angoli congruenti con *AB* e *BC*; indichiamo con *D* il punto che si viene a determinare su *AB* e con *E* il punto su *BC*. Dimostriamo che $BE \cong BD$.

Costruiamo la figura e scriviamo l'ipotesi e la tesi:

Hp. $AB \cong$ .... **Th.** .... $\cong$ ....

$\widehat{BAE} \cong$ ....



Conviene considerare i triangoli *ABE* e *CBD* che hanno:

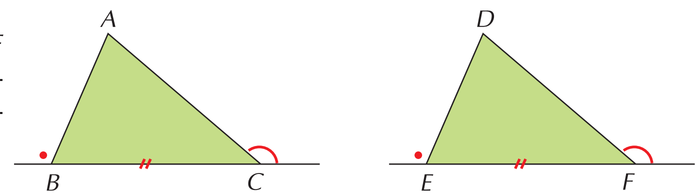
$AB \cong$ .... per ....

$\widehat{ABE} \cong$ .... per la proprietà ....

$\widehat{BAE} \cong$ .... per ....

I due triangoli sono quindi congruenti per il secondo criterio ed in particolare $BE \cong BD$.

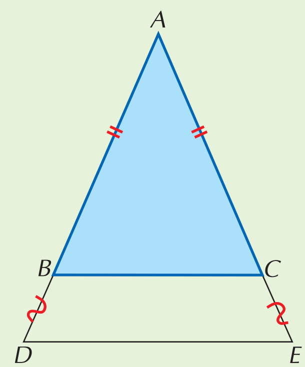
4 Dei triangoli *ABC* e *DEF* si sa che $BC \cong EF$ e che gli angoli esterni ai triangoli adiacenti a questi lati sono ordinatamente congruenti. Dimostra che $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$.



5 **ESERCIZIO GUIDA**

Sia *ABC* un triangolo isoscele di base *BC*; prolunghiamo i lati congruenti, dalla parte della base, di due segmenti congruenti *CE* e *BD*. Dimostriamo che anche il triangolo *ADE* è isoscele.

La figura del problema è a lato; dopo aver completato le ipotesi e la tesi, esegui la dimostrazione seguendo la traccia.



Hp. $AB \cong$ .... **Th.** ....

$BD \cong$ ....

Osserviamo che:

$AB \cong$ .... per ....

$BD \cong$ .... per ....

$AD \cong AE$ perché ....

Quindi il triangolo *ADE*, avendo due lati congruenti, è anch'esso isoscele.

6 Nel triangolo *ABC*, l'angolo di vertice *A* è il doppio dell'angolo di vertice *B*; traccia la bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$ che incontra il lato *BC* in *F*. Dimostra che il triangolo *ABF* è isoscele.

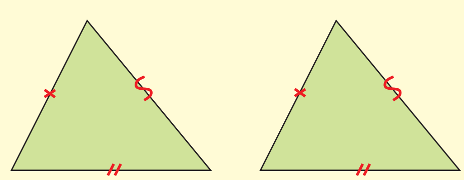
7 Un triangolo isoscele *ABC* di vertice *A* ha la base che è la metà del lato obliquo; traccia la mediana *BM* e dimostra che il triangolo *BMC* è anch'esso isoscele.

8 In un triangolo *ABC* il lato *BC* è il doppio del lato *AB* e la mediana *AM* è congruente ad *AB*. Individua gli angoli congruenti della figura e stabilisci se vi sono triangoli isosceli o equilateri.

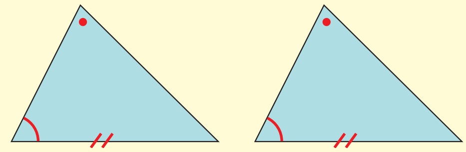
Rivedi la teoria

Il terzo e il quarto criterio di congruenza dei triangoli

- **Terzo criterio:** due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti i tre lati.



- **Quarto criterio di congruenza dei triangoli:** due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un lato, uno degli angoli ad esso adiacenti e l'angolo ad esso opposto.



Le disuguaglianze triangolari

Qual è l'angolo maggiore in un triangolo? Dati tre segmenti, è sempre possibile costruire un triangolo con essi? La risposta a queste domande è data dalle seguenti relazioni che legano lati e angoli di un triangolo.

In ogni triangolo:

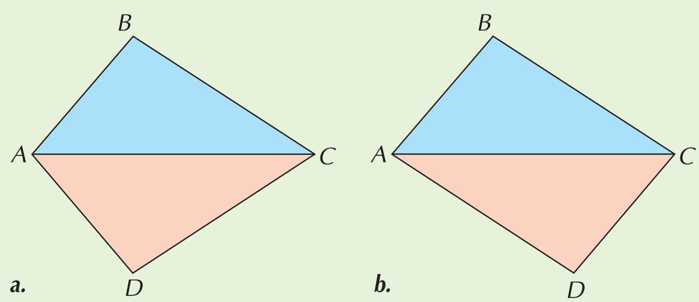
- un angolo esterno è sempre maggiore di ciascuno degli angoli interni ad esso non adiacenti
- al lato maggiore sta opposto l'angolo maggiore e viceversa
- ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

Fai gli esercizi

9 **ESERCIZIO GUIDA**

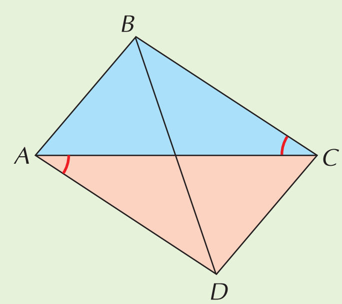
Il triangolo *ABC* ed il triangolo *ACD* sono congruenti e hanno in comune il lato *AC*; inoltre l'angolo $\widehat{ACB}$ è congruente all'angolo $\widehat{CAD}$. Dimostra che sono congruenti anche i triangoli *ABD* e *CBD*.

Due triangoli congruenti che hanno un lato in comune possono essere disegnati nei seguenti due modi:



L'informazione aggiuntiva che $\widehat{ACB} \cong \widehat{CAD}$ non è quindi superflua e serve ad indicare che la situazione del nostro teorema è quella del caso **b**.

L'ipotesi e la tesi del teorema sono dunque le seguenti:



Hp. $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ADC}$ **Th.** $\overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{CBD}$

$\widehat{ACB} \cong \widehat{CAD}$

Se i triangoli *ABC* e *ADC* sono congruenti, tutti i loro elementi sono ordinatamente congruenti, quindi

$AB \cong$ .... $BC \cong$ ....

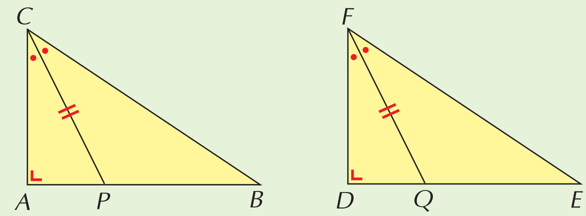
Inoltre, per la proprietà riflessiva della congruenza, $DB \cong$ ....
Allora i triangoli *ABD* e *CBD* sono congruenti per il terzo criterio.

10 **ESERCIZIO GUIDA**

Due triangoli rettangoli hanno un angolo acuto e la bisettrice di tale angolo ordinatamente congruenti. Dimostra che i due triangoli sono congruenti.

Hp. $\widehat{CAB} \cong \frac{\pi}{2}$; $\widehat{FDE} \cong \frac{\pi}{2}$; $\widehat{ACB} \cong \widehat{DFE}$; $\widehat{ACP} \cong \widehat{PCB}$; $\widehat{DFQ} \cong \widehat{QFE}$; $CP \cong FQ$

Th. $\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DEF}$



Considera i triangoli ACP e DFQ; di essi sai che .... quindi i due triangoli sono congruenti per il .... criterio di congruenza; in particolare $AC \cong$ .....

Considera adesso i triangoli ABC e DEF che sono congruenti per il ....

11 In un triangolo ABC isoscele di base AB, il lato obliquo è il doppio della base; traccia le mediane AD e BE e dimostra che i triangoli ABE e ABD sono isosceli e congruenti. Si può affermare che il triangolo CED è isoscele? E che è congruente ai triangoli precedenti?

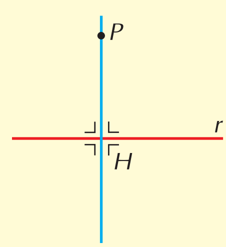
12 Dato un triangolo ABC isoscele di base AB, sia r una retta per A e s una retta per B in modo che gli angoli formati dalle due rette con i lati AC e BC (entrambe esterne al triangolo o entrambe che lo attraversano) siano congruenti. Detto P il punto di intersezione di r e s, dimostra che il segmento PC passa per il punto medio M di AB.

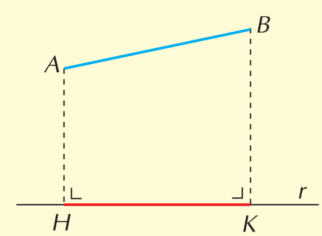
Cap 3. Parallelismo e perpendicolarità nel piano

Rivedi la teoria

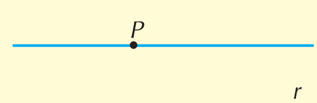
Rette perpendicolari

Due rette si dicono **perpendicolari** se, incontrandosi, formano quattro angoli congruenti fra loro; ciascuno di questi angoli è quindi retto. Si dimostra che la perpendicolare condotta da un punto P a una retta r, sia che il punto appartenga o no alla retta, esiste sempre ed è unica; il punto H di intersezione della perpendicolare con la retta è la **proiezione** di P su r. La proiezione di un segmento AB su una retta r è il segmento HK di r che si ottiene proiettando A e B su r.

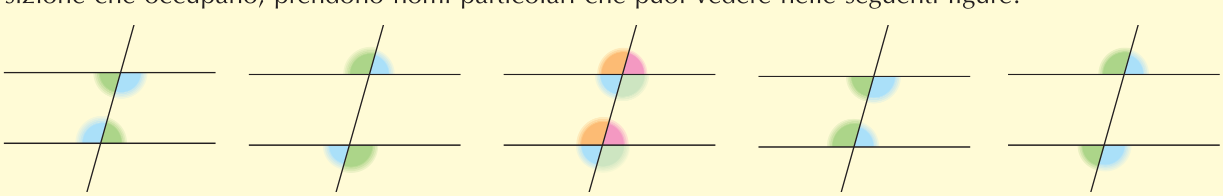




Le rette parallele e il criterio di parallelismo



Due rette r e s si dicono **parallele** se non si incontrano oppure se coincidono. La parallela condotta da un punto P a una retta r esiste sempre e la sua unicità si assume come assioma. Quando due rette parallele vengono tagliate da una trasversale si formano otto angoli, quattro su una parallela e quattro sull'altra, che, a seconda della posizione che occupano, prendono nomi particolari che puoi vedere nelle seguenti figure:



alterni interni ***alterni esterni*** ***corrispondenti*** ***coniugati interni*** ***coniugati esterni***

Fra questi angoli sussistono le seguenti relazioni:

- gli angoli alterni sono congruenti
- gli angoli corrispondenti sono congruenti
- gli angoli coniugati sono supplementari.

La precedente proprietà si può invertire e diventa così un criterio per riconoscere quando due rette sono parallele; in particolare si può affermare che:

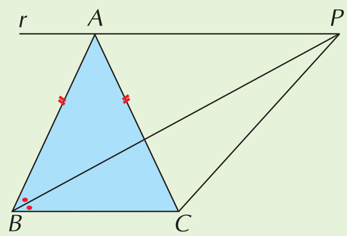
- se due rette sono entrambe perpendicolari a una stessa retta, allora sono parallele.

Fai gli esercizi

1 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo un triangolo ABC isoscele di base BC e tracciamo da A la retta r parallela alla base; tracciamo poi la bisettrice dell'angolo di vertice B che incontra r in P. Dimostriamo che i triangoli ABP e APC sono isosceli.

Completa la scrittura delle ipotesi:



Hp. $AB \cong$ ....

$AP \parallel BC$

$\widehat{ABP} \cong$ ....

Th. $\overset{\triangle}{ABP}$ è isoscele

$\overset{\triangle}{APC}$ è isoscele

L'angolo $\widehat{APB}$ è alterno interno di .... ed è quindi congruente anche all'angolo ....

Il triangolo APB è quindi isoscele. Di conseguenza $AP \cong AB$, ma $AB \cong AC$, quindi ....

2 Disegna un triangolo equilatero ABC e, scelto un punto P su AB, traccia per P la parallela a BC che interseca AC in E. Dimostra che anche il triangolo APE è equilatero.

3 Dal vertice A del triangolo ABC isoscele di base BC, traccia le rette perpendicolari ai lati obliqui che incontrano in E e in F la retta della base BC. Dimostra che anche il triangolo AEF è isoscele.

4 Sia P un punto del lato BC di un triangolo ABC; traccia da P le parallele ai lati AB e AC che li incontrano in R e S. Dimostra che i triangoli ARP e ASP sono congruenti.

Rivedi la teoria

Altre proprietà dei triangoli

Le proprietà del parallelismo applicate ai triangoli permettono di enunciare i seguenti teoremi:

- **teorema dell'angolo esterno:** in ogni triangolo un angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ad esso non adiacenti
- **somma degli angoli interni:** in un triangolo la somma degli angoli interni è un angolo piatto

I triangoli rettangoli

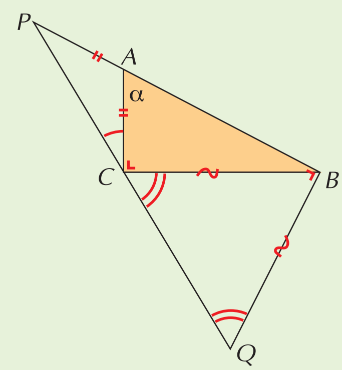
Tutti i triangoli rettangoli hanno almeno un angolo congruente che è quello retto; di conseguenza i criteri di congruenza si possono modificare enunciandoli in questo modo.

Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti:

- i due cateti, oppure
- un cateto e un angolo acuto, oppure
- l'ipotenusa e un angolo acuto, oppure
- l'ipotenusa e un cateto.

Fai gli esercizi

5 **ESERCIZIO GUIDA**



Disegna un triangolo ABC rettangolo in C, prolunga AB, dalla parte di A, di un segmento $AP \cong AC$ e congiungi P con C; traccia poi da B la perpendicolare ad AB (dalla parte di C) e prendi su di essa un punto Q tale che $BQ \cong BC$. Indicando con α l'angolo $\widehat{CAB}$, trova in funzione di α le ampiezze degli angoli $\widehat{ACP}$ e $\widehat{BCQ}$ e verifica che sono complementari. Che cosa puoi dire dei punti P, C e Q?

Hp. $AC \perp CB$ $\quad AP \cong$ ...... $\quad QB \perp PB$ $\quad BQ \cong$ ......

Essendo $PA \cong AC$, il triangolo PAC è ....

e quindi $\widehat{ACP} \cong$ ....

L'angolo $\widehat{CAB}$ che abbiamo indicato con α è angolo esterno del triangolo PAC, quindi, in funzione di α, $\widehat{ACP} \cong$ ....

Poichè il triangolo ABC è rettangolo in C, l'angolo $\widehat{ABC}$ è complementare di $\widehat{CAB} = \alpha$; per ipotesi $\widehat{ABQ}$ è retto, quindi $\widehat{ABC}$ è complementare anche dell'angolo .... Di conseguenza $\widehat{CBQ} =$ .....

Il triangolo CBQ è isoscele, quindi se teniamo presente che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto (che si indica con il simbolo π), l'angolo $\widehat{BCQ}$, in funzione di α, è ampio ....

Gli angoli $\widehat{ACP}$ e $\widehat{BCQ}$ sono dunque complementari.

I punti P, C e Q sono quindi allineati perché ....

6 In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono ciascuno il doppio dell'angolo al vertice; dopo aver determinato l'ampiezza dei suoi angoli, dimostra che, tracciando la bisettrice di uno degli angoli alla base, il triangolo dato rimane diviso in due triangoli isosceli.

7 Dato un triangolo equilatero ABC, traccia le sue altezze AK e BH che si incontrano in P. Dimostra che:

a. i triangoli APH e BPK sono congruenti

b. i triangoli precedenti hanno gli angoli della stessa ampiezza di quelli del triangolo AKC.

8 Disegna un triangolo ABC (con $BC > AB$) e prendi un punto P sul lato BC in modo che sia $BP \cong AP$; sul prolungamento di AP oltre P prendi poi un punto Q in modo che sia $PQ \cong PC$. Dimostra che:

a. QC è parallelo ad AB

b. $\widehat{PCQ} \cong \frac{1}{2}\widehat{BPQ}$

c. la retta della mediana PM relativa al lato CQ del triangolo PCQ è perpendicolare ad AB.

Verifica del recupero

1 Barra vero o falso.
Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti:
a. due lati V F
b. tre lati V F
c. tre angoli V F
d. due lati e l'angolo compreso V F
e. due angoli e il lato compreso V F
f. due angoli e un lato qualsiasi. V F

1 punto

2 Sia M il punto medio della base BC di un triangolo isoscele ABC; prendi un punto D su AB e un punto E su AC in modo che sia $AD \cong AE$; traccia i segmenti DM e EM e dimostra che AM è bisettrice dell'angolo $\widehat{DME}$.

2 punti

3 Barra vero o falso.
Due rette sono parallele se
a. hanno una perpendicolare comune V F
b. tagliate da una trasversale formano angoli coniugati congruenti V F
c. tagliate da una trasversale formano angoli alterni congruenti V F
d. tagliate da una trasversale formano angoli corrispondenti supplementari V F
e. tagliate da una trasversale formano angoli coniugati complementari V F
f. tagliate da una trasversale formano angoli corrispondenti congruenti. V F

1 punto

4 Disegna un triangolo qualsiasi ABC, traccia da un punto P del lato AB la parallela ad AC che incontra in Q il lato BC; traccia da Q la parallela al lato AB che incontra AC in R. Dimostra che i triangoli BPQ e RCQ hanno gli angoli congruenti a quelli del triangolo ABC.

2 punti

5 Dato un angolo convesso $\widehat{ab}$ di vertice V, prendi un punto A sul lato a e un punto B sul lato b in modo che sia $VA \cong VB$; traccia da tali punti le parallele ai lati dell'angolo che si incontrano in C. Dimostra che AB e VC sono perpendicolari.

3 punti

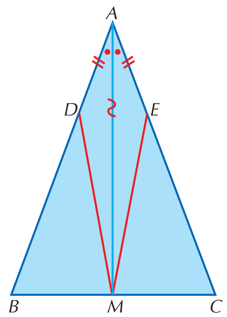
6 Completa in modo che le proposizioni che seguono risultino vere.
a. Un triangolo ABC ha l'angolo di vertice A di ampiezza α e l'angolo di vertice B di ampiezza 2α; l'angolo esterno di vertice C ha ampiezza ....
b. Un triangolo ha un angolo di ampiezza β, un angolo di ampiezza 2β e un angolo di ampiezza 3β; il triangolo è ....
c. Un triangolo isoscele ha l'angolo al vertice che è doppio di ciascuno degli angoli alla base; il triangolo è ....

1 punto

Soluzioni

1 **a.** F, **b.** V, **c.** F, **d.** V, **e.** V, **f.** V

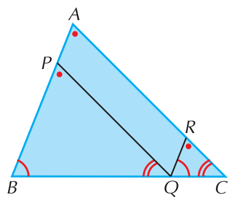
2



AM è mediana e bisettrice dell'angolo di vertice *A*; i triangoli *ADM* e *AEM* sono congruenti per il primo criterio: $AD \cong AE$, *AM* in comune, $\widehat{DAM} \cong \widehat{EAM}$; quindi $\widehat{AMD} \cong \widehat{AME}$

3 **a.** V, **b.** F, **c.** V, **d.** F, **e.** F, **f.** V

4



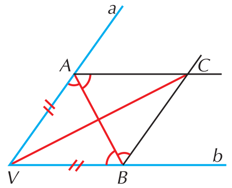
$AB \parallel QR : \widehat{ABC} \cong \widehat{RQC}$

$\widehat{BAC} \cong \widehat{QRC}$ perché corrispondenti

$AC \parallel PQ : \widehat{BAC} \cong \widehat{BPQ}$

$\widehat{ACB} \cong \widehat{BQP}$ perché corrispondenti

5



I triangoli *VAB* e *CAB* sono congruenti per il secondo criterio: *AB* in comune, $\widehat{VAB} \cong \widehat{CBA}$ perché alterni interni delle rette parallele *VA* e *BC*, $\widehat{CAB} \cong \widehat{VBA}$ perché alterni interni delle rette parallele *AC* e *VB* ed inoltre i quattro angoli sono tutti congruenti fra loro.
Essendo $VA \cong VB$, si ha che $VA \cong VB \cong AC \cong BC$; i triangoli *VAC* e *VBC* sono quindi isosceli e *AB* è la bisettrice dell'angolo al vertice di ciascuno dei due triangoli; poiché la bisettrice è anche altezza, $AB \perp VC$.

6 **a.** 3α, **b.** rettangolo, **c.** rettangolo

Esercizio	1	2	3	4	5	6	
Punteggio							

Valutazione in decimi

Math in English

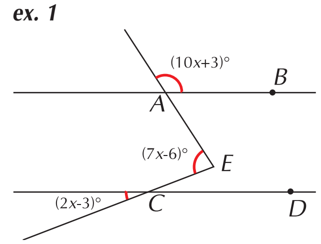
Gli esercizi proposti in questa rubrica conclusiva dell'area provengono da gare di Matematica internazionali e da esami finali, opportunamente adattati, in varie scuole dei Paesi di lingua anglosassone.

Glossary

angle	angolo	**measurement**	misurazione
bisector	bisettrice	**point**	punto
blank	spazio vuoto	**side**	lato
lenght	lunghezza	**triangle**	triangolo
measure	misura		

1 In the figure on the right hand, $AB \parallel CD$. Find the value of x.

ex. 1



2 In triangle ABC, $AB = 10$ and $BC = 21$. The lenght of side AC must be between what two measurements? (Write the two answers in the blanks provided below)

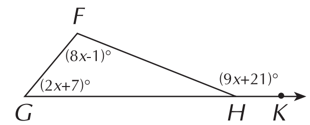
.... $< AC <$ ....

3 Triangle FGH is shown on the right hand, with point K located on GH. If the measure of $\widehat{G}$ is $(2x+7)^\circ$, the measure of $\widehat{F}$ is $(8x-1)^\circ$ and the measure of $\widehat{FHK}$ is $(9x+21)^\circ$, find the measure of $\widehat{FHG}$.

a. 15° **b.** 24° **c.** 37°

d. $\left(93 \cdot \frac{9}{19}\right)^\circ$ **e.** 156

ex. 3

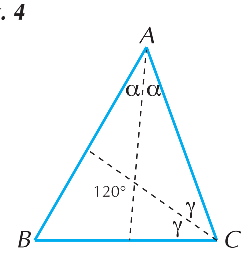


4 In the figure shown, the measure of an angle formed by the bisectors of two angles in triangle ABC is 120°. Find the measure of angle B.

a. 40° **b.** 45° **c.** 50°

d. 60° **e.** 80°

ex. 4



5 The sides of a triangle are $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ and $\sqrt{11}$. Which of the following best describes the triangle?

a. isosceles **b.** non existent **c.** acute

d. equilateral **e.** scalene

1 $x = 12°$ **2** $11 < AC < 31$ **3** b. **4** d. **5** b.