

# I regimi finanziari

## Obiettivi

- riconoscere un'operazione di capitalizzazione e di sconto
- saper operare nei vari regimi finanziari
- saper convertire i tassi di interesse

## 1. I TERMINI FONDAMENTALI E IL LORO SIGNIFICATO

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 33

Ascoltando un telegiornale qualsiasi o leggendo un giornale è impossibile non sentire parole quali *borsa, titoli, mutui, prestiti, tassi, sconti, rate*, e molte di queste parole fanno anche parte della nostra vita quotidiana: quando andiamo a fare acquisti in periodo di saldi, quando veniamo invitati ad aprire un conto corrente online ad un tasso d'interesse particolarmente accattivante, quando acquistiamo una casa o più semplicemente un'auto e chiediamo la concessione di un mutuo per pagarla.

In questo e nei prossimi capitoli cercheremo di capire come affrontare problemi economici di vario tipo con esempi tratti da situazioni reali; in primo luogo, è importante imparare il significato di alcuni termini, anche se alcuni di essi sono di uso comune.

Chiamiamo **operazione finanziaria** ogni operazione in cui viene coinvolta una somma di denaro.

L'insieme delle operazioni finanziarie è l'oggetto della **matematica finanziaria**. Sono per esempio operazioni finanziarie i prestiti di denaro, i pagamenti delle rate di un mutuo, gli investimenti in titoli azionari.

In questo capitolo tratteremo solo le operazioni finanziarie certe, quelle cioè in cui tutte le variabili in gioco non sono soggette a valutazioni di tipo probabilistico.

Quando si presta del denaro (anche un deposito in un conto corrente bancario si può considerare un prestito che viene fatto a una banca), in genere si vuole avere un guadagno; reciprocamente, quando lo si riceve in prestito si deve restituire una somma maggiore che rappresenta il guadagno di chi ha prestato il denaro.

Si dice **interesse** il compenso che è dovuto a chi ha prestato del denaro e che colui che lo ha ricevuto deve pagare.

Per esempio, se abbiamo prestato € 1000 e ne chiediamo 1050 in pagamento, l'interesse è di € 50.

Quando si entra in un negozio e si acquista un oggetto, per esempio un frigorifero, spesso si ottiene uno sconto sul prezzo di listino, cioè paghiamo una somma inferiore a quella che è prevista.

Si chiama **sconto** la differenza tra la somma che avremmo dovuto pagare e quella che effettivamente abbiamo pagato.

Se il frigorifero costava € 1250 e abbiamo pagato € 1100 abbiamo ottenuto uno sconto di € 150.

Nelle operazioni finanziarie il tempo gioca un ruolo fondamentale e parliamo di (**figura 1**):

- operazioni di **capitalizzazione**, quando si deve valutare una somma di denaro ad un tempo  $t_1$  posteriore a quello di impiego  $t_0$ ; la somma al tempo  $t_0$  rappresenta il **capitale**, quella al tempo  $t_1$  prende il nome di **montante**
- operazioni di **attualizzazione**, quando si deve valutare una somma di denaro ad un tempo  $t_0$  anteriore a quello di utilizzo  $t_1$ ; la somma al tempo  $t_1$  rappresenta il **capitale**, quella al tempo  $t_0$  prende il nome di **valore attuale**.

Per esempio:

- si ha una capitalizzazione quando si deposita una somma  $C$  (il *capitale*) in un conto corrente bancario o postale ad un certo tasso di interesse e si valuta la somma  $M$  (il *montante*) che si avrà trascorso un certo periodo di tempo;
- si ha una attualizzazione quando si vuole estinguere un debito  $D$  (il *capitale*) pagandolo un certo periodo di tempo prima della sua scadenza; il valore del debito al momento del pagamento anticipato è il suo *valore attuale*.

In una capitalizzazione, il montante  $M$  è sempre uguale al capitale impiegato  $C$  più l'interesse  $I$ :

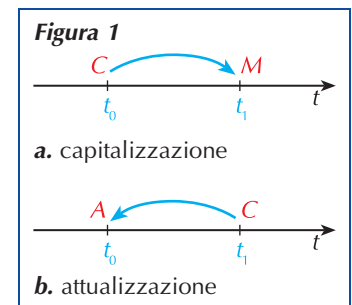
$$M = C + I$$

In una attualizzazione, il valore attuale  $V$  è sempre uguale al capitale che avremmo dovuto pagare meno lo sconto  $S$ :

$$V = C - S$$

In un problema di matematica finanziaria, è spesso utile rappresentare la situazione su una retta detta **asse del tempo**; la **figura 1** precedente ne è un esempio. Di solito, lo zero corrisponde al tempo presente, i tempi successivi vengono indicati sulla semiretta positiva, quelli antecedenti sulla semiretta negativa. Oltre ai tempi, vengono riportate le somme di denaro con un segno positivo se si tratta di versamenti o comunque di crediti, con un segno negativo se si tratta di prelievi o debiti.

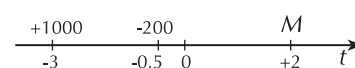
## LA CLASSIFICAZIONE DELLE OPERAZIONI FINANZIARIE



## L'ASSE DEL TEMPO

Per esempio, in **figura 2** abbiamo rappresentato la seguente situazione: un deposito di € 1000 fatto tre anni fa, un prelievo di € 200 fatto sei mesi fa (0,5 anni) e abbiamo indicato con  $M$  la somma che avremo fra due anni considerando che nel frattempo sono maturati degli interessi.

**Figura 2**



Quando si deposita una somma o quando si chiede un prestito a una banca, immediatamente si chiede qual è il tasso di interesse che viene applicato. La risposta a questa domanda non è così semplice e deve essere analizzata con attenzione.

Supponiamo che Carlo chieda a Mario un prestito di € 5000.

Ovviamente Mario deve avere un vantaggio da questa operazione e chiede a Carlo di restituirgli € 5200 dopo un anno, ricevendo così un interesse di € 200. Carlo, che ha sempre bisogno di soldi, chiede anche a Luca di prestargli € 8000 e Luca è disposto a darglieli dietro un pagamento di € 8400 dopo un anno. Quale dei due creditori è stato meno esoso nelle sue richieste?

Un modo per dare una risposta a questa domanda è quello di valutare l'interesse corrisposto in rapporto alla somma prestata:

- nel caso di Mario:  $\frac{200}{5000} = 0,04$
- nel caso di Luca:  $\frac{400}{8000} = 0,05$

I due valori ottenuti rappresentano la somma che deve essere corrisposta ai due creditori per ogni euro prestato; dunque a Mario devono essere restituiti 0,04 euro per ogni euro prestato, a Luca ne devono essere restituiti 0,05; dobbiamo concludere che le condizioni di Luca sono più onerose di quelle di Mario.

Queste considerazioni possono essere generalizzate nella seguente definizione.

Si chiama **tasso unitario di interesse**, e si indica con la lettera  $i$ , l'interesse prodotto da ogni euro di capitale nell'unità di tempo  $t$ .

Se  $I$  è l'interesse complessivo prodotto dal capitale  $C$ , si ha che:

$$i = \frac{I}{C}$$

Se non è diversamente specificato, l'unità di tempo è l'anno e si parla di **tasso di interesse annuo**.

La formula precedente consente poi di trovare:

- l'interesse  $I$  noti il capitale  $C$  e il tasso  $i$ :  $I = C \cdot i$
- il capitale  $C$  noti l'interesse  $I$  e il tasso  $i$ :  $C = \frac{I}{i}$

Spesso, un tasso di interesse si esprime in forma percentuale, che si ottiene moltiplicando per 100 il tasso unitario  $i$ ; reciprocamente, per passare dalla forma percentuale a quella unitaria si deve dividere per 100:

- un tasso unitario pari a 0,04 in forma percentuale corrisponde al 4%
- un tasso percentuale pari a 1,2% in forma unitaria è 0,012.

Nel calcolo, il tasso di interesse deve sempre essere espresso in forma unitaria.

## IL TASSO DI INTERESSE

In questa operazione finanziaria, Carlo è il **debitore** o **mutuatario**, Mario e Luca sono i **creditori** o **mutuanti**.

Se l'unità di tempo non è l'anno, occorre specificare qual è il periodo esprimendolo in frazione di anno.

Per esempio, un tasso trimestrale indica che gli interessi vengono valutati ogni tre mesi e poiché 3 mesi corrispondono a  $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$  di anno, un tasso trimestrale viene indicato con il simbolo  $i_4$ .

In generale:

- il simbolo  $i$  rappresenta un tasso di interesse annuo unitario
- il simbolo  $i_k$  rappresenta un tasso di interesse unitario periodale, dove  $k$  indica il numero di periodi che ci sono in un anno.

I tassi periodali di uso più comune sono:

- il tasso semestrale, indicato con il simbolo  $i_2$  (2 semestri in un anno)
- il tasso mensile, indicato con il simbolo  $i_{12}$  (12 mesi in un anno)
- il tasso trimestrale, indicato con il simbolo  $i_4$  (4 trimestri in un anno)
- il tasso quadrimestrale, indicato con il simbolo  $i_3$  (3 quadrimestri in un anno)

È poi importante sottolineare che:

**in tutte le formule finanziarie il tasso di interesse e il tempo devono essere espressi nella stessa unità di misura.**

Per esempio se il tasso di interesse è annuo il tempo deve essere espresso in anni, se il tasso è trimestrale il tempo deve essere espresso in trimestri e così via.

Nelle conversioni dei tempi si utilizza l'anno commerciale, che viene considerato formato da 12 mesi di 30 giorni ciascuno, complessivamente 360 giorni.

*I tempi commerciali:*

- 1 anno = 360 giorni
- 1 mese = 30 giorni

Un altro tasso che si usa frequentemente è il **tasso annuo nominale convertibile  $k$  volte in un anno** che viene indicato con il simbolo  $j_k$  e che è definito dalla seguente relazione:

$$j_k = k \cdot i_k \quad \text{e reciprocamente} \quad i_k = \frac{j_k}{k}$$

In pratica, per passare da un tasso annuo nominale convertibile  $k$  volte al corrispondente tasso periodale, basta dividere  $j_k$  per  $k$ .

Per esempio, un tasso annuo nominale  $j_3$  convertibile 3 volte in un anno del 6% corrisponde a un tasso quadrimestrale  $i_3 = \frac{0,06}{3} = 0,02 \rightarrow 2\%$ .

## ESEMPI

1. Nel calcolo dell'interesse il tasso  $i$  è annuo. Esprimiamo correttamente il tempo se la durata del prestito è di:

- 2 anni e 3 mesi
- 5 anni, 6 mesi e 20 giorni

Poiché il tasso è annuo dobbiamo esprimere il tempo in anni:

a. 2 anni e 3 mesi corrispondono ad anni:  $2 + \frac{3}{12} = \frac{9}{4}$

b. 5 anni, 6 mesi e 20 giorni corrispondono ad anni:  $5 + \frac{6}{12} + \frac{20}{360} = \frac{50}{9}$

2. Investiamo un capitale  $C$  di € 3000 ad un tasso del 3% annuo. Quale somma avremo dopo un anno? Un tasso del 3% corrisponde in forma unitaria a  $i = 0,03$ .

Tasso di interesse e tempo sono omogenei, possiamo quindi calcolare l'interesse prodotto:

$$I = C \cdot i = 3000 \cdot 0,03 = 90 (\text{€})$$

Dopo un anno avremo una somma in euro pari a:  $M = C + I = 3000 + 90 = 3090 (\text{€})$ .

3. Una Banca presta € 12000 ad un cliente convenendo che questi restituisca dopo un anno € 12540. A quale tasso di interesse annuo è stata convenuta l'operazione?

Calcoliamo innanzi tutto l'ammontare degli interessi:  $12540 - 12000 = 540 (\text{€})$

Il tempo e il tasso sono entrambi riferiti all'anno; il tasso annuo  $i$  è quindi uguale a:

$$i = \frac{I}{C} = \frac{540}{12000} = 0,045 \quad \text{corrispondente a un tasso annuo percentuale del 4,5\%}.$$

In ogni operazione finanziaria, chi presta del denaro vuole avere un guadagno, chi lo riceve deve pagare per averlo e le regole di questo "gioco" devono essere chiare e note alle due parti.

## I REGIMI FINANZIARI

L'insieme delle regole che vengono stabilite per la valutazione di operazioni finanziarie indica il **regime finanziario** in cui si opera.

Nei prossimi paragrafi studieremo i principali regimi che sono:

- i regimi di **interesse semplice e composto** che rappresentano delle operazioni di capitalizzazione
- i regimi di **sconto** che rappresentano delle operazioni di attualizzazione.

## VERIFICA DI COMPrensIONE

1. Un tempo  $t$  di 2 anni e 3 mesi corrisponde a:

- a. 4 semestri                      b. 9 trimestri                      c. 13 bimestri                      d. 4,5 semestri

2. Barra Vero o Falso.

- a. Il tasso  $i_3$  corrisponde a un tasso trimestrale  
b. Il tasso  $i_2$  corrisponde a un tasso semestrale  
c. Un tasso trimestrale si indica con  $i_4$ .  
d. Un tasso bimestrale si indica con  $i_2$ .  
e. Se  $j_3 = 0,075$ , allora  $i_3 = 0,025$ .

V F  
V F  
V F  
V F  
V F

## 2. IL REGIME DI INTERESSE SEMPLICE

Il primo regime finanziario di cui ci occupiamo è quello di interesse semplice e diciamo che:

si opera in regime di **interesse semplice** quando l'interesse  $I$  è proporzionale al capitale  $C$  e al tempo  $t$ .

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 35

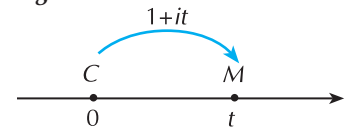
La costante di proporzionalità è proprio il tasso di interesse  $i$ .

Per esempio, in regime di interesse semplice:

- un capitale di € 6 000 produce un interesse doppio di un capitale di € 3 000 se vengono impiegati allo stesso tasso e per lo stesso tempo
- due capitali uguali, se impiegati allo stesso tasso, il primo per un tempo  $t_1$  e il secondo per un tempo  $t_2$  triplo del primo, producono interessi che sono il secondo il triplo del primo.

Le **leggi di capitalizzazione** che regolano questo regime sono quindi le seguenti (**figura 3**):

**Figura 3**



### LE LEGGI DI CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

■  $I = Cit$

che esprime la proporzionalità tra  $I$ ,  $C$  e  $t$ .

■  $M = C(1 + it)$

che si ricava direttamente dalla definizione di montante:

$$M = C + I = C + Cit = C(1 + it)$$

Il fattore  $(1 + it)$  viene detto *fattore di capitalizzazione semplice* ed esprime il montante prodotto da 1 euro di capitale nel tempo  $t$ .

Le stesse leggi valgono quando il tasso di interesse è periodale, se il tempo viene espresso nella stessa unità di misura del periodo.

## ESEMPI

Risolviamo i seguenti esercizi in regime di interesse semplice.

### 1. Calcolo dell'interesse e del montante con tasso annuo

Calcoliamo interesse e montante prodotti da:

- un capitale di € 1000 per un periodo di 2 anni al tasso annuo dell'1,3%
- un capitale di € 2400 per un periodo di 8 mesi al tasso annuo del 4%.

a. Abbiamo che:  $C = 1000$      $t = 2$      $i = 0,013$

$$\text{Calcoliamo interesse e montante: } I = 1000 \cdot 2 \cdot 0,013 = 26(\text{€})$$

$$M = 1000 + 26 = 1026(\text{€})$$

b. Esprimiamo innanzi tutto il tempo in anni e scriviamo i dati:  $t = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$      $C = 2400$      $i = 0,04$

$$\text{Quindi: } I = 2400 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,04 = 64(\text{€})$$

$$M = 2400 + 64 = 2464(\text{€})$$

### 2. Calcolo del montante con tasso periodale

Calcoliamo il montante prodotto da:

- un capitale di € 4000 in un anno al tasso semestrale dello 0,5%
- un capitale di € 8000 in 7 mesi al tasso trimestrale dello 0,3%

a.  $C = 4000$      $t = 1 \text{ anno} = 2 \text{ semestri}$      $i_2 = 0,005$

$$\text{Quindi: } M = C(1 + it) = 4000(1 + 0,005 \cdot 2) = 4040(\text{€})$$

$$\text{b. } C = 8000 \quad t = 7 \text{ mesi} = \frac{7}{12} \cdot 4 \text{ trimestri} = \frac{7}{3} \text{ di trimestre} \quad i_4 = 0,003$$

$$\text{Quindi: } M = C(1 + it) = 8000 \left( 1 + 0,003 \cdot \frac{7}{3} \right) = 8056 \text{ (€)}$$

### 3. Calcolo del capitale iniziale

Determiniamo il capitale  $C$  che dopo 1 anno e 2 mesi, al tasso annuo del 2%, produce un montante di € 4500.

$$\text{Abbiamo che: } M = 4500 \quad i = 0,02 \quad t = 1 + \frac{2}{12} = \frac{7}{6} \text{ di anno}$$

$$\text{Scriviamo la formula del montante: } M = C(1 + it) \text{ dalla quale ricaviamo che: } C = \frac{M}{1 + it}$$

$$\text{cioè: } C = \frac{4500}{1 + 0,02 \cdot \frac{7}{6}} = 4397,39 \text{ (€)}$$

### 4. Calcolo del tempo di impiego

Calcoliamo il tempo necessario affinché un capitale di € 600 produca, al tasso annuo del 3,4%, un interesse di € 30.

$$\text{Abbiamo che: } C = 600 \quad i = 0,034 \quad I = 30$$

$$\text{Applichiamo la formula } 30 = 600 \cdot 0,034 \cdot t \text{ da cui } t = \frac{30}{600 \cdot 0,034} = 1,47 \text{ (anni)}$$

Quando in un problema dobbiamo calcolare un tempo, generalmente otteniamo un numero decimale. Poiché, nel nostro caso, l'unità di misura è l'anno, la parte intera di tale numero rappresenta proprio gli anni; per trasformare la parte decimale in mesi e giorni seguiamo questo algoritmo:

- sottraiamo la parte intera e moltiplichiamo il numero ottenuto per 12 (numero dei mesi in un anno):  $1,47 - 1 = 0,47$        $0,47 \cdot 12 = 5,64$
- la parte intera del numero ottenuto rappresenta i mesi; nel nostro caso otteniamo 5 mesi
- sottraiamo di nuovo la parte intera e moltiplichiamo il numero ottenuto per 30 (numero dei giorni di un mese commerciale):  $5,64 - 5 = 0,64$        $0,64 \cdot 30 = 19,2$
- la parte intera del numero ottenuto rappresenta i giorni; nel nostro caso 19 giorni.

Quindi 1,47 anni corrispondono a 1 anno, 5 mesi e 19 giorni.

A volte è più comodo trasformare la parte decimale di anno direttamente in giorni; basta allora moltiplicare per 360 la parte decimale del numero ottenuto. Nel nostro caso 0,47 anni corrispondono a  $0,47 \cdot 360 \approx 169$  giorni.

### 5. Calcolo del tasso di interesse

Un capitale di € 300, investito per 3 mesi, ha prodotto un montante di € 304. Calcoliamo il tasso di interesse annuo.

$$\text{Abbiamo che: } C = 300 \quad t = 3 \text{ mesi} = \frac{1}{4} \text{ di anno} \quad M = 304$$

Anche in questo caso abbiamo un problema inverso. Applicando la formula possiamo scrivere

$$304 = 300 \left( 1 + i \cdot \frac{1}{4} \right) \quad \text{da cui} \quad i = 0,053$$

Il tasso annuo percentuale è quindi del 5,3%.

## VERIFICA DI COMPrensIONE

1. Un capitale di € 3000 impiegato al tasso annuo del 6%, in 2 anni e 3 mesi produce un interesse di euro:  
a. 432                      b. 414                      c. 360                      d. 405
2. Un capitale di € 1500 viene investito al tasso annuo del 2,7% e, trascorso un tempo  $t$ , restituisce un montante di € 1527. Quanto vale  $t$ ?  
a. 1 anno                      b. 8 mesi                      c. 7 mesi                      d. 6 mesi
3. Il montante prodotto da un capitale di € 800 impiegato per due anni e tre mesi al tasso semestrale  $i_2 = 0,025$  è uguale a:  
a. 890                      b. 850                      c. 846                      d. 845

### 3. IL REGIME DI INTERESSE COMPOSTO

Nella maggior parte delle operazioni finanziarie il criterio che si applica nel calcolo degli interessi e dei montanti obbedisce a un principio di accumulo del capitale con gli interessi. Per comprendere come avviene questa operazione vediamo dapprima un esempio molto semplice.

Supponiamo di avere depositato un capitale di € 1000 in un conto corrente bancario ad un tasso del 2% annuo. Al termine del primo anno di giacenza il montante  $M_1$  a disposizione si può calcolare con la formula dell'interesse semplice:

$$M_1 = 1000(1 + 0,02 \cdot 1) = 1020$$

Questo montante diventa il nuovo capitale sul quale la banca deve pagare gli interessi l'anno successivo; al termine del secondo anno di giacenza il montante  $M_2$  sarà quindi:

$$M_2 = 1020(1 + 0,02 \cdot 1) = 1040,40$$

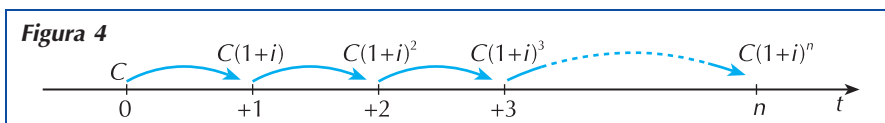
Il ragionamento si può ripetere anche per il terzo anno di giacenza e al termine di questo periodo il montante che avremo a disposizione è uguale a:

$$M_2 = 1040,40(1 + 0,02 \cdot 1) = 1061,208$$

In sostanza, mentre nel regime di interesse semplice la capitalizzazione degli interessi viene fatta una volta sola al termine del periodo di impiego del capitale, in questa nuova ottica gli interessi maturano e vanno ad aggiungersi al capitale ad ogni scadenza del periodo fissato, diventando in questo modo anch'essi fruttiferi. Diciamo allora che:

si opera in **regime finanziario di interesse composto** quando l'interesse viene capitalizzato al termine di ciascun periodo e contribuisce quindi alla valutazione dell'interesse nel periodo successivo.

Per determinare la legge di capitalizzazione in regime di interesse composto ripetiamo in termini generali il ragionamento seguito nell'esempio iniziale (seguì anche la **figura 4**).



Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 41



Applicazione  
informatica on line



Consideriamo un capitale  $C$  impiegato ad un tasso annuo  $i$  e indichiamo con  $M_1$  il montante alla scadenza del primo periodo:

$$M_1 = C(1 + i)$$

$M_1$  diventa il nuovo capitale che, alla scadenza del secondo anno, produce un montante  $M_2$  pari a:

$$M_2 = M_1(1 + i) = C(1 + i)^2$$

$M_2$  diventa il nuovo capitale che, alla scadenza del terzo anno, produce un montante  $M_3$  pari a:

$$M_3 = M_2(1 + i) = C(1 + i)^3$$

In definitiva, dopo  $n$  periodi, il montante  $M$  a disposizione è:

$$M = C(1 + i)^n$$

L'interesse complessivo maturato durante gli  $n$  anni è la differenza fra  $M$  e il capitale iniziale  $C$ :

$$I = M - C = C(1 + i)^n - C = C[(1 + i)^n - 1]$$

Le stesse formule valgono anche quando il tasso non è annuo ma periodale a patto di esprimere il tempo nella stessa unità di misura del periodo del tasso; l'esponente  $n$  che nelle formule precedenti rappresenta il numero di anni, quindi un numero intero, diventa in questo caso un numero reale che si rappresenta di solito con  $t$ .

In generale, quindi, le **leggi di capitalizzazione in regime di interesse composto** sono le seguenti:

■  $M = C(1 + i)^t$

■  $I = C[(1 + i)^t - 1]$

## LE LEGGI DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

Per esempio:

- il montante prodotto da un capitale  $C$  di € 6000 in capitalizzazione composta al tasso annuo del 3,8% per 3 anni è:

$$M = 6000(1 + 0,038)^3 = 6710,32 \text{ (€)}$$

- il montante prodotto da un capitale  $C$  di € 4000 in capitalizzazione composta al tasso semestrale dell'1,5% per 8 mesi, cioè in semestri  $1 + \frac{2}{6} = \frac{4}{3}$  è:

$$M = 4000(1 + 0,015)^{\frac{4}{3}} = 4080,20 \text{ (€)}$$

### ESEMPI

Risolviamo i seguenti esercizi in regime di interesse composto.

#### 1. Calcolo del montante

Calcoliamo il montante prodotto da un capitale di € 45000 e gli interessi maturati nei seguenti casi:

- tasso annuo del 3% per un tempo di 2 anni e 4 mesi
- tasso semestrale dell'1,2% per un tempo di 1 anno e 5 mesi
- tasso trimestrale dello 0,2% per un tempo di 3 anni e 6 mesi.

a. Prima di applicare la formula del montante trasformiamo il tempo in anni: 2 anni 4 mesi corrispondono

$$\text{no ad anni: } 2 + \frac{4}{12} = \frac{7}{3}$$

$$M = 45000(1 + 0,03)^{\frac{7}{3}} = 48213,21(\text{€}) \quad I = M - C = 48213,21 - 45000 = 3213,21(\text{€})$$

b. Trasformiamo il tempo in semestri: 1 anno e 5 mesi corrispondono a semestri:  $2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$

$$M = 45000(1 + 0,012)^{\frac{17}{6}} = 46546,89(\text{€}) \quad I = 46546,89 - 45000 = 1546,89(\text{€})$$

c. Trasformiamo il tempo in trimestri: 3 anni e 6 mesi corrispondono a trimestri:  $3 \cdot 4 + 2 = 14$

$$M = 45000(1 + 0,002)^{14} = 46276,51(\text{€}) \quad I = 46276,51 - 45000 = 1276,51(\text{€})$$

## 2. Calcolo del capitale

Calcoliamo il capitale investito nelle seguenti situazioni:

a. tasso annuo del 2,5%, tempo di impiego 3 anni, montante € 35 800

b. tasso quadrimestrale dello 0,4%, tempo di impiego 2 anni e 6 mesi, montante € 10 230.

a. Abbiamo che:  $M = 35800 \quad i = 0,025 \quad t = 3$

Sostituiamo i dati nella formula del montante e risolviamo l'equazione:

$$35800 = C(1 + 0,025)^3 \quad \rightarrow \quad C = \frac{35800}{1,025^3} \quad \rightarrow \quad C = 33243,86(\text{€})$$

b. Abbiamo che:  $M = 10230 \quad i_3 = 0,004 \quad t \text{ (in quadrimestri)} = 2 \cdot 3 + \frac{6}{4} = \frac{15}{2}$

$$\text{Equazione: } 10230 = C(1 + 0,004)^{\frac{15}{2}} \quad \rightarrow \quad C = \frac{10230}{1,004^{\frac{15}{2}}} \quad \rightarrow \quad C = 9928,25(\text{€})$$

## 3. Calcolo del tasso

Impiegando un capitale di € 10 000 con capitalizzazione trimestrale, dopo 3 anni e 4 mesi ritiriamo € 11 720. A quale tasso trimestrale è stato impiegato il capitale?

Impostiamo l'equazione modello del problema considerando che il tempo deve essere espresso in trimestri:

$$t = 3 \text{ anni } 4 \text{ mesi} = 13 + \frac{1}{3} = \frac{40}{3} \text{ (trimestri)}$$

L'equazione del problema è quindi:  $11720 = 10000(1 + i_4)^{\frac{40}{3}}$

$$\text{da cui } (1 + i_4)^{\frac{40}{3}} = \frac{11720}{10000} \quad \rightarrow \quad 1 + i_4 = \left(\frac{11720}{10000}\right)^{\frac{3}{40}} \quad \rightarrow \quad i_4 = \left(\frac{11720}{10000}\right)^{\frac{3}{40}} - 1$$

Ricorrendo alla calcolatrice, troviamo un tasso trimestrale pari a circa 0,012, cioè l'1,2%.

## 4. Calcolo del tempo di impiego

Calcoliamo in quanto tempo un capitale di € 1 000 produce un montante di € 1 300 al tasso annuo del 4,3%.

Scriviamo l'equazione modello del problema

$$1300 = 1000(1 + 0,043)^t \quad \text{che, semplificata, diventa } 1,043^t = \frac{13}{10}$$

Si tratta di un'equazione esponenziale e, per risolverla, ricorriamo ai logaritmi decimali

$$\log 1,043^t = \log \frac{13}{10} \quad \rightarrow \quad t = \frac{\log 13 - \log 10}{\log 1,043} \approx 6,2317562 \text{ (anni)}$$

Convertendo il tempo in anni, mesi e giorni, la durata dell'operazione deve essere di 6 anni, 2 mesi, 23 giorni.

## VERIFICA DI COMPrensIONE

1. Un capitale di € 4 800 viene impiegato in capitalizzazione composta per 2 anni e 3 mesi al tasso annuo del 6%. Gli interessi ammontano a euro:  
a. 654,42                      b. 688,42                      c. 672,42                      d. 680,42
2. Da un investimento di € 2800, dopo 2 anni e 6 mesi e ad un tasso di interesse composto semestrale, si ritira un somma pari a € 3 245,98. Il tasso di interesse  $i_2$  è uguale a:  
a. 2,5%                      b. 3,2%                      c. 2,8%                      d. 3%
3. Si investono € 8000 in capitalizzazione composta ad un tasso annuo del 4,5%; dopo quanto tempo si ritira un montante di € 8 736,20?  
a. 1 anno e 6 mesi                      b. 2 anni                      c. 3 anni                      d. 2 anni e 3 mesi

## 4. I REGIMI DI SCONTO

In questo paragrafo affrontiamo problemi relativi all'*attualizzazione* di un capitale, vogliamo cioè conoscere il **valore attuale**  $V$  di un capitale  $C$ .

Il calcolo del valore attuale si presenta, ad esempio, nelle cessioni dei crediti. Supponiamo che un'azienda debba ricevere in pagamento € 120 000 tra 4 mesi ma che, avendo immediato bisogno di denaro, ceda il suo credito a una banca (sarà cioè la banca ad incassare i 120 000 euro tra 4 mesi) la quale però oggi dà all'azienda una somma inferiore.

Il pagamento anticipato di un debito o, simmetricamente, la riscossione anticipata di un credito danno diritto ad uno sconto che si può valutare in base ad un certo tasso che viene di solito fissato dalle due parti tenendo presenti le regole del mercato; a seconda delle modalità con cui di conseguenza viene valutato il valore attuale del debito o del credito distinguiamo tre **regimi di sconto**:

- lo sconto commerciale
- lo sconto semplice o razionale
- lo sconto composto.

### 4.1 Il regime di sconto commerciale

La caratteristica fondamentale di questo regime di sconto è la seguente.

Lo sconto commerciale  $S_c$  è proporzionale al capitale  $C$  e al tempo di anticipazione  $t$ .

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 47

Attualizzare un capitale significa valutare una somma di denaro ad un tempo  $t_0$  anteriore a quello di utilizzo  $t_1$ ; la somma al tempo  $t_1$  rappresenta il **capitale**, la somma al tempo  $t_0$  è il suo **valore attuale**.



La costante di proporzionalità è il tasso di interesse che viene indicato con  $d$  e che prende il nome di **tasso di sconto commerciale** o anche **tasso di interesse anticipato**.

Possiamo esprimere la definizione data con una formula:

$$S_c = Cdt$$

nella quale appare evidente che **lo sconto viene calcolato sul capitale che deve essere restituito o incassato alla scadenza**.

Il valore attuale del capitale si calcola quindi sottraendo da  $C$  lo sconto:

$$V = C - S_c \quad \text{cioè} \quad V = C - Cdt = C(1 - dt)$$

Le **leggi del regime di sconto commerciale** si possono quindi sintetizzare nelle seguenti formule:

■  $S_c = Cdt$

■  $V = C(1 - dt)$

## LE LEGGI DI SCONTO COMMERCIALE

Il fattore  $(1 - dt)$  prende il nome di *fattore di sconto commerciale*.

Per esempio, se fra 3 mesi dobbiamo riscuotere un capitale di € 3000 e decidiamo di incassarlo oggi, se il tasso di sconto commerciale è del 2,5% annuo:

- lo sconto è  $S_c = 3000 \cdot 0,025 \cdot \frac{3}{12} = 18,75(\text{€})$
- il valore attuale del capitale è  $V = 3000 - 18,75 = 2981,25(\text{€})$

Osserviamo che, nella formula che esprime il valore attuale, l'espressione al secondo membro può anche diventare negativa e che questo porterebbe alla determinazione di un valore attuale negativo, cosa priva di significato dal punto di vista economico. Occorre quindi imporre delle restrizioni al tempo  $t$  chiedendo che sia:

$$1 - dt > 0 \quad \text{cioè} \quad t < \frac{1}{d}$$

In altre parole, **non è possibile anticipare la riscossione di un credito o il pagamento di un debito oltre un certo tempo**.

Di solito, tuttavia, si utilizza questa forma di valutazione dello sconto e del valore attuale per tempi brevi, normalmente inferiori a un anno, ed il problema in questo caso non si presenta mai.

## ESEMPI

Risolviamo i seguenti esercizi in regime di sconto commerciale.

### 1. Calcolo dello sconto e del valore attuale

Valutiamo:

- lo sconto relativo a un capitale di € 3000 al tasso annuo commerciale del 5% con un tempo di anticipo di 3 mesi
- lo sconto relativo a un debito di € 5000 al tasso commerciale trimestrale del 2,3% con un tempo di anticipo di 8 mesi
- il valore attuale di un credito di € 10000 riscosso in anticipo di 11 mesi rispetto alla scadenza al tasso di sconto annuo del 6%.

a. I dati a nostra disposizione sono:  $C = 3000$      $d = 0,05$      $t = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$  in anni

Applichiamo la formula dello sconto  $S_c = Cdt$ :  $S_c = 3000 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{4} = 37,50(\text{€})$

b. Abbiamo che:  $C = 5000$      $d_4 = 0,023$      $t = \frac{8}{3}$  in trimestri

Applichiamo ancora la formula dello sconto:  $S_c = 5000 \cdot 0,023 \cdot \frac{8}{3} = 306,67(\text{€})$ .

c. Abbiamo che:  $C = 10000$      $d = 0,06$      $t = \frac{11}{12}$  in anni

Applichiamo la formula del valore attuale  $V = C(1 - dt)$ :  $V = 10000 \left( 1 - 0,06 \cdot \frac{11}{12} \right) = 9450(\text{€})$

## 2. Calcolo del capitale

Pagando in anticipo di 9 mesi una cambiale e applicando un tasso di sconto annuo del 4%, si ottiene uno sconto di € 30. Calcoliamo il valore della cambiale.

I dati sono:  $S_c = 30$      $d = 0,04$      $t = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Usiamo la formula dello sconto dalla quale possiamo ricavare il valore di  $C$ :

$$30 = C \cdot 0,04 \cdot \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad C = \frac{30}{0,04 \cdot \frac{3}{4}} = 1000(\text{€})$$

## 3. Calcolo del tasso di sconto

Calcoliamo il tasso di sconto nelle seguenti situazioni.

a. Anticipando di 3 mesi la riscossione di un capitale di € 38 000 abbiamo avuto € 37600; determiniamo il tasso di sconto annuo.

b. Anticipando di 5 mesi il pagamento di un capitale di € 5 000 abbiamo ottenuto uno sconto di € 200; determiniamo il tasso di sconto trimestrale.

a. Sappiamo che:  $V = 37600$      $C = 38000$      $t = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$  in anni

Utilizziamo la formula del valore attuale dalla quale possiamo ricavare il valore di  $d$ :

$$V = C(1 - dt) \quad \rightarrow \quad 37600 = 38000 \left( 1 - \frac{1}{4}d \right) \quad \rightarrow \quad d = \frac{4}{95}$$

Troviamo così che  $d = 0,042$  che corrisponde ad un tasso di sconto annuo del 4,2%.

b. I dati sono:  $C = 5000$      $S_c = 200$      $t = \frac{5}{3}$  in trimestri

Applichiamo la formula dello sconto:  $200 = 5000 \cdot \frac{5}{3} \cdot d_4 \quad \rightarrow \quad d_4 = \frac{3}{125}$

Troviamo così che  $d_4 = 0,024$  che corrisponde ad un tasso trimestrale del 2,4%.

**RELAZIONE FRA TASSO DI SCONTO  $d$  E TASSO DI INTERESSE  $i$**

Supponiamo di aver prestato € 500 per un anno ad un tasso annuo di interesse del 4%; gli interessi maturati allo scadere dell'anno sono quindi pari a  $500 \cdot 0,04 \cdot 1 = 20$  (€). Anziché dare al nostro debitore l'intera somma, potremmo richiedere un pagamento anticipato degli interessi, cioè dare una somma pari al prestito meno gli interessi:  $500 - 20 = 480$  (€). Ci comportiamo quindi come se avessimo calcolato il valore attuale commerciale di € 500 ad un tasso di sconto  $d$  del 4%; è questo il motivo per cui il tasso di sconto  $d$  viene anche detto **tasso di interesse anticipato**.

Chiediamoci ora: se depositassimo € 480 per un anno, quale tasso di interesse annuo  $i$  ci dovrebbe essere corrisposto per avere alla fine € 500?

Sicuramente  $i$  deve essere maggiore di  $d$  perchè deve produrre gli stessi interessi di € 20 su una cifra minore; infatti dalla relazione

$$20 = 480i \quad \text{ricaviamo che} \quad i = 0,0417$$

Chiediamoci allora se è possibile trovare una relazione che lega i tassi  $i$  e  $d$  in modo da poter passare facilmente dall'uno all'altro. Ragioniamo in questo modo:

■ se oggi investiamo un capitale  $C$  ad un tasso annuo  $i$ , dopo un tempo  $t$  otteniamo un montante  $M$  dato da

$$M = C(1 + it)$$

■ possiamo però anche dire che la somma  $M$ , esigibile al tempo  $t$ , è equivalente alla somma  $C$  esigibile oggi ad un tasso di sconto  $d$  in modo che sia

$$C = M(1 - dt)$$

Poichè  $M$  e  $C$  hanno lo stesso significato nelle due relazioni, possiamo sostituire l'espressione di  $C$  nella prima ottenendo

$$M = M(1 - dt)(1 + it) \quad \text{cioè} \quad (1 - dt)(1 + it) = 1$$

Risolvendo quest'ultima relazione prima rispetto a  $d$  e poi rispetto a  $i$  otteniamo che

$$d = \frac{i}{1 + it} \quad \text{e} \quad i = \frac{d}{1 - dt}$$

Se poi ci riferiamo ad un tempo unitario, le due relazioni si semplificano e diventano

$$\boxed{d = \frac{i}{1 + i}} \quad \text{e} \quad \boxed{i = \frac{d}{1 - d}}$$

Queste due relazioni ci permettono di passare dal tasso di interesse anticipato  $d$  al tasso di interesse posticipato  $i$  e viceversa quando entrambi i tassi sono espressi rispetto alla stessa unità di misura del tempo. Osserva poi che il tasso  $i$ , come avevamo previsto, risulta essere sempre maggiore del tasso  $d$  perché  $i$  si ottiene dividendo  $d$  per un numero minore di 1.

Proviamo ad applicare tali relazioni all'esempio iniziale; dovendo calcolare il valore di  $i$  ed essendo il tempo di 1 anno, possiamo usare la seconda fra le due relazioni dalla quale ricaviamo che

$$i = \frac{0,04}{1 - 0,04} = 0,0417$$

che coincide con il valore trovato precedentemente.

Per evitare confusioni quando si parla di tasso di interesse, dovremmo riferirci ad  $i$  con il termine di "tasso di interesse annuo posticipato" e a  $d$  con il termine "tasso di interesse annuo anticipato".

Nella pratica, tuttavia, la parola posticipato riferita ad  $i$  viene sottintesa e si parla di tasso di interesse annuo.

## VERIFICA DI COMPrensIONE

1. Completa la seguente tabella operando in regime di sconto commerciale e considerando un tasso di sconto annuo.

$C$	$V$	$S_c$	$d$	$t$
1000			0,06	8 mesi
3500	3450			7 mesi
	2500	70	0,04	

2. A quale tasso di sconto annuo commerciale un capitale di € 3000 produce uno sconto di € 27 in 6 mesi?

- a. 1,8%                      b. 2,4%                      c. 0,18%                      d. 0,24%

3. In quanto tempo da un capitale di € 28 000, scontato commercialmente al tasso semestrale del 3%, si ottiene un valore attuale di € 27 500?

- a. 3m                      b. 3m 12g                      c. 3m 17g                      d. 4m 15g

### 4.2 Il regime di sconto semplice

Il regime di sconto semplice segue leggi analoghe a quelle del regime di interesse semplice; vediamo dapprima attraverso un esempio il ragionamento che si deve seguire.

Supponiamo di aver contratto in passato un debito, ad un tasso concordato del 5% annuo, che ci impone di pagare, tra un anno, € 5250. Se estinguiamo il debito oggi, abbiamo diritto ad uno sconto in modo che € 5 250 tra un anno sia equivalente alla somma da pagare oggi; vale a dire che 5 250 rappresenta il montante che produce la somma  $V$  che dobbiamo pagare oggi al tasso annuo del 5%:

$$5250 = V(1 + 0,05) \quad \text{cioè} \quad V = \frac{5250}{1 + 0,05} = 5000(\text{€})$$

Oggi dobbiamo quindi pagare € 5 000 e questa somma rappresenta il *valore attuale* di € 5 250.

In regime di sconto semplice quindi:

lo sconto  $S_r$  di un capitale  $C$  è l'interesse che la somma scontata  $V$  produrrebbe se venisse impiegata ad un tasso  $i$  per un tempo  $t$  uguale a quello di anticipazione.

$S_r$  viene detto **sconto semplice** o anche **sconto razionale**,  $V$  è il **valore attuale** del capitale  $C$ , il quale prende il nome di **capitale nominale**.

Vista l'analogia con il regime di interesse semplice, le leggi dello sconto semplice si possono ottenere ponendo  $S_r$  al posto di  $I$ ,  $C$  al posto di  $M$  e  $V$  al posto di  $C$ :

**Nel regime di interesse semplice**

$$I = Cit$$

$$M = C(1 + it)$$

**Nel regime di sconto semplice**

$$S_r = Vit$$

$$C = V(1 + it)$$

Le **leggi dello sconto semplice** sono dunque le seguenti:

- il valore attuale  $V$  è proporzionale al capitale  $C$  secondo il fattore

$$\frac{1}{1+it} : \quad V = \frac{C}{1+it}$$

**LE LEGGI DI  
SCONTO SEMPLICE**

- lo sconto  $S_r$  è proporzionale al valore attuale  $V$  e al tempo di anticipo  $t$ :

$$S_r = Vit \quad \text{o anche} \quad S_r = \frac{Cit}{1+it}$$

Il fattore  $\frac{1}{1+it}$  prende il nome di **fattore di sconto semplice**, il tasso  $i$  viene detto **tasso di sconto**.

Lo sconto semplice viene di solito applicato quando l'anticipazione del pagamento è di breve durata rispetto alla scadenza.

## ESEMPI

Risolviamo i seguenti esercizi in regime di sconto semplice.

### 1. Calcolo del valore attuale e dello sconto

Calcoliamo:

- lo sconto su un debito di € 4000 concesso al tasso di interesse annuo del 5% che viene pagato 6 mesi prima della scadenza
- il valore attuale di un debito di € 10000 concesso al tasso semestrale  $i_2$  del 3% che viene estinto 1 mese prima della scadenza.

a. Abbiamo che:  $C = 4000 \quad i = 0,05 \quad t = \frac{6}{12} = 0,5$  in anni

Lo sconto è quindi:  $S_r = \frac{Cit}{1+it} = \frac{4000 \cdot 0,05 \cdot 0,5}{1 + 0,05 \cdot 0,5} = 97,56(\text{€})$

b. Abbiamo che:  $C = 10000 \quad i_2 = 0,03 \quad t = \frac{1}{6}$  in semestri

Il valore attuale è quindi:  $V = \frac{C}{1+it} = \frac{10000}{1 + 0,03 \cdot \frac{1}{6}} = 9950,25(\text{€})$

### 2. Calcolo del capitale

Calcoliamo il capitale che:

- al tasso annuo del 5%, produce uno sconto di € 20 se il pagamento viene anticipato di 6 mesi
- al tasso di sconto trimestrale del 2,6%, con un tempo di anticipazione di 4 mesi dà un valore attuale di € 4832,47.

a. Abbiamo che:  $S_r = 20 \quad i = 0,05 \quad t = 0,5$  in anni

Sostituiamo i dati nella formula dello sconto  $S_r = \frac{Cit}{1+it}$  e ricaviamo  $C$  :

$$20 = \frac{C \cdot 0,05 \cdot 0,5}{1 + 0,05 \cdot 0,5} \quad \rightarrow \quad 20 = \frac{0,025C}{1,025} \quad \rightarrow \quad C = 820(\text{€})$$



b. Abbiamo che  $V = 4832,47$      $i_4 = 0,026$      $t = \frac{4}{3}$  in trimestri

Sostituiamo i dati nella formula del valore attuale  $V = \frac{C}{1 + it}$  e ricaviamo  $C$  :

$$4832,47 = \frac{C}{1 + 0,026 \cdot \frac{4}{3}} \quad \rightarrow \quad C = 4832,47 \cdot \left(1 + 0,026 \cdot \frac{4}{3}\right) \quad \rightarrow \quad C = 5000(\text{€})$$

### 3. Calcolo del tasso di sconto

Calcoliamo:

a. a quale tasso annuo viene scontato un capitale di € 3 000 che scade tra 10 mesi se si è avuto uno sconto di € 120.

b. a quale tasso quadrimestrale viene scontato un capitale di € 10 450 che scade tra 6 mesi se il valore attuale è di € 10 000.

a. Abbiamo che:     $C = 3000$      $S_r = 120$      $t = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$  in anni

Con i dati a disposizione conviene applicare la formula  $S_r = \frac{Cit}{1 + it}$  e ricavare  $i$  :

$$120 = \frac{3000 \cdot i \cdot \frac{5}{6}}{1 + i \cdot \frac{5}{6}} \quad \rightarrow \quad 120 \left(1 + \frac{5}{6}i\right) = 2500i \quad \rightarrow \quad i = 0,05$$

Il tasso annuo è del 5%.

b. Abbiamo che:     $C = 10450$      $V = 10000$      $t = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$  in quadrimestri

Con i dati a disposizione conviene applicare la formula  $V = \frac{C}{1 + i_3 \cdot t}$  :

$$10000 = \frac{10450}{1 + i_3 \cdot \frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad 10000 \left(1 + \frac{3}{2}i_3\right) = 10450 \quad \rightarrow \quad i_3 = 0,03$$

Il tasso quadrimestrale è del 3%.

### 4. Calcolo del tempo

Calcoliamo il tempo di anticipo nei seguenti casi:

a. una cambiale del valore nominale di € 4800 scontata al tasso annuo del 6% che produce uno sconto di € 96

b. una cambiale di € 4000 che viene scontata al tasso di sconto trimestrale del 2% che viene pagata € 3883,50.

a. I dati a disposizione sono:     $V = 4800$      $i = 0,06$      $S_r = 96$

Conviene allora usare la formula  $S_r = Vit$  e ricavare  $t$  :

$$96 = 4800 \cdot 0,06 \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{96}{4800 \cdot 0,06} \quad \rightarrow \quad t = \frac{1}{3}$$

Il tempo è in anni,  $\frac{1}{3}$  di anno corrisponde a 4 mesi.

b. I dati a disposizione sono:  $C = 4000$      $i_4 = 0,02$      $V = 3883,50$

Conviene usare la formula:  $V = \frac{C}{1 + it}$  :

$$3883,50 = \frac{4000}{1 + 0,02 \cdot t} \quad \rightarrow \quad 3883,50 \cdot (1 + 0,02 \cdot t) = 4000 \quad \rightarrow \quad t = 1,5$$

Il tempo è in trimestri, 1,5 trimestri corrisponde 4,5 mesi, cioè 4 mesi e 15 giorni.

## VERIFICA DI COMPrensIONE

- Un debito di € 1500 viene saldato 4 mesi prima versando € 1 440. Il tasso di sconto razionale annuo è:
  - 12,5%
  - 1,25%
  - 2,5%
  - 9,6%
- Il valore attuale del capitale di € 6 000, scontato al tasso semplice semestrale del 2,5% per 9 mesi è:
  - € 5 825,32
  - € 4 897,96
  - € 5 783,13
  - € 5 238,65
- Completa la seguente tabella in cui il tasso di interesse  $i$  è annuale.

$C$	$V$	$S_r$	$i$	$t$
1000	800			10 mesi
		120	0,12	8 mesi
	2000	88	0,10	

### 4.3 Il regime di sconto composto

Se il periodo di anticipo del pagamento di un debito avviene con un tempo molto maggiore rispetto alla scadenza, il regime di sconto semplice non è più adatto alla valutazione del valore attuale; per debiti a lunga scadenza, infatti, il regime di sconto applicato è di solito quello composto. E' quindi ragionevole pensare di applicare delle regole di sconto che rispecchino questa modalità di calcolo degli interessi.

Per trovare le leggi dello sconto composto basta seguire uno schema analogo a quello visto nel paragrafo precedente sostituendo lo sconto composto  $S_{cp}$  al posto di  $I$ , il capitale  $C$  al posto di  $M$  e il valore attuale  $V$  al posto di  $C$  :

**Nel regime di interesse composto**

$$M = C(1 + i)^t$$

**Nel regime di sconto composto**

$$C = V(1 + i)^t$$

Dalla seconda relazione ricaviamo quindi che:

$$V = \frac{C}{(1 + i)^t} = C(1 + i)^{-t}$$

Essendo poi  $S_{cp} = C - V$ , possiamo ottenere l'espressione dello sconto in due forme diverse:

$$S_{cp} = \begin{cases} C - C(1 + i)^{-t} = C[1 - (1 + i)^{-t}] \\ V(1 + i)^t - V = V[(1 + i)^t - 1] \end{cases}$$

Riassumendo, le **leggi dello sconto composto** sono le seguenti:

$$\blacksquare V = \frac{C}{(1+i)^t} \quad \text{o anche} \quad V = C(1+i)^{-t}$$

**LE LEGGI DI  
SCONTO COMPOSTO**

$$\blacksquare S_{cp} = C - V \quad \text{o anche} \quad S_{cp} = \begin{cases} C[1 - (1+i)^{-t}] \\ V[(1+i)^t - 1] \end{cases}$$

Il fattore  $(1+i)^{-t}$  viene detto **fattore di sconto composto**.

## ESEMPI

Risolviamo i seguenti esercizi in regime di sconto composto.

### 1. Calcolo del valore attuale

Calcoliamo il valore attuale nelle seguenti situazioni:

- a. si anticipa di 2 anni e 3 mesi il pagamento di un debito di € 18000, al tasso annuo di sconto del 4%
- b. si anticipa di 1 anno e 5 mesi il pagamento di un debito di € 20000, al tasso semestrale del 3,2%.

a. I dati a disposizione sono:  $C = 18000$      $i = 0,04$      $t = 2 + \frac{3}{12} = \frac{9}{4}$  in anni

$$\text{Applichiamo la formula } V = C(1+i)^{-t}: \quad V = 18000(1+0,04)^{-\frac{9}{4}} \quad \rightarrow \quad V = 16479,63 \text{ (€)}$$

b. Dati:  $C = 20000$      $i_2 = 0,032$      $t = 2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$  in semestri

$$\text{Applichiamo la stessa formula: } V = 20000(1+0,032)^{-\frac{17}{6}} = 18292,41 \text{ (€)}$$

### 2. Calcolo dello sconto

Calcoliamo lo sconto a cui si ha diritto nelle seguenti situazioni.

- a. anticipiamo di 2 anni il pagamento di una cambiale del valore nominale di € 4500 al tasso semestrale dello 0,9%.
- b. anticipiamo di 2 anni il pagamento di un debito versando la somma di € 3250 al tasso annuo del 4,2%.

a. Abbiamo che:  $C = 4500$      $i_2 = 0,009$      $t = 4$  in semestri

$$\text{Applichiamo quindi la formula } S_{cp} = C[1 - (1+i)^{-t}]: \quad S_{cp} = 4500[1 - (1+0,009)^{-4}] = 158,42 \text{ (€)}$$

b. Abbiamo che:  $V = 3250$      $i = 0,042$      $t = 2$  in anni

$$\text{Applichiamo quindi la formula } S_{cp} = V[(1+i)^t - 1]: \quad S_{cp} = 3250[(1+0,042)^2 - 1] = 278,73 \text{ (€)}$$

### 3. Calcolo del tasso di sconto

Troviamo a quale tasso sono state condotte le seguenti operazioni finanziarie:

- a. un debito di € 1000 esigibile tra due anni con tasso annuo, pagato oggi € 930
- b. un debito di € 25000 esigibile tra 1 anno e 3 mesi con tasso semestrale, pagato oggi € 24500.

a. I dati a disposizione sono:  $C = 1000$      $V = 930$      $t = 2$  in anni

Applichiamo la legge  $V = C(1 + i)^{-t}$  sostituendo i dati e calcolando  $i$  :

$$930 = 1000(1 + i)^{-2} \quad \rightarrow \quad 1 + i = \sqrt{\frac{1000}{930}} \quad \rightarrow \quad i = \sqrt{\frac{1000}{930}} - 1 = 0,037$$

cioè un tasso annuo del 3,7%.

**b.** Dati:  $C = 25000$   $V = 24500$   $t = 1 \cdot 2 + \frac{3}{6} = \frac{5}{2}$  in semestri

Applichiamo la stessa legge e risolviamo l'equazione rispetto a  $i_2$  :

$$24500 = 25000(1 + i_2)^{-\frac{5}{2}} \quad \rightarrow \quad (1 + i_2)^{\frac{5}{2}} = \frac{25000}{24500} \quad \rightarrow \quad 1 + i_2 = \sqrt[5]{\left(\frac{50}{49}\right)^2} \quad \rightarrow \quad i_2 = \sqrt[5]{\left(\frac{50}{49}\right)^2} - 1$$

Il tasso semestrale è  $i_2 = 0,0081$  pari allo 0,81%.

#### 4. Calcolo del tempo di anticipazione

Calcoliamo di quanto si deve anticipare un pagamento nelle seguenti situazioni:

**a.** capitale di € 6 000 pagandolo € 5 400 al tasso di sconto annuo del 5%

**b.** capitale di € 30 000 con uno sconto di € 800 al tasso di sconto semestrale del 2,3%.

**a.** Abbiamo che:  $C = 6000$   $V = 5400$   $i = 0,05$

Applichiamo anche in questo caso la legge  $V = C(1 + i)^{-t}$  dalla quale otteniamo un'equazione nell'incognita  $t$  :

$$5400 = 6000(1 + 0,05)^{-t} \quad \rightarrow \quad 1,05^{-t} = \frac{5400}{6000}$$

Si tratta di un'equazione esponenziale; per risolverla ricorriamo ai logaritmi (usiamo quelli decimali):

$$\log 1,05^{-t} = \log 0,9 \quad \rightarrow \quad -t \log 1,05 = \log 0,9 \quad \rightarrow \quad t = -\frac{\log 0,9}{\log 1,05}$$

Approssimando il risultato si ottiene  $t = 2,15946$  che corrisponde a 2 anni, 1 mese, 27 giorni.

**b.** Abbiamo che:  $C = 30000$   $S_{cp} = 800$   $i_2 = 0,023$

Calcoliamo prima il valore attuale e applichiamo poi la stessa procedura del precedente caso:

$$V = C - S_{cp} = 30000 - 800 = 29200(\text{€})$$

$$29200 = 30000(1 + 0,023)^{-t} \quad \rightarrow \quad 1,023^{-t} = \frac{29200}{30000}$$

Ricorrendo di nuovo ai logaritmi otteniamo:

$$-t \log 1,023 = \log \frac{73}{75} \quad \rightarrow \quad t = -\frac{\log 73 - \log 75}{\log 1,023} \quad \rightarrow \quad t = 1,188622$$

Il tempo ottenuto è espresso in semestri e corrisponde a 1 semestre, 1 mese e 4 giorni ovvero 7 mesi e 4 giorni.

### VERIFICA DI COMPrensIONE

**1.** Un capitale di € 800 scade tra 2 anni e 3 mesi; se viene applicato uno sconto composto del 6,9% annuo il suo valore attuale in euro è:

**a.** 688,48

**b.** 650,12

**c.** 720,45

**d.** 692,38

2. Completa la seguente tabella operando in regime di sconto composto e considerando il tasso annuo:

$C$	$V$	$S_{cp}$	$i$	$t$
11 000			0,06	2 anni e 8 mesi
30 000	29 800			15 mesi
	3 500	80	0,04	

## 5. I TASSI EQUIVALENTI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 58

Nei problemi che abbiamo affrontato finora è sempre stato possibile convertire il tempo in modo da usare unità di misura uniformi a quelle con cui è espresso il tasso; ci sono però situazioni in cui questo non è possibile.

Il tasso di interesse sui conti correnti bancari, per esempio, è un tasso annuale, ma l'accredito degli interessi avviene trimestralmente; si tratta quindi di una capitalizzazione trimestrale con un tasso annuale e per poter applicare le leggi di capitalizzazione o di attualizzazione è necessario convertire il tasso annuale in tasso trimestrale.

Il problema che si pone in generale è il seguente: un capitale  $C$ , impiegato in un certo regime finanziario per un tempo  $t$  ad un tasso annuo  $i$  produce un montante  $M$ ; lo stesso capitale  $C$ , impiegato per lo stesso tempo  $t$  nello stesso regime finanziario, ad un tasso periodale  $i_k$  produce un montante  $M'$ . Che relazione deve esistere fra  $i$  e  $i_k$  affinché i due montanti siano uguali?

Osserviamo subito che, nel caso in cui si verificasse tale condizione, applicare al capitale  $C$  il tasso  $i$  oppure il tasso  $i_k$  sarebbe la stessa cosa. Diciamo allora che:

due tassi di interesse si dicono **equivalenti** in un certo regime finanziario se, applicati allo stesso capitale e per lo stesso tempo, producono montanti uguali.

Cerchiamo ora di rispondere alla domanda che ci siamo posti affrontando il discorso nei diversi regimi finanziari.

### Il regime di interesse semplice

Se impieghiamo € 100 per un anno al tasso annuo del 6%, questa somma ci darà € 6 di interesse e quindi un montante di € 106. Chiediamoci: quale tasso trimestrale applicato ad un capitale di € 100 per un anno ci dà lo stesso montante di € 106?

Intuitivamente possiamo rispondere che, poiché nel regime di interesse semplice gli interessi vengono calcolati alla fine del periodo di impiego e poiché in un anno ci sono 4 trimestri,  $i_4$  deve essere  $\frac{1}{4}$  di  $i$ , cioè deve essere dello 0,015. Vediamo se i calcoli confermano la nostra intuizione.

Scriviamo l'espressione del montante nel caso del tasso periodale (la formula è  $M = C(1 + it)$ ):

$$106 = 100(1 + i_4 \cdot 4) \quad \text{da cui} \quad i_4 = 0,015$$

Possiamo affermare quindi che il tasso del 6% annuo e quello trimestrale dell'1,5% sono **equivalenti** perché a parità di capitale e di tempo producono montanti uguali.

Generalizzando, per determinare la relazione fra  $i$  e  $i_k$ , uguagliamo le espressioni dei due montanti:

$$C(1 + i \cdot t) = C[1 + i_k \cdot (kt)] \quad \text{e semplificando} \quad 1 + i \cdot t = 1 + i_k \cdot kt$$

da cui  $i = i_k \cdot k$  o anche  $i_k = \frac{i}{k}$

**LE FORMULE DEI TASSI EQUIVALENTI IN REGIME DI INTERESSE SEMPLICE**

Restano così confermate le nostre intuizioni: il tasso annuale, in regime di interesse semplice, è proporzionale al tasso periodale e la costante di proporzionalità è proprio il valore  $k$  che indica il numero di periodi contenuti nell'anno. La precedente relazione è quindi quella che esprime l'equivalenza fra  $i$  e  $i_k$  in regime di interesse semplice.

Per esempio, un tasso annuo del 16% è equivalente ad un tasso semestrale dell'8%, ad un tasso trimestrale del 4%, ad un tasso mensile dell'1,33%.

### Il regime di interesse composto

Rivediamo lo stesso problema precedente in un'ottica di interesse composto e chiediamoci quale tasso trimestrale, applicato ad un capitale di € 100 per un anno, ci dà lo stesso montante di € 106?

Questa volta non possiamo più pensare che i due tassi siano proporzionali perché, alla scadenza di ogni trimestre, gli interessi vengono capitalizzati e diventano fruttiferi.

Scriviamo l'espressione del montante nel caso del tasso periodale:

$$106 = 100(1 + i_4)^4 \quad \text{da cui otteniamo} \quad i_4 = 0,0147$$

Quindi, applicando un tasso trimestrale dell'1,47% a un capitale di € 100 per un anno otteniamo un montante di € 106. Allora il tasso del 6% annuo e quello trimestrale dell'1,47% sono **equivalenti** perché a parità di capitale e di tempo producono montanti uguali.

Generalizzando, per determinare la relazione fra  $i$  e  $i_k$ , uguagliamo le espressioni dei due montanti:

$$C(1 + i)^t = C(1 + i_k)^{kt} \quad \text{e semplificando} \quad 1 + i = (1 + i_k)^k$$

da quest'ultima equazione possiamo ricavare  $i$  in funzione di  $i_k$  o viceversa, cioè

$$i = (1 + i_k)^k - 1 \quad i_k = \sqrt[k]{1 + i} - 1$$

**LE FORMULE DEI TASSI EQUIVALENTI IN REGIME DI INTERESSE COMPOSTO**

$i$  e  $i_k$  sono dunque equivalenti se soddisfano tali relazioni.

Riassumendo:

- la relazione  $i = i_k \cdot k$  è la formula dei tassi equivalenti in capitalizzazione semplice;

■ la relazione  $1 + i = (1 + i_k)^k$  è la formula dei tassi equivalenti in capitalizzazione composta.

Il tasso annuale  $i$  equivalente al tasso periodale  $i_k$  prende il nome di **tasso annuo effettivo**, ed è quindi il tasso che produce lo stesso montante del tasso periodale nel tempo di un anno.

## ESEMPI

1. Calcoliamo il tasso annuo equivalente al tasso trimestrale del 2% in capitalizzazione semplice e composta.

Sappiamo che  $i_4 = 0,02$  e vogliamo trovare  $i$ .

- In capitalizzazione semplice usiamo la formula  $i = i_k \cdot k$ :  $i = 0,02 \cdot 4 = 0,08$

Si ottiene un tasso annuo dell'8%.

- In capitalizzazione composta usiamo la formula  $i = (1 + i_k)^k - 1$ :

$$i = 1,02^4 - 1 \quad \text{cioè} \quad i = 0,0824$$

Si ottiene un tasso dell'8,24%.

2. Calcoliamo il tasso semestrale equivalente al tasso annuo effettivo del 4% in capitalizzazione semplice e composta.

Conosciamo  $i = 0,04$  e vogliamo trovare  $i_2$ .

- In capitalizzazione semplice usiamo la formula  $i = i_k \cdot k$  con  $k = 2$ :

$$0,04 = i_2 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad i_2 = 0,02 \quad \text{cioè un tasso semestrale del 2\%}.$$

- In capitalizzazione composta usiamo la formula  $i_k = \sqrt[k]{1 + i} - 1$

$$i_2 = \sqrt{1 + 0,04} - 1 \quad \text{cioè} \quad i_2 = 0,0198 \quad \text{cioè un tasso semestrale dell'1,98\%}.$$

3. Calcoliamo il montante di un capitale di € 2000 impiegato per due anni, in capitalizzazione composta, al tasso annuo nominale convertibile trimestralmente del 4%.

Poiché in un anno ci sono 4 trimestri, abbiamo che  $j_4 = 0,04$ . Per risolvere il problema dobbiamo prima trasformare il tasso nominale in tasso periodale; si ha che

$$i_4 = \frac{j_4}{4} \quad \text{cioè} \quad i_4 = 0,01$$

Trasformiamo adesso la durata dell'investimento in trimestri: 2 anni corrispondono a 8 trimestri.

Possiamo ora applicare la formula per il calcolo del montante in regime di capitalizzazione composta:

$$M = 2000 \cdot (1 + 0,01)^8 = 2165,71 \text{ (€)}$$

## VERIFICA DI COMPrensIONE

1. Un tasso annuo effettivo del 5,4% è equivalente ad un tasso trimestrale pari a:

- a. in capitalizzazione semplice:      ① 1,8%      ② 1,35%      ③ 16,2%
- b. in capitalizzazione composta:      ① 2,66%      ② 2,32%      ③ 1,32%

## LA SCINDIBILITÀ DELLE LEGGI FINANZIARIE

Depositiamo in banca la somma di € 1000 al tasso annuo del 2% per 5 anni. Alla scadenza ritiriamo il montante e lo usiamo immediatamente per un'altra operazione finanziaria sempre allo stesso tasso e che dura altri 3 anni.

Poniamoci questo quesito: se invece di prelevare e investire di nuovo, avessimo lasciato il capitale in banca per 8 anni, alla fine dei due periodi, cioè al tempo 8, i montanti sarebbero stati uguali o diversi?

Schematizziamo le due situazioni usando l'asse dei tempi: in **figura 5a** abbiamo rappresentato la prima situazione in cui dal capitale  $C$  di € 1000 passiamo al primo montante  $M_1$  dopo 5 anni e poi al secondo  $M_2$  dopo altri 3 anni, cioè al tempo 8; in **figura 5b** abbiamo rappresentato la seconda situazione in cui dal capitale  $C$  passiamo subito, dopo 8 anni, al montante  $M$ .

Se, facendo queste operazioni, otteniamo due montanti uguali diciamo che la legge finanziaria che abbiamo usato è **scindibile**, se i due montanti sono diversi diciamo che la **legge finanziaria non è scindibile**.

In generale diciamo che:

una **legge finanziaria di capitalizzazione è scindibile** quando si ottiene lo stesso montante capitalizzando, alle stesse condizioni, da un tempo  $t_0$  a un tempo  $t_1$  e poi dal tempo  $t_1$  al tempo  $t_2$ , oppure dal tempo  $t_0$  direttamente al tempo  $t_2$  (**figura 6**)

una **legge finanziaria di sconto è scindibile** quando si ottiene lo stesso valore attuale scontando, alle stesse condizioni, un capitale da un tempo  $t_2$  a un tempo  $t_1$  e poi dal tempo  $t_1$  a un tempo  $t_0$ , oppure dal tempo  $t_2$  direttamente al tempo  $t_0$  (**figura 7**).

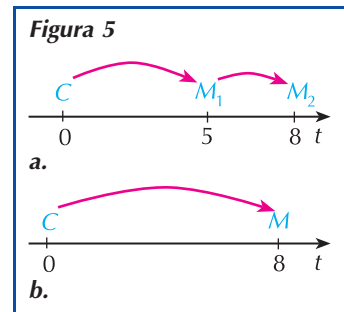


Figura 5

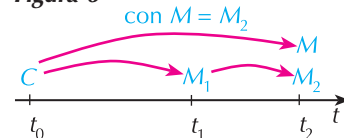


Figura 6

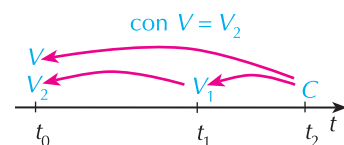


Figura 7

Cerchiamo allora di capire quali sono le leggi scindibili nei regimi finanziari che abbiamo studiato.

### La capitalizzazione semplice

Vediamo un esempio.

Luca investe un capitale di € 2000 in un'unica operazione della durata di 5 anni in capitalizzazione semplice; Anna investe lo stesso capitale per 2 anni, lo riscuote e reinveste il ricavato per altri 3 anni. Vediamo quali sono le somme che i due ottengono alla fine dell'operazione se entrambe sono state fatte allo stesso tasso annuo del 2%.

Calcoliamo il montante di Luca:  $M = 2000(1 + 0,02 \cdot 5) = 2200(\text{€})$

Calcoliamo il montante di Anna:  $M_1 = 2000(1 + 0,02 \cdot 2) = 2080(\text{€})$

$M_2 = 2080(1 + 0,02 \cdot 3) = 2204,80(\text{€})$

Poiché i due montanti sono diversi dobbiamo concludere che **la legge di capitalizzazione semplice non è scindibile**.

### La capitalizzazione composta

Gli stessi due personaggi investono lo stesso capitale con le stesse modalità ma in regime di capitalizzazione composta.



Calcoliamo il montante di Luca:  $M = 2000(1 + 0,02)^5 = 2208,16(\text{€})$   
 Calcoliamo il montante di Anna:  $M_1 = 2000(1 + 0,02)^2 = 2080,80(\text{€})$   
 $M_2 = 2080,80(1 + 0,02)^3 = 2208,16(\text{€})$

Questa volta i due montanti sono uguali.

Diversamente dal caso precedente in cui un esempio nel quale si trovano due risultati diversi ci consente di trarre la conclusione di non scindibilità, aver trovato che i due montanti sono uguali non ci permette di trarre conclusioni certe e dobbiamo ripetere il ragionamento nel caso generale.

Consideriamo allora un capitale  $C$  che viene impiegato per un tempo  $t$  ad un tasso  $i$ ; il suo montante è

$$M = C(1 + i)^t$$

Lo stesso capitale  $C$  viene impiegato per un tempo  $t_1$  e il montante  $M_1$  ricavato per un tempo  $t_2$  dove  $t_1 + t_2 = t$ ; il montante finale  $M$  si calcola in questo modo:

$$M_1 = C(1 + i)^{t_1} \quad M = \underbrace{C(1 + i)^{t_1}}_{M_1} \cdot (1 + i)^{t_2} = C(1 + i)^{t_1+t_2} = C(1 + i)^t$$

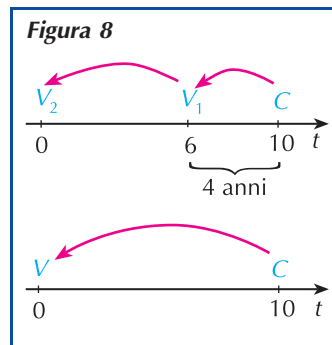
Poiché i due montanti sono uguali possiamo concludere che **la legge di capitalizzazione composta è scindibile**.

### Le leggi di sconto

Studiamo la scindibilità delle tre leggi di sconto a partire da un esempio.

Supponiamo di avere contratto un debito  $C$  di € 10 000 che scade tra 10 anni ad un certo tasso. Se chiediamo di estinguere il debito tra 6 anni dovremo pagare una somma  $V_1$ ; se invece decidiamo di estinguerlo adesso dobbiamo pagare una somma  $V$ . Quello che ci chiediamo per stabilire la scindibilità è se è la stessa cosa calcolare  $V$  attualizzando  $C$  per 10 anni oppure attualizzando  $V_1$  per 6 anni (in **figura 8** abbiamo schematizzato il problema sulla retta dei tempi).

Vediamo che cosa accade in base alle tre leggi di sconto.



#### ■ Lo sconto commerciale

Supponiamo che sia  $d = 0,03$  e calcoliamo il valore attuale al tempo 6 (cioè con un anticipo di 4 anni):

$$V_1 = 10000(1 - 0,03 \cdot 4) = 8800(\text{€})$$

Di questa somma calcoliamo ora il valore attuale al tempo 0 (cioè per un tempo di anticipo pari a 6 anni):

$$V_2 = 8800(1 - 0,03 \cdot 6) = 7216(\text{€})$$

Calcoliamo ora il valore attuale del capitale di € 10000 direttamente al tempo 0:

$$V = 10000(1 - 0,03 \cdot 10) = 7000(\text{€})$$

Osserviamo che i due valori attuali sono diversi e quindi possiamo affermare che **la legge di sconto commerciale non è scindibile**.

#### ■ Lo sconto semplice o razionale

Supponiamo che sia  $i = 0,04$  e calcoliamo il valore attuale al tempo 6:

$$V_1 = \frac{10000}{1 + 0,04 \cdot 4} = 8620,69(\text{€})$$

Di questa somma calcoliamo il valore attuale al tempo 0:

$$V_2 = \frac{8620,69}{1 + 0,04 \cdot 6} = 6952,17(\text{€})$$

Calcoliamo ora il valore attuale del capitale  $C$  direttamente al tempo 0:

$$V = \frac{10000}{1 + 0,04 \cdot 10} = 7142,86 (\text{€})$$

I due valori attuali sono diversi e possiamo affermare che **la legge di sconto semplice non è scindibile**.

### ■ Lo sconto composto

Supponiamo anche in questo caso che sia  $i = 0,04$  e calcoliamo il valore attuale al tempo 6:

$$V_1 = 10000(1 + 0,04)^{-4} = 8548,04 (\text{€})$$

Di questa somma calcoliamo il valore attuale al tempo 0:

$$V_2 = 8548,04(1 + 0,04)^{-6} = 6755,64 (\text{€})$$

Calcoliamo ora il valore attuale del capitale  $C$  direttamente al tempo 0:

$$V = 10000(1 + 0,04)^{-10} = 6755,64 (\text{€})$$

Questa volta i due valori attuali sono uguali.

Dimostriamo che il risultato ottenuto vale in generale.

Consideriamo il capitale  $C$  da scontarsi in due modi, in un'unica operazione della durata di tempo  $t$  e in due operazioni una di durata  $t_1$  e l'altra di durata  $t_2$  ma tali che  $t = t_1 + t_2$ .

Calcoliamo il valore attuale con la prima operazione:  $V = C(1 + i)^{-t}$

Calcoliamo il valore attuale con la seconda operazione:

$$V_1 = C(1 + i)^{-t_1} \quad V_2 = \underbrace{C(1 + i)^{-t_1}}_{V_1} \cdot (1 + i)^{-t_2} = C(1 + i)^{-t_1 - t_2} = C(1 + i)^{-t}$$

Poiché i due valori attuali sono uguali possiamo concludere che **la legge di sconto composto è scindibile**.

## 6. L'EQUIVALENZA FINANZIARIA

Oggi ci viene concesso un prestito di € 1000 convenendo la restituzione di € 1040 fra 8 mesi ad estinzione del debito, supponendo un tasso annuo di interesse semplice del 6%. Ci viene intuitivo pensare che la cifra da restituire sia equa se, ad un tasso del 6%, € 1000 oggi e € 1040 fra 8 mesi hanno lo stesso valore (**figura 9**). Calcoliamo allora il montante determinato da € 1000 per 8 mesi al tasso del 6%

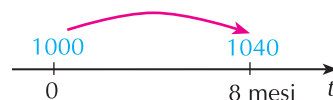
$$M = 1000 \left( 1 + 0,06 \cdot \frac{8}{12} \right) = 1040 (\text{€})$$

Poiché le due somme sono uguali, possiamo ritenere che l'operazione finanziaria sia corretta. Se ci avessero proposto di restituire, al tasso del 6% annuo, € 1060 dopo 8 mesi, l'operazione finanziaria non sarebbe stata evidentemente equa.

L'esempio ora visto ci serve per comprendere l'importanza di un principio che in matematica finanziaria viene considerato fondamentale: il **principio di equivalenza finanziaria**, in base al quale si cercano di stabilire dei criteri affinché somme da pagare (o da ricevere) si equivalgano quando vengono valutate in epoche diverse.

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 62

Figura 9



Diamo allora la seguente definizione.

Fissati un regime finanziario, un tasso di interesse ed un'origine dei tempi, considerati due capitali  $C_1$  ed  $C_2$  e due tempi  $t_1$  e  $t_2$ , diciamo che  $C_1$  e  $C_2$  sono **finanziariamente equivalenti** se possedere  $C_1$  al tempo  $t_1$  oppure  $C_2$  al tempo  $t_2$  è indifferente dal punto di vista economico.

In base alla definizione data, possiamo allora dire che € 1000 oggi e € 1040 fra 8 mesi sono finanziariamente equivalenti, in regime di interesse semplice.

Il concetto di equivalenza finanziaria è stato applicato in tutti i problemi che abbiamo risolto finora; negli esempi che seguono vediamo la sua applicazione ed altre situazioni.

### **I esempio: il problema del capitale unico**

Dobbiamo pagare tre debiti, tutti contratti al tasso annuo del 6%: il primo, di € 10000, scade fra 3 anni; il secondo, di € 25000, scade fra 5 anni; il terzo, di € 17000, scade fra 6 anni. Se conveniamo con il creditore di estinguere i debiti con un unico pagamento fra 2 anni, quale somma dovremo pagare?

Visualizziamo il problema (**figura 10**): la data fissata per l'unico pagamento è anteriore a tutte le altre scadenze, perciò si tratta di un problema di attualizzazione.

L'importo  $V$  da pagare è la somma dei tre valori attuali ottenuti scontando il primo capitale per 1 anno, il secondo per 3 anni e il terzo per 4 anni

$$V = 10000(1 + 0,06)^{-1} + 25000(1 + 0,06)^{-3} + 17000(1 + 0,06)^{-4} = 43890,04 (\text{€})$$

*In tutti questi problemi il regime finanziario è quello dell'interesse e dello sconto composti.*

**Figura 10**

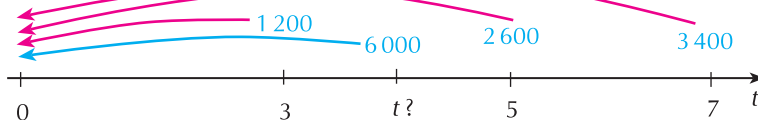


### **II esempio: il problema della scadenza comune**

Il sig. Rossi vanta i seguenti crediti: € 1200 da riscuotere fra 3 anni, € 2600 da riscuotere fra 5 anni, € 3400 da riscuotere fra 7 anni. Il debitore decide di saldare i suoi debiti con la somma di € 6000 ad un tasso di interesse composto del 4,5% annuo. A quale epoca il sig. Rossi riceverà tale somma?

Rappresentiamo il problema sulla retta dei tempi e, non sapendo dove collocare il tempo di scadenza, lo poniamo per il momento in un punto qualsiasi tra 0 (oggi) e 7 (ultima data di riscossione) (**figura 11a**).

**Figura 11a**



Portiamo tutto al tempo 0 scontando le varie somme e applichiamo il principio di equivalenza finanziaria cioè

$$6000(1 + 0,045)^{-t} = 1200(1 + 0,045)^{-3} + 2600(1 + 0,045)^{-5} + 3400(1 + 0,045)^{-7}$$

abbiamo, di nuovo, un'equazione esponenziale, che, semplificata, diventa

$$1,045^{-t} = 0,9393909$$

passando all'equivalente forma logaritmica abbiamo

$$-t \log 1,045 = \log 0,9393909$$

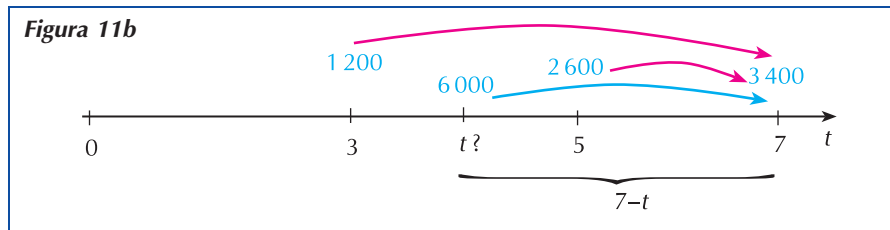
da cui  $t = 1,4204456$  (anni) cioè 1 anno 5 mesi e 1 giorno.

Un ulteriore modo per risolvere il problema, è, come abbiamo detto, quello di portare tutte le somme al tempo massimo (**figura 11b**) ottenendo così l'equazione:

$$6000(1 + 0,045)^{7-t} = 1200(1 + 0,045)^4 + 2600(1 + 0,045)^2 + 3400$$

cioè  $1,045^{7-t} = 1,27838122$  da cui ricaviamo  $t = 1,4204456$  (anni)

che è ovviamente lo stesso tempo trovato con l'attualizzazione di tutti i capitali.

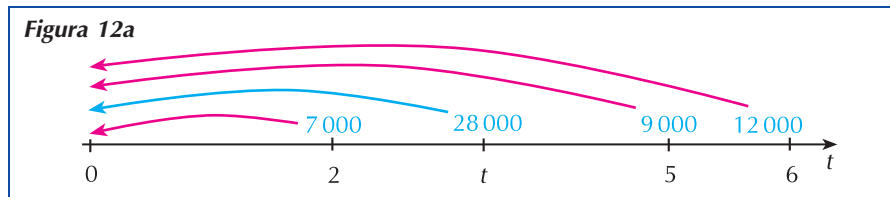


### III esempio: la scadenza media

Ileana deve riscuotere tre crediti concessi al tasso del 5% annuo. Il primo di € 7000 che scade fra 2 anni, il secondo di € 9000 che scade fra 5 anni e il terzo di € 12000 che scade fra 6 anni. A quale scadenza media Ileana potrà riscuotere i tre crediti con un'unica somma?

In questo problema si parla di scadenza media; questo significa che il capitale unico è la somma dei tre indicati, e cioè di € 28000.

Visualizziamo il problema, posizionando in un punto a caso compreso fra 0 e 6 il capitale unico (**figura 12a**).



Se riduciamo tutte le somme al tempo 0, operiamo con le leggi di sconto ed otteniamo l'equazione

$$28000(1 + 0,05)^{-t} = 7000(1 + 0,05)^{-2} + 9000(1 + 0,05)^{-5} + 12000(1 + 0,05)^{-6}$$

da cui, svolgendo i calcoli in modo opportuno, troviamo

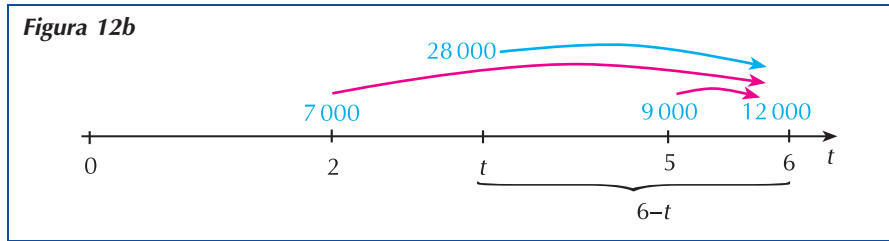
$$1,05^{-t} = 0,798411664 \quad \rightarrow \quad -t \log 1,05 = \log 0,798411664$$

$t = 4,614269058$  (anni) cioè un tempo di 4 anni 7 mesi 11 giorni.

In alternativa possiamo portare tutto al tempo 6 (**figura 12b**) e usare la legge di capitalizzazione

$$7000(1 + 0,05)^4 + 9000(1 + 0,05) + 12000 = 28000(1 + 0,05)^{6-t}$$

che, risolta, dà ovviamente lo stesso valore del tempo.



#### IV esempio: la sostituzione dei pagamenti

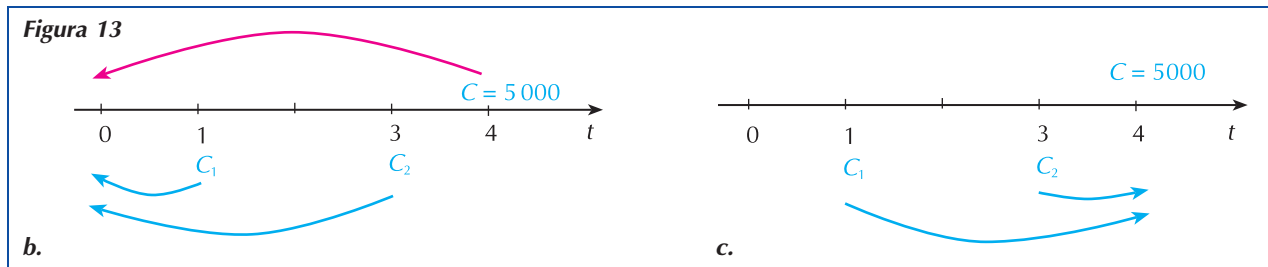
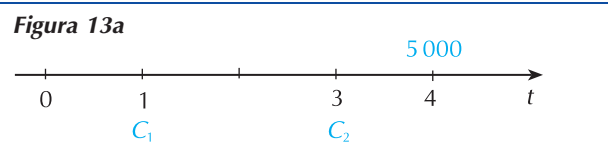
Il signor Bianchi deve pagare € 5000 fra 4 anni. Ottiene di effettuare, invece, due pagamenti uguali, il primo fra 1 anno e il secondo fra 3 anni. Determiniamo l'importo dei due pagamenti sapendo che è stato fissato un tasso annuo del 2,5%.

È questo un problema di sostituzione di pagamenti, perché, al posto di un capitale ad una certa scadenza, ne vengono sostituiti altri due con scadenze diverse.

Nello schema grafico di **figura 13a** poniamo al di sopra dell'asse dei tempi il capitale originario e al di sotto i capitali che ad esso vogliamo sostituire.

Poiché in regime di capitalizzazione composta vale la scindibilità delle leggi, possiamo riferire l'uguaglianza fra il capitale  $C$  al tempo 4 ed i capitali  $C_1$  al tempo 1 e  $C_2$  al tempo 3 a qualsiasi epoca;

conviene allora come al solito riferirsi al tempo 0 oppure al tempo 4 in modo da imporre l'uguaglianza fra valori attuali nel primo caso (**figura 13b**) oppure fra montanti nel secondo (**figura 13c**).



- Se portiamo tutte le somme al tempo 0 risulta

$$5000(1 + 0,025)^{-4} = C_1(1 + 0,025)^{-1} + C_2(1 + 0,025)^{-3}$$

e poiché i dati del problema ci dicono che  $C_1 = C_2$ , possiamo scrivere

$$4529,75 = C_1(0,975609756 + 0,928599411) \quad \text{da cui} \quad C_1 = 2378,81(\text{€})$$

Ciascun pagamento dovrà quindi essere di € 2378,81.

- Al tempo 4 risulta  $5000 = C_1(1 + 0,025)^3 + C_2(1 + 0,025)$

$$\text{e, ponendo } C_1 = C_2 \quad 5000 = C_1 [(1 + 0,025)^3 + (1 + 0,025)]$$

Risolvendo l'equazione troviamo ovviamente lo stesso valore trovato in precedenza.

Possiamo anche risolvere il problema impostando l'uguaglianza fra capitali in un tempo intermedio, ad esempio al tempo 3 (**figura 13d**).

In questo caso dobbiamo scontare  $C$  e capitalizzare  $C_1$ .

L'equazione risolvente è allora

$$5000(1 + 0,025)^{-1} = C_1(1 + 0,025)^2 + C_2$$

da cui, con la condizione  $C_1 = C_2$ , troviamo di nuovo lo stesso valore per i due capitali.

### V esempio: il tasso medio d'impiego

Sei anni fa abbiamo fatto i seguenti investimenti:

- a. abbiamo prestato ad un amico € 3000 al tasso annuo del 5%
- b. abbiamo depositato in banca € 5000 al tasso annuo del 2,5%
- c. abbiamo fatto un deposito postale di € 1000 al tasso annuo del 4%

A quale tasso annuo avremmo dovuto impiegare il capitale complessivo per avere oggi lo stesso montante? E per avere lo stesso montante fra 3 anni?

Schematizziamo la prima situazione (**figura 14a**). Si tratta di un problema di montante la cui equazione risolvente, tenendo conto che la somma  $C$  dei capitali è € 9000, è:

$$9000(1 + i)^6 = 3000(1 + 0,05)^6 + 5000(1 + 0,025)^6 + 1000(1 + 0,04)^6$$

cioè  $(1 + i)^6 = 1,23156367$

Per risolvere l'equazione possiamo, come al solito, ricorrere:

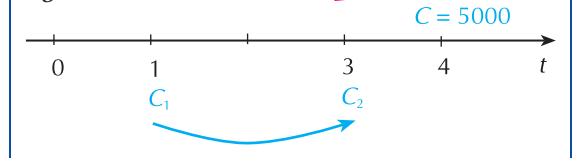
- alla calcolatrice, ottenendo  $i = \sqrt[6]{1,23156367} - 1$  cioè  $i = 0,0353$
- ai logaritmi, ottenendo l'equazione  $6 \log(1 + i) = \log 1,23156367$  che dà sempre un tasso del 3,53%

Per rispondere alla seconda domanda, dobbiamo riportare tutti i capitali dal tempo  $-6$  al tempo 3 (**figura 14b**). L'equazione risolvente è in questo caso:

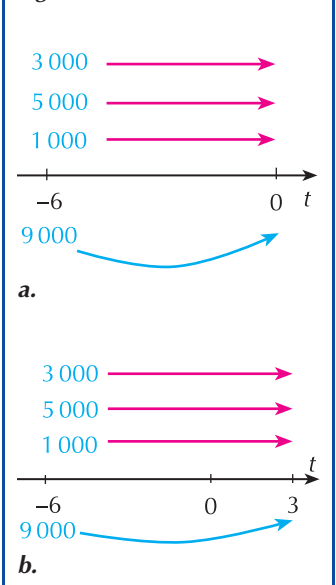
$$9000(1 + i)^9 = 3000(1 + 0,05)^9 + 5000(1 + 0,025)^9 + 1000(1 + 0,04)^9$$

da cui otteniamo che  $i = 0,0355$ , cioè un tasso del 3,55%.

**Figura 13d.**



**Figura 14**



## VERIFICA DI COMPrensIONE

### 1. Barra vero o falso.

- a. Se una legge finanziaria è scindibile, il montante oppure il valore attuale di un capitale non viene alterato frazionando il tempo di impiego. V F
- b. La legge di capitalizzazione semplice non è scindibile perché il montante finale si modifica se viene frazionato il tempo d'impiego. V F
- c. Due capitali  $C_1$  e  $C_2$  sono finanziariamente equivalenti se  $C_1 = C_2$ . V F
- d. Se due capitali  $C_1$  e  $C_2$  sono finanziariamente equivalenti, possedere  $C_1$  al tempo  $t_1$  è la stessa cosa che possedere  $C_2$  al tempo  $t_2$ . V F
- e. Se due capitali sono finanziariamente equivalenti allo stesso tempo  $t$ , allora sono uguali. V F

# 7 concetti e le regole

## Le parole chiave

Le principali operazioni finanziarie sono la capitalizzazione e l'attualizzazione.

Si parla di **capitalizzazione** quando, investendo un capitale  $C$ , si ottiene un interesse  $I$ ; in questo caso si dice **montante**, e si indica con  $M$ , la somma del capitale e degli interessi:

$$M = C + I$$

Si parla di **attualizzazione** quando, restituendo anticipatamente un capitale  $C$ , otteniamo uno sconto  $S$ ; in questo caso si dice **valore attuale**, e si indica con  $V$ , la differenza tra il capitale e lo sconto:

$$V = C - S$$

Il calcolo dell'interesse e dello sconto avvengono in base ad un **tasso unitario** di interesse e di sconto che è un numero reale compreso tra 0 e 1; normalmente poi un tasso si esprime in termini percentuali.

Il tasso può essere annuo, e si indica con  $i$ , oppure periodale e si indica con  $i_k$  dove  $k$  rappresenta il numero di periodi contenuti nell'anno.

In tutte le operazioni finanziarie l'unità di misura del tempo deve essere uguale all'unità di tempo con cui si esprime il tasso (annuo o periodale)

Qualunque operazione finanziaria può essere eseguita solo se si conosce il regime finanziario in cui si opera; i principali regimi sono:

- i regimi di interesse semplice e composto
- i regimi di sconto commerciale, semplice o composto.

## Il regime di interesse semplice

Si dice che si opera in **regime di interesse semplice** quando l'interesse  $I$  è proporzionale al capitale  $C$  e al tempo  $t$  di durata dell'operazione finanziaria.

Le leggi di capitalizzazione che regolano tale regime sono:

- la legge per il calcolo dell'interesse:  $I = Cit$
- la legge per il calcolo del montante:  $M = C(1 + it)$

## Il regime di interesse composto

Si dice che si opera in **regime di interesse composto** quando l'interesse viene capitalizzato al termine di ciascun periodo e produce a sua volta interesse nel periodo seguente.

Le leggi di capitalizzazione che regolano tale regime sono:

- la legge per il calcolo del montante:  $M = C(1 + i)^t$
- la legge per il calcolo dell'interesse:  $I = C[(1 + i)^t - 1]$

## I regimi di sconto

I regimi di sconto sono tre.

■ Nel regime di **sconto commerciale**, lo sconto  $S_c$  è proporzionale al capitale  $C$  e al tempo di anticipazione  $t$ ; la costante di proporzionalità è il **tasso di sconto commerciale** che si indica con  $d$ .

Le leggi che regolano tale regime sono:

- la legge per il calcolo dello sconto:  $S_c = Cdt$
- la legge per il calcolo del valore attuale:  $V = C(1 - dt)$

dove, affinché la seconda legge abbia significato, deve essere  $t < \frac{1}{d}$ .

■ Si opera in **regime di sconto semplice** o **razionale** quando, capitalizzando il valore attuale  $V$  con capitalizzazione semplice al tasso  $i$ , si ottiene il capitale  $C$  dopo un tempo  $t$ .

Le leggi che regolano tale regime sono:

- la legge per il calcolo dello sconto:  $S_r = \frac{Cit}{1+it}$
- la legge per il calcolo del valore attuale:  $V = \frac{C}{1+it}$

■ Si opera in **regime di sconto composto** quando, capitalizzando il valore attuale  $V$  con capitalizzazione composta al tasso  $i$ , si ottiene il capitale  $C$  dopo un tempo  $t$ .

Le leggi che regolano tale regime sono:

- la legge per il calcolo del valore attuale:  $V = \frac{C}{(1+i)^t} = C(1+i)^{-t}$
- la legge per il calcolo dello sconto:  $S_{cp} = C[1 - (1+i)^{-t}]$

Le relazioni che esprimono il tasso  $i$  in funzione del tasso  $d$  e viceversa sono le seguenti:  $d = \frac{i}{1+i}$      $i = \frac{d}{1-d}$

### I tassi equivalenti

Due tassi di interesse si dicono **equivalenti** in un certo regime finanziario se, applicati allo stesso capitale e per la medesima durata, danno lo stesso montante.

Tra il tasso annuo  $i$  e il tasso periodale  $i_k$  sussistono le seguenti relazioni:

- in regime di interesse semplice:  $i = i_k \cdot k$  e reciprocamente  $i_k = \frac{i}{k}$
- in regime di interesse composto:  $i = (1+i_k)^k - 1$  e reciprocamente  $i_k = \sqrt[k]{1+i} - 1$

Un altro tasso che si usa frequentemente è il **tasso annuo nominale convertibile  $k$  volte in un anno** che viene indicato con il simbolo  $j_k$  e che è definito dalla relazione:  $j_k = k \cdot i_k$ .

In regime di interesse semplice  $j_k$  coincide con  $i$ ; in regime di interesse composto  $i > j_k$  in quanto gli interessi vengono reinvestiti.

### La scindibilità delle leggi finanziarie

Una legge finanziaria di capitalizzazione è scindibile quando si ottiene lo stesso montante capitalizzando un capitale  $C$ , alle stesse condizioni, da un tempo  $t_0$  a un tempo  $t_1$  e poi dal tempo  $t_1$  al tempo  $t_2$ , oppure direttamente dal tempo  $t_0$  al tempo  $t_2$ .

Una legge finanziaria di attualizzazione è scindibile quando si ottiene lo stesso valore attuale scontando un capitale  $C$ , alle stesse condizioni, da un tempo  $t_2$  a un tempo  $t_1$  e poi dal tempo  $t_1$  al tempo  $t_0$ , oppure direttamente dal tempo  $t_2$  al tempo  $t_0$ .

Le sole leggi finanziarie scindibili sono quelle di interesse composto e di sconto composto.

### Equivalenza finanziaria

Due capitali  $C_1$  e  $C_2$  sono finanziariamente equivalenti, in un dato regime, se fissata un'origine dei tempi e i tempi  $t_1$  e  $t_2$ , possedere  $C_1$  al tempo  $t_1$  o  $C_2$  al tempo  $t_2$  è indifferente dal punto di vista economico.

Sulla base di questo principio si risolvono tutti i problemi di valutazione di capitali.



# I regimi finanziari

## TERMINI FONDAMENTALI E IL LORO SIGNIFICATO

la teoria è a pag. 1

### Comprensione

- 1** Completa la definizione.  
La matematica finanziaria si occupa .....
- 2** Le principali operazioni finanziarie sono:  
a. la capitalizzazione e l'attualizzazione  
b. la valutazione dei tassi di interesse  
c. la valutazione dei tassi di sconto  
d. il calcolo dei capitali.
- 3** Spiega il significato dei seguenti termini e fai eventualmente degli esempi:  
a. capitale                      b. interesse                      c. montante                      d. valore attuale.
- 4** Con riferimento all'asse dei tempi, spiega in quali casi si parla di capitalizzazione e in quali di attualizzazione.
- 5** Barra Vero o Falso.  
a. La formula per calcolare il montante è  $M = C - I$  V F  
b. In un'operazione di capitalizzazione il montante si calcola in epoca posteriore rispetto al capitale impiegato. V F  
c. Il valore attuale di un capitale si calcola sottraendo lo sconto dal capitale. V F  
d. In un'operazione di attualizzazione il valore attuale si calcola in epoca posteriore rispetto al capitale impiegato. V F
- 6** La scrittura  $i_2$  indica:  
a. un tasso biennale                      b. un tasso bimestrale  
c. un tasso semestrale                      d. un tasso annuale
- 7** La scrittura  $i_6$  indica:  
a. un tasso annuo                      b. un tasso mensile  
c. un tasso bimestrale                      d. un tasso doppio del tasso  $i_3$
- 8** La scrittura  $j_4$  indica:  
a. un tasso annuo nominale convertibile trimestralmente  
b. un tasso annuo nominale convertibile quadrimestralmente  
c. un tasso trimestrale  
d. un tasso quadrimestrale.
- 9** Il tasso  $j_2 = 0,04$  equivale a un tasso semestrale:  
a. dell'8%                      b. del 4%                      c. del 2%                      d. diverso dai precedenti.

- 10** Un regime finanziario è:
- un modo di valutare i tassi di interesse durante un'operazione finanziaria
  - un modo per valutare il valore di un capitale nel tempo.
  - l'insieme delle leggi che stabiliscono come valutare le somme di denaro durante un'operazione finanziaria.

## Applicazione

Esegui le seguenti trasformazioni di tempi.

### 11 ESERCIZIO GUIDA

Trasformiamo:

- 8 mesi in frazione di anno
  - 45 giorni in frazione di anno
  - 2 anni e 4 mesi in trimestri
  - 15 mesi in semestri
- a. Poiché in un anno ci sono 12 mesi, 8 mesi corrispondono a  $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$  (anni).
- b. Poiché in un anno ci sono 360 giorni, 45 giorni corrispondono a  $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$  (anni).
- c. Poiché un trimestre è formato da 3 mesi, 2 anni (cioè 24 mesi) e 4 mesi corrispondono a  $\frac{24+4}{3} = \frac{28}{3}$  cioè  $9 + \frac{1}{3}$  (trimestri).
- d. Poiché un semestre è formato da 6 mesi, 15 mesi corrispondono a  $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$  (semestri).

Trasforma in anni.

- |                                     |                           |                   |   |
|-------------------------------------|---------------------------|-------------------|---|
| <b>12</b> 6 mesi                    | 9 mesi                    | 3 mesi            | $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right]$      |
| <b>13</b> 160 giorni                | 120 giorni                | 200 giorni        | $\left[\frac{4}{9}; \frac{1}{3}; \frac{5}{9}\right]$      |
| <b>14</b> 8 mesi e 20 giorni        | 6 mesi e 12 giorni        | 2 mesi e 6 giorni | $\left[\frac{13}{18}; \frac{8}{15}; \frac{11}{60}\right]$ |
| <b>15</b> 1 anno 9 mesi e 15 giorni | 3 anni 6 mesi e 20 giorni |                   | $\left[\frac{43}{24}; \frac{32}{9}\right]$                |

Trasforma nell'unità di tempo indicata in ciascun caso.

- |  |                                   |   |
|--|-----------------------------------|---|
| <b>16</b> 8 mesi in semestri             | 8 mesi e 15 giorni in trimestri   | $\left[\frac{4}{3}; \frac{17}{6}\right]$  |
| <b>17</b> 3 anni e 4 mesi in semestri    | 2 mesi e 10 giorni in anni        | $\left[\frac{20}{3}; \frac{7}{36}\right]$ |
| <b>18</b> 9 mesi in semestri             | 8 mesi in trimestri               | $\left[\frac{3}{2}; \frac{8}{3}\right]$   |
| <b>19</b> 4 mesi in semestri             | 10 mesi in quadrimestri           | $\left[\frac{2}{3}; \frac{5}{2}\right]$   |
| <b>20</b> 2 mesi e 20 giorni in semestri | 3 mesi e 5 giorni in quadrimestri | $\left[\frac{4}{9}; \frac{19}{24}\right]$ |

- 21 7 mesi 12 giorni in trimestri                      3 anni 6 mesi in trimestri                       $\left[\frac{37}{15}; 14\right]$
- 22 1 anno 5 mesi in semestri                      2 anni 4 mesi 10 giorni in semestri                       $\left[\frac{17}{6}; \frac{85}{18}\right]$
- 23 1 anno 2 mesi 15 giorni in quadrimestri                      3 anni 8 mesi 6 giorni in trimestri                       $\left[\frac{29}{8}; \frac{221}{15}\right]$
- 24 Illustra le seguenti situazioni sulla retta dei tempi.
- Dieci anni fa hai depositato un capitale di € 10000.
  - Fra due anni ti restituiranno € 5000.
  - A partire dall'anno prossimo e per tre anni consecutivi dovrai pagare € 2000 all'anno.
  - Daniele sei anni fa ha depositato € 20000, due anni fa ha prelevato € 8000, l'anno scorso ha depositato € 3000.
- 25 Converti nel tasso richiesto:
- $j_3 = 12\%$                       trova  $i_3$                       [4%]
  - $i_2 = 4\%$                       trova  $j_2$                       [8%]
  - $j_2 = 20\%$                       trova  $i_2$                       [10%]
  - $i_3 = 6\%$                       trova  $j_3$                       [18%]

## IL REGIME DI INTERESSE SEMPLICE

la teoria è a pag. 5

### RICORDA

■ Nel regime di interesse semplice l'interesse  $I$  è proporzionale al capitale  $C$  e al tempo  $t$  di durata dell'operazione finanziaria.

Le leggi di capitalizzazione che regolano tale regime sono:  $I = Cit$  e  $M = C(1 + it)$

### Comprensione

- 26 Un capitale di € 3000 impiegato al 4% annuo in capitalizzazione semplice, in un anno frutta un interesse di euro:
- 3012
  - 12
  - 120
  - 3120
- 27 Un capitale di € 5000 in 9 mesi al tasso annuo di interesse semplice del 5%, produce un montante pari a euro:
- 187,50
  - 4812,50
  - 5187,50
  - 2250
- 28 Quale capitale, al tasso di interesse semplice del 3% annuo produce in 5 mesi un montante di € 2025?
- € 2050
  - € 2000
  - € 1995,07
  - nessuno dei precedenti
- 29 Un capitale di € 1500 produce un interesse di € 45 al tasso di interesse trimestrale dell'1%. In regime di interesse semplice la durata dell'operazione è di:
- 3 mesi
  - 3 anni
  - 9 mesi
  - 9 anni

### Applicazione

- 30 Data formula  $I = Cit$ , ricava il valore di  $C$ , quello di  $i$  e quello di  $t$ .
- 31 Data la formula  $M = C(1 + it)$ , ricava l'espressione di  $C$ , quella di  $i$  e quella di  $t$ .

Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo dell'interesse in regime di capitalizzazione semplice.

### 32 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo l'interesse semplice prodotto da un capitale di € 250, impiegato per 9 mesi al tasso annuo del 3%.

I dati del problema sono:  $C = 250$      $i = 0,03$      $t = 9$  mesi

Vogliamo calcolare  $I$ .

Poiché il tasso è annuo, esprimiamo il tempo in anni:  $t = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$  di anno

Possiamo ora applicare la formula dell'interesse:  $I = Cit \rightarrow I = 250 \cdot 0,03 \cdot \frac{3}{4} = 5,63$  (€)

33 Calcola l'interesse semplice prodotto da:

a. un capitale di € 500, impiegato per 6 mesi al tasso annuo del 2% [€ 5]

b. un capitale di € 1 250, impiegato per 9 mesi al tasso annuo del 2,5%. [€ 23,44]

34 Calcola l'interesse semplice prodotto da:

a. un capitale di € 450, impiegato per 7 mesi al tasso semestrale del 4% [€ 21]

b. un capitale di € 150, impiegato per 11 mesi al tasso semestrale del 2%. [€ 5,50]

35 Calcola l'interesse semplice prodotto da un capitale di € 4500 al tasso annuo del 3,5%, maturato in:

a. 1 anno e 5 mesi [€ 223,13]

b. 1 anno 4 mesi e 15 giorni [€ 216,56]

c. 8 mesi [€ 105]

d. 2 anni 4 mesi e 10 giorni. [€ 371,88]

36 Calcola l'interesse semplice prodotto in 8 mesi e 24 giorni da un capitale di € 3000, al tasso bimestrale dello 0,2%. [€ 26,40]

37 Antonia dispone di un capitale di € 4500. Se lo investe al tasso annuo del 3% per 2 anni e 3 mesi, quale sarà l'interesse semplice che riscuoterà al termine di questo periodo? [€ 303,75]

Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo del montante in regime di interesse semplice.

### 38 ESERCIZIO GUIDA

Calcola il montante prodotto da un capitale di € 4000 al tasso annuo del 3,5% per 1 anno 7 mesi e 20 giorni.

Per prima cosa trasformiamo il tempo per renderlo omogeneo al tasso:  $t = 1 + \frac{7}{12} + \frac{20}{360} = \frac{59}{36}$

Possiamo ora calcolare il montante con la formula  $M = C(1 + it)$ :

$$M = 4000 \left( 1 + 0,035 \cdot \frac{59}{36} \right) = 4229,44 \text{ (€)}$$

39 Calcola il montante che si ottiene investendo il capitale di € 5000 al tasso annuo del 4% per 8 mesi. [€ 5133,33]

40 Calcola il montante che si ottiene investendo il capitale di € 1500 al tasso annuo del 3% per 9 mesi. [€ 1533,75]

**41 ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il montante prodotto dall'impiego di un capitale di € 1 200 per 11 mesi al tasso trimestrale del 2%.

I dati del problema sono:  $C = 1200$      $i_4 = 0,02$      $t = 11$  mesi

Vogliamo calcolare  $M$ .

Poiché il tasso è trimestrale, esprimiamo il tempo in trimestri:  $t = \frac{11}{3}$

Possiamo ora applicare la formula per il calcolo del montante  $M = 1200 \left( 1 + 0,02 \cdot \frac{11}{3} \right) = 1288$  (€)

**42** Calcola il montante prodotto dall'impiego del capitale di € 2 000 per 6 mesi al tasso trimestrale del 2,5%.  
[€ 2100]

**43** Giovanni dispone di un capitale di € 12000. Decide di investirlo in un fondo azionario con un tasso di interesse semplice annuo del 5%. Calcola il montante che potrà ottenere dopo 6 mesi. [€ 12300]

**44** Calcola il montante prodotto da un capitale di € 3500 al tasso del:  
a. 2,5% annuo per 3 anni [€ 3762,50]  
b. 4% annuo per 6 mesi. [€ 3570]

**45** Sei mesi fa hai depositato in una banca, in capitalizzazione semplice trimestrale al tasso dello 0,9%, la somma di € 300; oggi prelevi € 100. Di quanto potrai disporre fra sei mesi se il tasso praticato dalla Banca rimane invariato nel periodo di durata dell'operazione finanziaria? E se il tasso praticato dalla banca diventa dello 0,8% trimestrale a partire da oggi? [€ 209,10; € 208,69]

**46** Mario ha la possibilità di investire la somma di € 10000. Il suo consulente finanziario gli propone di investire il capitale a interesse semplice al tasso annuo del 3,5%; un suo amico gli propone invece di prestare il denaro a interesse semplice ad un tasso semestrale dell'1,6%. Quale delle due proposte consente a Mario di ottenere il guadagno più elevato dopo quattro mesi?  
[€ 10116,67; € 10106,67; la prima proposta]

*Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo del capitale in regime di interesse semplice.*

**47 ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il capitale che, al tasso di interesse semplice del 2% annuo, produce in 6 mesi un montante di € 5050.

I dati del problema sono:  $M = 5050$      $i = 0,02$      $t = 6$  mesi

Esprimiamo il tempo in anni:  $6 \text{ mesi} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$  (anni)

Sostituiamo i dati nella formula del montante  $M = C(1 + it)$  e risolviamo l'equazione:

$$5050 = C \left( 1 + 0,02 \cdot \frac{1}{2} \right) \quad \rightarrow \quad 5050 = \frac{101}{100} C \quad \rightarrow \quad C = 5050 \cdot \frac{100}{101} = 5000 \text{ (€)}$$

**48** Calcola il capitale che al tasso di interesse semplice:  
a. del 2,5% annuo produce in 8 mesi un montante di € 4066,67 [€ 4000]  
b. del 4% annuo produce in 2 mesi un montante di € 21140 [€ 21000]  
c. del 3,2% annuo produce in 6 mesi e 15 giorni un montante di € 6104 [€ 6000]  
d. del 2,6% annuo produce in 3 mesi e 10 giorni un montante di € 5539,72. [€ 5500]

- 49** Calcola il capitale che al tasso di interesse semplice:
- a. del 2% semestrale produce in 6 mesi un montante di € 3060 [€ 3000]
  - b. dell'1% semestrale produce in 3 mesi un montante di € 3216 [€ 3200]
  - c. del 3% trimestrale produce in 6 mesi un montante di € 9540 [€ 9000]
  - d. dell'1,2% quadrimestrale produce in 7 mesi un montante di € 12 762,50 [€ 12 500]
  - e. dello 0,3% mensile produce in 5 mesi un montante di € 5 887. [€ 5 800]

- 50** Calcola il capitale che:
- a. al 4% annuo per 11 mesi frutta un interesse semplice di € 88 [€ 2400]
  - b. al 5,5% annuo per 1 anno e 3 mesi frutta un interesse semplice di € 206,25 [€ 3000]
  - c. al 3,8% annuo per 2 anni e 4 mesi permette di ottenere un interesse semplice di € 354,67 [€ 4000]
  - d. al 2,4% quadrimestrale per 9 mesi e 10 giorni permette di ottenere un interesse semplice di € 156,80. [€ 2800]

- 51** Determina il capitale impiegato dal signor Rossi al tasso del 5% annuo per 8 mesi e 24 giorni, sapendo che l'interesse maturato è di € 110. [€ 3000]

- 52** Quale capitale investito al tasso annuo del 2,5% produce un interesse semplice di € 139,03 dopo 1 anno 5 mesi e 10 giorni? [€ 3850,06]

- 53** Determina il capitale impiegato da Paola, al tasso trimestrale dell'1,2%, per 2 anni 2 mesi e 12 giorni, sapendo che l'interesse maturato è stato di € 612,48. [€ 5800]

- 54** Marco, depositando un certo capitale, dopo 1 anno 8 mesi e 15 giorni ha ottenuto un interesse di € 300,67. Calcola il capitale investito sapendo che il tasso di interesse semplice semestrale applicato è stato del 2,2%. [€ 4000]

*Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo del tempo di impiego in regime di interesse semplice.*

**55** **ESERCIZIO GUIDA**

Un capitale di € 1000 produce un interesse di € 5 al tasso di interesse annuo del 2%. Calcoliamo il tempo di durata dell'operazione finanziaria in regime di interesse semplice.

I dati a nostra disposizione sono:  $C = 1000$      $I = 5$      $i = 0,02$

Vogliamo calcolare  $t$ .

La cosa più semplice è utilizzare la formula dell'interesse  $I = Cit$  dalla quale ricaviamo che è  $t = \frac{I}{Ci}$  :

$$t = \frac{5}{1000 \cdot 0,02} = 0,25 \text{ anni} \quad \text{cioè un tempo di } 0,25 \cdot 12 = 3 \text{ mesi}$$

- 56** Un capitale di € 10 000 produce un interesse di € 225 al tasso di interesse semplice annuo del 3%. Calcola la durata dell'operazione finanziaria. [9 mesi]

- 57** Determina la durata delle seguenti operazioni finanziarie:
- a. il capitale di € 3500, ad un tasso annuo del 4,2%, produce un interesse semplice di € 226,63 [1a 6m 15g]
  - b. il capitale di € 4900, ad un tasso annuo del 2,8%, produce un interesse semplice di € 134,15 [11m 22g]
  - c. il capitale di € 7300, ad un tasso trimestrale del 2%, produce un interesse semplice di € 803 [1a 4m 15g]
  - d. il capitale di € 6100, ad un tasso semestrale del 2,3%, produce un interesse semplice di € 224,48. [9m 18g]

- 58** Determina per quanto tempo sono state impiegate le seguenti somme sapendo che ognuna ha prodotto un interesse semplice di € 375:
- a. € 5300, ad un tasso annuo del 3% [2a 4m 9g]
  - b. € 6600 ad un tasso annuo del 3,5% [1a 7m 14g]
  - c. € 7100 ad un tasso annuo del 4% [1a 3m 25g]
  - d. € 4000 ad un tasso annuo del 4,2% [2a 2m 24g]

- 59** Per quanto tempo si deve impiegare un capitale di € 9000 ad un tasso annuo del 3,8% per ottenere un interesse semplice di € 848,35? [2a 5m 23g]

- 60** Dopo quanto tempo il capitale di € 7200 investito a un tasso bimestrale dello 0,8% produrrà un interesse semplice di € 357,12? [1a 12g]

*Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo del tasso di interesse in capitalizzazione semplice.*

**61** **ESERCIZIO GUIDA**

In un'operazione finanziaria, un capitale di € 10000 produce in 8 mesi un interesse di € 240. A quale tasso di interesse annuo è stata fatta l'operazione?

I dati a nostra disposizione sono:  $C = 10000$      $I = 240$      $t = 8 \text{ mesi} = \frac{2}{3}$  di anno

Vogliamo calcolare  $i$ .

Possiamo applicare la formula dell'interesse  $I = Cit$  dalla quale ricaviamo che è  $i = \frac{I}{Ct}$ :

$$i = \frac{240}{10000 \cdot \frac{2}{3}} = 0,036 \quad \text{che corrisponde ad un tasso annuo del 3,6\%}$$

- 62** In 8 mesi, un capitale di € 2500 ha prodotto un montante di € 2520. A quale tasso trimestrale è stata fatta l'operazione finanziaria? [ $i_t = 0,003$ ]

- 63** Da un'operazione finanziaria della durata di 9 mesi si ottiene un interesse di € 21,50. Quale tasso semestrale è stato applicato in regime di interesse semplice, se si sono investiti € 4800? [0,3%]

- 64** Determina a quale tasso annuo sono state investiti i seguenti capitali:
- a. € 7500, se, in 2 anni 4 mesi e 20 giorni, ha maturato un interesse semplice di € 806,25 [4,5%]
  - b. € 4200, se, in 7 mesi e 15 giorni, ha maturato un interesse semplice di € 149,63 [5,7%]
  - c. € 5600, se, in 2 anni e 18 giorni, ha maturato un interesse semplice di € 551,04 [4,8%]
  - d. € 11000, se, in 1 anno e 5 mesi, ha maturato un interesse semplice di € 779,17. [5%]

- 65** Determina a quale tasso trimestrale sono state investite le seguenti somme sapendo che da ognuna è stato ottenuto lo stesso interesse semplice di € 744,80:
- a. € 14500 per 225 giorni [2,055%]
  - b. € 7600 per 10 mesi e 15 giorni. [2,8%]

- 66** Gianni, da un capitale iniziale di € 7200, vuole ottenere un interesse di € 609,60 in 2 anni 1 mese e 12 giorni. A quale tasso annuo di interesse semplice dovrà impiegare il proprio denaro? [4%]

- 67** Giorgio presta ad un amico la somma di € 12000, ma sa che tra 1 anno 10 mesi e 25 giorni dovrà pagare una cambiale di € 13370. A quale tasso annuo di interesse semplice deve prestare la somma per avere a sua volta il denaro necessario? [6%]

- 68** Hai acquistato dei titoli pagandoli € 15200; dopo 40 giorni li rivendi ricavando € 15267,56. Calcola il tasso di interesse semplice annuo. [4%]

- 69** Emma versa in una banca € 15000; dopo 6 mesi versa ancora € 3000 e dopo ulteriori 9 mesi versa

€ 2500. Il montante finale ritirato dopo 2 anni dall'inizio dell'operazione è di € 21 000. A quale tasso di interesse semplice annuo sono stati fatti i vari versamenti? [1,37%]

**70** Investendo per 2 anni 3 mesi e 16 giorni la somma di € 8500 e per 1 anno 4 mesi e 22 giorni una somma doppia della prima, avrai a disposizione complessivamente € 28697,52. Quale tasso di interesse semplice semestrale è stato applicato? [3,63%]

**71** Franco ha impiegato € 15000 per 20 mesi. Calcola il tasso di interesse semplice dell'operazione, sapendo che la stessa somma, impiegata ad un tasso superiore di un punto e mezzo percentuale, dà un montante di € 16875. [6%]

**72** Trenta mesi fa hai impiegato un capitale di € 10000 ad un certo tasso. Dopo un anno hai reinvestito il montante ottenuto ad un tasso aumentato di un punto percentuale. Sapendo che il montante di cui disponi attualmente è di € 10918, quali tassi annui sono stati applicati nel corso dell'operazione finanziaria in regime di interesse semplice? [3%; 4%]

*Risolvi i seguenti problemi riassuntivi in regime di interesse semplice.*

**73** Completa la seguente tabella, utilizzando le leggi del regime di capitalizzazione semplice:

CAPITALE	INTERESSE	MONTANTE	TASSO ANNUO	TEMPO
€ 3000	€ 540			3 anni
€ 5000	€ 225		0,045	
€ 9000		€ 9475,80	0,026	
€ 12000			0,035	9 mesi 20 giorni

[€ 3540, 6%; € 5225, 1a; € 475,80, 2a 12g; € 338,33, € 12338,33]

## 74 ESERCIZIO GUIDA

Vengono depositati € 1200 presso una banca che capitalizza al tasso trimestrale dello 0,6%; dopo 9 mesi viene ritirata la metà del montante che viene investita in un'operazione finanziaria che rende il 4% annuo. Se tutte le operazioni vengono fatte in regime di interesse semplice, quanto si avrà complessivamente a disposizione dopo un anno e mezzo dalla seconda operazione?

Visualizziamo il problema utilizzando l'asse dei tempi.

Calcoliamo il montante del capitale  $C_1 = 1200$  per un tempo di 9 mesi, ovvero per 3 trimestri:

$$M_1 = 1200(1 + 0,006 \cdot 3) = 1221,60(\text{€})$$

Della somma ottenuta ne calcoliamo la metà che è il nuovo capitale da investire:

$$C_2 = \frac{1221,60}{2} = 610,80(\text{€})$$

Calcoliamo il montante di  $C_2$  per un tempo di  $t = 1,5$  anni al tasso annuo del 4%:

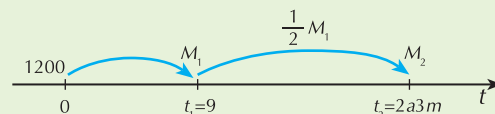
$$M_2 = 610,80(1 + 0,04 \cdot 1,5) = 647,45(\text{€})$$

Calcoliamo il montante  $M_3$  del capitale che è rimasto depositato in banca con la prima operazione e che è rimasto impiegato al tasso trimestrale dello 0,6% per 1 anno e mezzo, quindi 6 trimestri:

$$M_3 = 610,80(1 + 0,006 \cdot 6) = 632,79(\text{€})$$

Il montante complessivo  $M$  è dato dalla somma di  $M_2$  con  $M_3$  ed è:

$$M = 647,45 + 632,79 = 1280,24(\text{€})$$





- 75** Un anno fa hai depositato € 4000 in una banca che applica il tasso trimestrale dello 0,7%. Sei mesi fa hai investito € 3000 in un'operazione finanziaria che assicura il tasso annuo del 4%. Oggi ritiri entrambi i montanti e investi l'intera somma in un'altra operazione finanziaria della durata di 9 mesi al tasso semestrale del 2,4%. Di quanto potrai disporre al termine di quest'ultimo investimento se tutte le operazioni vengono fatte in regime di capitalizzazione semplice? [€ 7430,19]
- 76** Sei mesi fa hai depositato un capitale di € 3000 presso una banca che capitalizza al tasso annuo nominale convertibile trimestralmente del 2,4%. Calcola il montante di cui potrai disporre fra 3 mesi, sapendo che oggi il tasso è stato cambiato ed è del 3% annuo. [€ 3058,77]
- 77** Hai investito, in regime di interesse semplice, due capitali rispettivamente al tasso annuo del 3,5% e al tasso annuo del 4,2% dai quali, dopo 2 anni e 3 mesi, hai ottenuto un montante complessivo di € 6097,70. Calcola l'importo dei due capitali sapendo che, invertendo i due tassi, dopo 3 anni il montante ottenuto è di € 6230. [€ 2000; € 3600]
- 78** Luigi dispone di un capitale  $C$  che decide di investire per 9 mesi nel seguente modo:  $\frac{1}{3}C$  viene investito ad un tasso annuo semplice del 6,5%; la parte rimanente viene investita ad un tasso annuo semplice del 4,3%. Sapendo che l'interesse ottenuto dal secondo prestito supera di € 63 l'interesse ottenuto con la prima operazione, calcola l'importo del capitale  $C$  iniziale. [€ 12000]
- 79** Paolo ha versato in una banca, 20 mesi fa, € 4800 al tasso trimestrale dello 0,8%. Dopo 4 mesi e 10 giorni ha versato una somma uguale a quella del primo versamento aumentata del 20%. Calcola il montante complessivo di cui dispone attualmente Paolo se la banca opera in regime di interesse semplice trimestrale. [€ 11056,64]
- 80** Gianni presta all'amico Paolo € 5000 a interesse semplice, al tasso annuo del 4,5%, per 10 mesi; alla scadenza concordata, però, Paolo non può restituire la somma totale. I due amici si accordano come segue: Paolo consegnerà subito la metà della somma più gli interessi maturati, mentre la parte restante verrà pagata tra 4 mesi a un tasso maggiorato di mezzo punto percentuale. Calcola quale somma complessiva riceverà Gianni. [€ 5229,17]

## IL REGIME DI INTERESSE COMPOSTO

la teoria è a pag. 8

### RICORDA

- Si dice che si opera in regime di interesse composto quando l'interesse viene capitalizzato al termine di ciascun periodo e produce a sua volta interesse nel periodo successivo.

Le leggi di capitalizzazione che regolano tale regime sono:

$$M = C(1 + i)^t \quad \text{e} \quad I = C[(1 + i)^t - 1]$$

### Comprensione

- 81** La formula  $M = C(1 + i)^6$  rappresenta il montante in capitalizzazione composta:
- di un capitale  $C$  per un tempo di 6 mesi
  - di un capitale di 6 euro
  - di un capitale  $C$  per 6 anni
  - di un capitale  $C$  per 3 mesi.
- 82** La formula  $M = C(1 + i_6)^2$  rappresenta il montante di un capitale  $C$  in capitalizzazione composta:
- per 2 anni
  - per 2 bimestri
  - per 2 mesi
  - per 6 mesi

- 83** In capitalizzazione composta, il montante prodotto da un capitale di € 10000 al tasso annuo del 2%, dopo 3 anni è di euro:  
 a. 10600                      b. 10261,08                      c. 10612,08                      d. 10216,08
- 84** Il capitale che al tasso annuo composto del 5% produce in 6 anni un montante di € 1072,07 è di euro:  
 a. 1000                      b. 800                      c. 900                      d. 700

## Applicazione

Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo del montante in capitalizzazione composta.

### 85 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il montante e successivamente l'interesse prodotto da un capitale di € 3500 in 2 anni e 6 mesi in capitalizzazione composta al tasso annuo del 3%.

I dati che conosciamo sono:  $C = 3500$      $i = 0,03$      $t = 2a \ 6m$

Vogliamo trovare  $M$  e  $I$ .

Poiché il tasso è annuo, trasformiamo il tempo in anni:  $t = 2 + \frac{6}{12} = \frac{5}{2}$  di anno

Applichiamo la formula per il calcolo del montante  $M = C(1 + i)^t$ :  $M = 3500 \cdot (1 + 0,03)^{\frac{5}{2}} = 3768,44$  (€)

L'interesse  $I$  è la differenza del montante con il capitale investito:  $I = 3768,44 - 3500 = 268,44$  (€)

- 86** Determina il montante dei seguenti capitali:
- a. € 329, impiegato per 7 anni al tasso del 5,5% annuo [€ 478,59]
  - b. € 721, impiegato per 12 anni al tasso del 7,45% annuo [€ 1707,70]
  - c. € 269, impiegato per 11 anni al tasso del 6,25% annuo. [€ 524,05]
- 87** Calcola il montante dei seguenti capitali:
- a. € 4584 al tasso del 5,15% annuo, per 3 anni e 9 mesi [€ 5533,88]
  - b. € 3578 al tasso del 6,25% annuo, per 4 anni 2 mesi e 17 giorni [€ 4619,42]
  - c. € 6114 al tasso del 3,5% annuo, per 12 anni 11 mesi e 23 giorni. [€ 9555,63]
- 88** Calcola il montante di un capitale di € 5200 impiegato ad un tasso composto del 6% annuo per:
- a. 4 anni [€ 6564,88]
  - b. 3 anni e 9 mesi [€ 6469,94]
  - c. 7 anni 7 mesi e 3 giorni [€ 8093,14]
  - d. 3 anni 8 mesi e 15 giorni. [€ 6440,16]
- 89** Calcola il montante ottenuto in capitalizzazione composta annua di un capitale di € 8000 in 3 anni 2 mesi e 20 giorni al tasso annuo del 2,5%. [€ 8662,53]
- 90** Calcola il montante ottenuto in capitalizzazione composta annua di un capitale di € 12500 in 4 anni e 9 mesi al tasso annuo del 5%. [€ 15760,11]
- 91** Calcola il montante a interesse composto annuo di due capitali: il primo di € 3400, al tasso annuo del 2,75%, investito per 3 anni 2 mesi e 28 giorni; il secondo di € 2750, impiegato per 5 anni 4 mesi e 12 giorni al tasso annuo del 3,75%. [€ 7063,52]
- 92** Calcola il montante di € 8560 ottenuto in capitalizzazione composta semestrale, al tasso semestrale dello 0,65% per la durata di tre anni. [€ 8899,31]
- 93** Un capitale di € 5230 è impiegato, al tasso trimestrale dell'1,45%, con capitalizzazione composta trimestrale. Quale somma produrrà dopo 2 anni? [€ 5868,38]

Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo del capitale in regime di interesse composto.

### 94 ESERCIZIO GUIDA

Troviamo il capitale che, impiegato in capitalizzazione composta per 5 anni al tasso annuo del 2,5%, produce un montante di € 6562,17.

Conosciamo:  $M = 6562,17$      $i = 0,025$      $t = 5$  anni

Vogliamo trovare  $C$ .

Sostituiamo i dati nella formula del montante  $M = C(1 + i)^t$  e risolviamo rispetto a  $C$  :

$$6562,17 = C(1 + 0,025)^5 \quad \rightarrow \quad C = \frac{6562,17}{1,025^5} = 5800(\text{€})$$

- 95** Trova il capitale che, impiegato in capitalizzazione composta annua:
- a. in 2 anni al tasso annuo del 5% produce un montante di € 3 858,75 [€ 3 500]
  - b. in 4 anni al tasso annuo del 2% produce un montante di € 9 741,89 [€ 9 000]
  - c. al tasso del 3,71% annuo, dopo 4 anni, dà un montante di € 462,75 [€ 400]
  - d. al tasso del 3% annuo, dopo 3 anni, dà un montante di € 1 202. [€ 1 100]
- 96** Trova il capitale che, impiegato in capitalizzazione composta annua:
- a. in 2 anni e 6 mesi al tasso annuo del 3% produce un montante di € 4845,13 [€ 4 500]
  - b. al tasso del 1,3% annuo, dopo 7 anni e 3 mesi, dà un montante di € 4941,75 [€ 4 500]
  - c. al tasso del 6,25% annuo, dopo 5 anni e 7 mesi, dà un montante di € 3 507,06. [€ 2 500]
- 97** Trova il capitale che, impiegato in capitalizzazione composta annua, in 5 anni 4 mesi e 21 giorni al tasso annuo del 2,4% produce un montante di € 3011,48. [€ 2 650]
- 98** Trova il capitale che, impiegato in capitalizzazione composta semestrale, in 5 anni al tasso semestrale del 2% produce un montante di € 5 119,78. [€ 4 200]
- 99** Trova il capitale che, impiegato in capitalizzazione composta trimestrale, in 6 anni al tasso trimestrale del 3,5% produce un montante di € 19 408,29. [€ 8 500]
- 100** Trova il capitale che, impiegato in capitalizzazione composta trimestrale, in 2 anni e 9 mesi al tasso trimestrale dell'1,6% produce un montante di € 7 144,67. [€ 6 000]
- 101** Trova il capitale che, in 5 anni al tasso annuo nominale convertibile semestralmente del 6%, produce, in capitalizzazione composta semestrale, un montante di € 4031,75.  
(Suggerimento: trasforma il tasso da annuo nominale convertibile semestralmente a tasso semestrale  $i_2 = \frac{0,06}{2}$ ) [€ 3 000]
- 102** Trova il capitale che, in 4 anni al tasso annuo nominale convertibile semestralmente del 4% produce, in capitalizzazione composta semestrale, un montante di € 11 716,59. [€ 10 000]

Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo del tasso di interesse in capitalizzazione composta.

### 103 ESERCIZIO GUIDA

Un capitale di € 3500, dopo 2 anni, ha prodotto un montante di € 3713,15. A quale tasso di interesse annuo è stata fatta l'operazione?

Sappiamo che:  $C = 3500$      $t = 2$  anni     $M = 3713,15$

Vogliamo trovare  $i$ , che per omogeneità con il tempo, sarà un tasso annuo.

Sostituiamo i dati nella formula del montante e risolviamo l'equazione rispetto a  $i$ :

$$3713,15 = 3500(1+i)^2 \rightarrow (1+i)^2 = \frac{3713,15}{3500} \rightarrow 1+i = \sqrt{\frac{3713,15}{3500}} \rightarrow i = \sqrt{\frac{3713,15}{3500}} - 1 = 0,03$$

Si tratta quindi di un tasso annuo del 3%.

- 104** Calcola il tasso di interesse annuo per il quale:
- a. un capitale di € 2 680 in 3 anni e 5 mesi produce un montante di € 2915,91 [2,5%]
  - b. capitale di € 4000, dopo 3 anni e 8 mesi, dà un montante pari a € 4918,59 [5,8%]
  - c. capitale di € 5000, dopo 8 anni e 10 mesi, dà un montante pari a € 9089,22 [7%]
  - d. capitale di € 1020, dopo 4 anni 1 mese e 11 giorni, dà un montante pari a € 1151,89. [3%]
- 105** Un capitale di € 7000, dopo 2 anni 9 mesi e 15 giorni, ha prodotto un montante di € 8 021,42. A quale tasso di interesse annuo è stata fatta l'operazione? [5%]
- 106** Calcola il tasso di interesse semestrale per cui un capitale di € 8 500, in 3 anni produce, in capitalizzazione composta, un montante di € 9 572,38. [2%]
- 107** Un capitale di € 1500, dopo 6 anni, ha prodotto un montante di € 1 997,21. A quale tasso di interesse trimestrale è stata fatta l'operazione? [1,2%]

*Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo del tempo.*

### 108 ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo per quanto tempo deve rimanere impiegato un capitale di € 3000 per avere un montante di € 3244,80 se l'operazione viene fatta al tasso annuo del 4%.

I dati a nostra disposizione sono:  $C = 3000$   $i = 0,04$   $M = 3244,80$

Dobbiamo trovare  $t$  che, per omogeneità con il tasso, sarà espresso in anni.

Sostituiamo i dati nella relazione del montante  $M = C(1+i)^t$  e risolviamo l'equazione rispetto a  $t$ :

$$3244,80 = 3000(1+0,04)^t \rightarrow 1,04^t = \frac{3244,80}{3000} \rightarrow 1,04^t = 1,0816$$

Risolviamo usando i logaritmi decimali:

$$\log 1,04^t = \log 1,0816 \rightarrow t \log 1,04 = \log 1,0816 \rightarrow t = \frac{\log 1,0816}{\log 1,04} \rightarrow t = 2$$

Il tempo d'impiego è di 2 anni.

- 109** Calcola dopo quanto tempo in capitalizzazione composta:
- a. il capitale di € 2248 al tasso del 8,15% annuo, dà un montante di € 5220 [10a 9m]
  - b. il capitale di € 850 al tasso del 5,5% annuo, dà un montante di € 2100 [16a 10m 21g]
  - c. il capitale di € 745 al tasso annuo del 6,24%, produce un montante di € 6300 [35a 3m 7g]
  - d. il capitale di € 6000 al tasso annuo del 4,35%, produce un montante di € 10001,40. [12a]
- 110** Trova dopo quanto tempo un capitale di € 4 200, impiegato al tasso annuo del 3%, produce un montante di € 4488,83. [2a 3m]
- 111** Trova dopo quanto tempo un capitale di € 7 000, impiegato al tasso annuo del 2,3%, produce un montante di € 7233,73. [1a 5m 10g]

- 112** Un capitale di € 4 000, impiegato al tasso semestrale del 3%, produce un montante di € 4243,60. Quanto tempo è durata l'operazione finanziaria? [1a]

## ESERCIZI RIASSUNTIVI SULLA CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE E COMPOSTA

- 113** Mario ha depositato 2 anni fa un capitale di € 40 000 al tasso trimestrale semplice dello 0,02%, 9 mesi fa ha poi prestato ad un amico € 20 000 concordando un tasso annuo di interesse semplice del 5%. Oggi ritira il montante del deposito fatto 2 anni fa e riceve la restituzione del prestito e degli interessi maturati su di esso. Calcola la somma complessiva incassata da Mario. [€ 60 814]

- 114** In quanto tempo un capitale raddoppia al tasso annuo nominale convertibile semestralmente del 2% in regime di interesse semplice? E se il regime è di interesse composto? [50a; 34a 9m 29g]

- 115** Un tale, in regime di interesse composto, impiega due capitali, il primo al tasso annuo del 3%, il secondo al tasso semestrale dell'1,7%. Dopo 5 anni ritira un montante di € 10 579,50. Calcola il valore dei due capitali sapendo che il secondo è doppio del primo. [€ 3 000; € 6 000]

- 116** Due anni fa hai depositato un capitale di € 4 000 in capitalizzazione composta trimestrale al tasso del 2% trimestrale; oggi ritiri il montante e lo investi in un'operazione finanziaria che frutta il 5% semestrale composto. Dopo quanto tempo potrai ritirare un montante di € 5425,36? [1a 6m]

- 117** Giorgio investe un capitale  $C$  in capitalizzazione composta trimestrale al tasso annuo nominale convertibile trimestralmente dell'8%. Dopo 4 anni ritira il montante e lo investe per 9 mesi in capitalizzazione semplice annua, al tasso annuo dell'8,5%. A quale tasso semestrale composto Giorgio avrebbe dovuto investire il capitale iniziale  $C$  per avere un montante uguale a quello prodotto dallo stesso capitale in 10 anni? [1,911% semestrale]

- 118** Avendo a disposizione € 14000 decidi di fare i seguenti investimenti: impieghi € 8600 al tasso del 3,75% annuo a interesse semplice e la parte rimanente, sempre a interesse semplice, a un tasso semestrale del 2,2%. Calcola:

- il montante complessivo sapendo che l'impiego è durato in entrambi i casi 4 anni e 8 mesi [€ 16613,80]
- il tasso annuo unico applicato, ad interesse semplice, per poter ottenere nello stesso tempo lo stesso montante complessivo [4%]
- il tasso annuo applicato, ad interesse composto, per ottenere nello stesso tempo lo stesso montante complessivo. [3,74%]

### 119 ESERCIZIO GUIDA

Eleonora ha investito la somma di € 4500 in capitalizzazione semplice al tasso annuo del 3,45% per 3 anni e 7 mesi. Determina il capitale che avrebbe dovuto investire per ottenere lo stesso montante, a parità di tasso e di tempo, ma in capitalizzazione composta.

Come prima operazione calcoliamo il montante a interesse semplice (3 anni e 7 mesi =  $\frac{43}{12}$ )

$$M = 4500 \cdot \left(1 + 0,0345 \cdot \frac{43}{12}\right) = 5056,31 \text{ (€)}$$

Sapendo che i due montanti devono essere uguali, per trovare il capitale dobbiamo applicare la formula inversa in capitalizzazione composta

$$C = \frac{M}{(1+i)^t} = M(1+i)^{-t}$$

cioè:  $C = 5056,31 \cdot (1,0345)^{-3,58333} = 4477,64 \text{ (€)}$

- 120** Calcola qual è il tasso di interesse annuo semplice equivalente al tasso di interesse composto del 6,85% per un periodo di 4 anni. [7,59%]
- 121** Determina il tasso di interesse semplice che, per una durata di 3 anni, permette di disporre dello stesso montante ottenuto investendo la cifra di € 5000 al tasso di interesse composto annuo del 7,45%. [8,02%]
- 122** Debora investe € 3800 al tasso annuo di interesse semplice del 3,2% per 2 anni 1 mese e 15 giorni. Alla scadenza decide di reinvestire il montante ottenuto al tasso di interesse composto annuo del 3,25% per altri 2 anni 6 mesi e 20 giorni. Calcola il montante complessivo. [€ 4404,04]
- 123** In capitalizzazione composta si eseguono le seguenti operazioni:  
 a. si impiega un capitale di € 100 e si incassa dopo 2 anni un montante pari a € 108,16  
 b. si impiega un capitale di € 300 e si incassa dopo 1 anno e 6 mesi un montante pari a € 320,48.  
 Quale delle due operazioni è stata più conveniente? [a.  $i = 0,04$ ; b.  $i = 0,045$ ]
- 124** È più conveniente impiegare in capitalizzazione semplice € 500 e incassare dopo 8 mesi € 516,67 o impiegare € 800 in capitalizzazione composta per 2 anni ed incassare € 856,98? [prima operazione  $i = 0,05$ ; seconda operazione  $i = 0,035$ ]
- 125** Otto anni fa furono depositate presso una banca la somma di € 3450 e, quattro anni fa, la somma di € 5000. Determina il tasso di impiego, sapendo che il montante a interesse composto ottenuto oggi dal secondo investimento è superiore di € 1257,18 rispetto al montante ottenuto dal primo. [3%]
- 126** Giulio deposita presso un istituto finanziario la somma di € 2500 al tasso annuo di interesse composto del 4,75%. Dopo tre anni ritira la somma ottenuta per reinvestirla in un'altra operazione finanziaria. Determina il tasso applicato sapendo che, dopo altri due anni, il montante è di € 3200. [5,52%]
- 127** Lucio ha depositato la somma di € 7000 al tasso annuo di interesse composto del 3,45% per quattro anni. Al termine di questo periodo, ritira il montante e lo reinveste al tasso annuo composto del 3,75%. Calcola dopo quanto tempo Lucio potrà disporre della somma di € 8629,71. [2a]
- 128** Nove anni fa fu depositata presso una banca la somma di € 6000 al tasso composto del 2,75% annuo. Tre anni dopo, fu depositata la somma di € 3500. Determina dopo quanto tempo da oggi si otterrà un montante pari a due volte la prima somma versata. [8m 7g]
- 129** Si vuole investire per 5 anni e 8 mesi la somma di € 9000 disponendone i  $\frac{2}{3}$  a interesse semplice al tasso annuo del 5% e il rimanente a interesse composto al tasso annuo del 4,5%. Determina il tasso necessario per ottenere lo stesso montante per lo stesso periodo se si volesse impiegare tutta la somma iniziale in regime di capitalizzazione composta. [4,5%]
- 130** Dieci anni fa Domenico ha depositato una certa somma di denaro. Dopo 3 anni deposita una seconda somma, pari alla prima aumentata di € 1000. Dopo altri 3 anni, versa una terza somma pari a € 4500. Calcola l'importo del primo versamento sapendo che oggi Domenico dispone di un montante complessivo di € 34606,36, e che tutte le operazioni sono state fatte al tasso composto annuo del 3%. [€ 11000]
- 131** Hai la necessità di disporre oggi di € 18043,75 e per questo ritiri la somma maturata dall'investimento di un capitale di € 6500 fatto 4 anni fa e il montante di un deposito di € 5850 fatto 8 anni fa. La somma ottenuta copre esattamente il bisogno attuale. Calcola il tasso di interesse composto annuo a cui sono stati impiegati i capitali. [6,5%]
- 132** Giacomo versa la somma di € 6500 in un deposito vincolato a 5 anni che prevede la capitalizzazione composta quadrimestrale degli interessi al tasso del 2,25% quadrimestrale. Dopo 3 anni, si trova nella necessità di dover estinguere il deposito. La banca però applica al montante accumulato una penale del 5%. Quale somma ha ricevuto Giacomo? A quale tasso effettivo è stata fatta l'operazione finanziaria? [€ 7544,09; 1,669%]
- 133** Stefania ha la possibilità di investire la somma di € 3000 a interesse composto al tasso trimestrale del 2%

per 2 anni. Al termine di questo periodo ritira il montante e decide di reinvestirlo a interesse semplice al tasso semestrale del 5% per 4 anni. Alla scadenza ritira il montante e ne presta la metà ad un amico al tasso annuo composto del 9%. Sapendo che la somma che l'amico deve restituire è di € 2881,61, calcola la durata del prestito. [1a 10m]

### 134 ESERCIZIO GUIDA

Un capitale di € 2500 viene depositato in banca; inizialmente il tasso annuo è del 2,45%, ma dopo 2 anni il tasso varia e passa al 2,5% annuo. Calcola il montante sapendo che tale capitale è stato investito per 6 anni.

Calcoliamo il montante dei primi due anni:  $M = 2500 \cdot (1 + 0,0245)^2 = 2624(\text{€})$

La somma ottenuta viene ora capitalizzata per i successivi 4 anni al nuovo tasso; si ha così che il montante finale è dato da

$$M = 2624 \cdot (1 + 0,0250)^4 = 2896,40(\text{€})$$

**135** Gloria ha un capitale di € 6300 che deposita in una banca che capitalizza al tasso composto annuo del 3,5%. Dopo 4 anni il tasso passa al 3,3% annuo e dopo un altro anno si ha di nuovo una variazione che porta il tasso al 3,2%. Calcola il montante finale, sapendo che il capitale è rimasto depositato per complessivi 8 anni. [€ 8208,07]

**136** Calcola il montante ottenuto dal capitale di € 4200 a interesse composto annuo al tasso del 3,75% sapendo che, dopo i primi 3 anni, il tasso è sceso di mezzo punto percentuale e che la durata dell'impiego è stata di 7 anni. Calcola inoltre il tasso d'interesse composto annuo che permette di ottenere lo stesso montante nello stesso tempo. [€ 5330,57; 3,46%]

**137** Hai depositato € 10000 in un fondo vincolato per 9 anni a interesse composto annuo. Il tasso trimestrale inizialmente del 3% subisce alcune variazioni: dopo 2 anni scende di un quarto di punto percentuale, dopo un ulteriore anno scende di un altro mezzo punto e, 2 anni prima della scadenza, è al 2%. Calcola il montante incassato alla scadenza. [€ 23617,81]

**138** Determina il montante ottenuto, dopo 4 anni e 3 mesi, dal capitale di € 8100, in capitalizzazione composta, al tasso quadrimestrale del 2,85%, sapendo che, dopo 8 quadrimestri, si passa a una capitalizzazione trimestrale al tasso trimestrale del 2,2%. [€ 11640,59]

**139** Renato ha versato in banca la somma di € 7000 e oggi, dopo 2 anni e 9 mesi, ritira un montante di € 8772,10. Il tasso composto trimestrale iniziale era del 2,15%, ma dopo 16 mesi ha subito una variazione. A quale tasso trimestrale è avvenuta la capitalizzazione dal diciassettesimo mese in poi? [2%]

## I REGIMI DI SCONTO

la teoria è a pag. 11

### Il regime di sconto commerciale

#### RICORDA

■ Il valore attuale  $V$  di un capitale  $C$  è la differenza tra il capitale e lo sconto  $S$ :  $V = C - S$

■ In regime di sconto commerciale, le leggi di attualizzazione sono le seguenti:

• la legge dello sconto  $S_c = Cdt$

• la legge del valore attuale:  $V = C(1 - dt)$

• il legame del tasso  $d$  con il tasso di interesse  $i$  è espresso dalla relazione  $d = \frac{i}{1+i}$  o reciprocamente

$$i = \frac{d}{1-d}$$



## Comprensione

140 Barra vero o falso:

- a. In regime di sconto commerciale il tasso di sconto è sinonimo di tasso di interesse anticipato. V F
- b. In regime di sconto commerciale il fattore di sconto è il termine  $(1 - dt)$ . V F
- c. Due capitali uguali scontati commercialmente allo stesso tasso  $d$  e per due tempi diversi, uno doppio dell'altro, danno due sconti uno doppio dell'altro. V F
- d. Nel regime di sconto commerciale si può anticipare il pagamento per qualunque valore del tempo. V F

141 Il tasso annuo di sconto commerciale del 5% equivale a un tasso di interesse annuo pari al:

- a. 0,05
- b. 0,0526
- c. 0,562
- d. 0,055

142 Lo sconto prodotto da un capitale di € 3 000 al tasso di sconto commerciale del 5% annuo in 6 mesi è uguale a:

- a. € 70
- b. € 75
- c. € 80
- d. € 82

143 Se in regime di sconto commerciale hai un tasso annuo del 4%, il tempo di anticipazione del capitale è:

- a. illimitato
- b. maggiore di 25 anni
- c. al massimo 25 anni
- d. al massimo 20 anni

144 Scontando un capitale di € 3 000 per 4 mesi con sconto commerciale del 2% annuo, si ha un valore attuale pari a:

- a. € 2 980
- b. € 20
- c. € 2 800
- d. € 2 982

145 Completa la seguente tabella calcolando i valori mancanti:

$C$ (in euro)	$S_c$ (in euro)	$d$ (annuo)	$t$
2000		0,03	9 mesi
	1200	0,05	3 mesi
1000	30		11 mesi

## Applicazione

Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo dello sconto e del valore attuale in regime di sconto commerciale.

146 Calcola lo sconto prodotto da:

- a. un capitale di € 13 000 al tasso di sconto del 6% annuo in 9 mesi [€ 585]
- b. un capitale di € 6 000 al tasso di sconto del 3% semestrale in 6 mesi [€ 180]
- c. un capitale di € 9 000 al tasso di sconto del 4% semestrale in 11 mesi e 10 giorni [€ 680]
- d. un capitale di € 2 000 al tasso di sconto del 5% annuo nominale convertibile semestralmente in 6 mesi [€ 50]
- e. un capitale di € 4 400 al tasso di sconto del 6% annuo nominale convertibile trimestralmente in 4 mesi [€ 88]
- f. un capitale di € 3 000 al tasso di sconto dello 0,4% mensile in 6 mesi e 15 giorni. [€ 78]

147 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcola quale somma si deve pagare se si anticipa di 3 mesi il pagamento di un debito di € 4 800 al tasso di sconto commerciale del 4% annuo.



I dati del problema sono:  $C = 4800$      $d = 0,04$      $t = 3$  mesi

Vogliamo trovare  $V$ .

Esprimiamo il tempo in anni per uniformarlo con il tasso annuo:  $3$  mesi  $= \frac{1}{4}$  di anno

Applichiamo la formula  $V = C(1 - dt)$ :  $V = 4800 \left(1 - 0,04 \cdot \frac{1}{4}\right) = 4752$  (€)

Il valore attuale del capitale è di € 4752.

- 148** Calcola il valore attuale delle somme di denaro indicate nei seguenti casi:
- a. capitale di € 8 500 che scade tra 2 anni e ritirato oggi con sconto commerciale annuo del 2%  
[€ 8160]
  - b. capitale di € 9 000 ritirato 6 mesi prima della scadenza al tasso di sconto commerciale del 5% annuo  
[€ 8775]
  - c. debito di € 6 000 pagato 10 mesi in anticipo sulla scadenza al tasso di sconto commerciale del 3,4% annuo.  
[€ 5830]
- 149** Si sconta commercialmente una cambiale del valore nominale di € 5000, 1 anno 6 mesi e 15 giorni prima della scadenza, al tasso di sconto annuo del 5%. Calcola la somma scontata. [€ 4614,58]
- 150** Qual è il valore attuale di una cambiale di € 5000 scontata commercialmente al tasso del 6% annuo, che scade fra 2 anni e 3 mesi? [€ 4325]

*Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo del capitale in regime di sconto commerciale.*

**151** **ESERCIZIO GUIDA**

Scontando commercialmente 3 mesi prima della scadenza un certo capitale si ottiene uno sconto di € 62,50. Calcoliamo il capitale sapendo che è stato applicato un tasso di sconto annuo del 5%.

Abbiamo che:  $S_c = 62,50$      $d = 0,05$      $t = 3m = \frac{1}{4}$  di anno

Vogliamo trovare il capitale  $C$ .

Tenendo presente che il tempo deve essere espresso in anni, usiamo la formula dello sconto  $S_c = Cdt$  e da essa ricaviamo il valore di  $C$ :

$$62,50 = C \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{4} \rightarrow C = \frac{62,50 \cdot 4}{0,05} \rightarrow C = 5000$$
 (€)

- 152** Calcola il valore del capitale  $C$  nei seguenti casi:
- a. si ottiene uno sconto € 67,50 al tasso di sconto annuo del 3% anticipando il pagamento di 6 mesi  
[€ 4500]
  - b. si ottiene uno sconto di € 480, al tasso di sconto semestrale del 6% anticipando il pagamento di 6 mesi  
[€ 8000]
  - c. si ottiene uno sconto di € 2016, al tasso di sconto semestrale del 5,6% anticipando il pagamento di 9 mesi.  
[€ 24000]
- 153** Un debito viene saldato 1 anno e 6 mesi prima della scadenza, con sconto commerciale al tasso annuo del 6%, mediante il pagamento di € 13650. Calcola il valore del debito. [€ 15000]
- 154** Si sconta commercialmente un effetto 1 anno e 2 mesi prima della scadenza, al tasso annuo di sconto del 5%, ricavandone € 8475. Calcola il valore nominale della cambiale. [€ 9000]

**155** Riscuoti un credito 6 mesi prima della scadenza e ricevi così € 2450; qual era il valore del credito al tasso di sconto commerciale del 4% annuo? [€ 2 500]

**156** Se anticipi di 2 mesi il pagamento di un prestito che ti è stato concesso, paghi € 4941,67. Quanto valeva il prestito alla scadenza se il tasso di sconto commerciale è del 7% annuo? [€ 5000]

*Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo del tasso di sconto in regime di sconto commerciale.*

**157** **ESERCIZIO GUIDA**

Un capitale di € 5 000, pagato 6 mesi prima della scadenza in regime di sconto commerciale, dà un valore attuale di € 4 925. A quale tasso annuo è stata fatta l'operazione?

I dati del problema sono:  $C = 5000$      $V = 4925$      $t = 6m = \frac{1}{2}$  di anno

Vogliamo calcolare  $d$ .

Usiamo la legge di sconto  $V = C(1 - dt)$ , sostituiamo i dati e risolviamo l'equazione:

$$4925 = 5000 \left(1 - \frac{1}{2}d\right) \rightarrow 4925 - 5000 = -2500d \rightarrow d = 0,03$$

cioè un tasso di sconto del 3%.

**158** Calcola il tasso di sconto annuo  $d$  nei seguenti casi:

a. un capitale di € 6 000, pagato 2 mesi prima della scadenza dà un valore attuale di € 5 950 [5%]

b. un capitale di € 8 500, pagato 8 mesi prima della scadenza dà un valore attuale di € 8 103,33 [7%]

c. un capitale di € 9 000, pagato 9 mesi prima della scadenza dà un valore attuale di € 8 696,25. [4,5%]

**159** Scontando commercialmente un capitale di € 4 500, 2 anni e 15 giorni prima della scadenza, si ricava € 3 948,75. Calcola il tasso di sconto di questa operazione finanziaria. [6%]

**160** Il valore attuale di un capitale di € 5 000, anticipando il pagamento di 8 mesi, è di € 4 866,66. Calcola il tasso di sconto semestrale in regime di sconto commerciale. [2%]

*Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo del tempo di anticipo in regime di sconto commerciale.*

**161** **ESERCIZIO GUIDA**

Il valore attuale di un capitale di € 2 800, scontato commercialmente al tasso di sconto annuo del 5%, è di € 2 695. Qual è il tempo di anticipazione?

Sappiamo che:  $C = 2800$      $V = 2695$      $d = 0,05$

Vogliamo trovare  $t$ .

Applichiamo ancora la legge  $V = C(1 - dt)$  dalla quale, sostituiti i dati, possiamo ricavare  $t$  espresso in anni:

$$2695 = 2800(1 - 0,05t) \rightarrow 2695 - 2800 = -140t \rightarrow t = 0,75$$

Il tempo di anticipazione è di  $0,75 \cdot 12 = 9$  mesi.

- 162** Calcola il tempo di anticipazione nei seguenti casi:
- sconti commercialmente al tasso annuo del 6% una cambiale del valore di € 8 000 e ricevi € 7 760 [6 mesi]
  - sconti commercialmente al tasso annuo del 4% una cambiale del valore di € 10 000 e ricevi € 9 933,33 [2 mesi]
  - sconti commercialmente al tasso annuo dell'8% una cambiale del valore di € 2 000 e ricevi € 1 846,66 [11 mesi 15 giorni]
  - paghi anticipatamente con € 3 880 un debito di € 4 000, con sconto commerciale al tasso semestrale del 3% [6 mesi]
  - paghi anticipatamente con € 19 133,33 un debito di € 20 000, con sconto commerciale al tasso trimestrale del 2%. [6 mesi 15 giorni]

## APPROFONDIMENTI *RELAZIONE FRA TASSO DI SCONTO $d$ E TASSO DI INTERESSE $i$*

- 163** Dato il tasso di interesse  $i$  calcola l'equivalente tasso di sconto commerciale  $d$  nei seguenti casi:
- $i = 5\%$
  - $i = 6\%$
  - $i = 5,4\%$
  - $i = 3,5\%$
- [4,76%; 5,66%; 5,12%; 3,38%]
- 164** Dato il tasso di sconto commerciale  $d$  calcola l'equivalente tasso di interesse  $i$  nei seguenti casi:
- $d = 4\%$
  - $d = 2\%$
  - $d = 3\%$
  - $d = 2,3\%$
- [4,17%; 2,04%; 3,09%; 2,35%]
- 165** Dato il tasso di interesse posticipato del 5,5% annuo, qual è il tasso di interesse anticipato equivalente? [5,21%]
- 166** Dato il tasso di interesse anticipato del 6,8% annuo, qual è il tasso di interesse posticipato equivalente? [7,3%]
- 167** Il tasso di interesse posticipato del 5% annuo è equivalente al tasso di interesse anticipato del 4,8% annuo? [no]

### Il regime di sconto semplice

#### RICORDA

■ Le leggi di attualizzazione di questo regime sono:

- la legge del valore attuale:  $V = \frac{C}{1 + it}$
- la legge dello sconto:  $S_r = \frac{Cit}{1 + it}$  o  $S_r = Vit$

### Comprensione

- 168** Barra vero o falso.
- In regime di sconto semplice, lo sconto è proporzionale alla somma scontata.
  - In regime di sconto semplice il fattore  $1 + it$  rappresenta il fattore di sconto.
  - In regime di sconto semplice non ci sono limitazioni al tempo di anticipazione.

V F

V F

V F

- d. Due capitali uguali scontati con sconto semplice per due tempi uno triplo dell'altro danno due sconti uno triplo dell'altro. V F
- e. Nel regime di sconto semplice il valore attuale e il capitale sono grandezze direttamente proporzionali. V F

**169** In regime di sconto semplice, il valore attuale di un capitale di € 2000 al tasso del 3% e con un tempo di anticipazione di 1 anno e 6 mesi è uguale a:

- a. € 2013,88      b. € 1931,88      c. € 1913,88      d. € 1988,13

**170** Completa la seguente tabella:

CAPITALE	VALORE ATT.	SCONTO RAZ.	TASSO	TEMPO
€ 2500			5% annuo	2a 8m
		€ 934,96	3% semestrale	3a 10m
€ 7500	€ 6332,45		..... annuo	2a 5m 15g
	€ 9498,68	€ 1001,32	2% quadrim.	

## Applicazione

Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo dello sconto e del valore attuale in regime di sconto semplice.

### 171 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo lo sconto semplice prodotto da un capitale di € 2000 in 4 mesi al tasso annuo del 3%.

Sappiamo che:  $C = 2000$      $i = 0,03$      $t = 4 \text{ mesi} = \frac{1}{3}$  di anno

Vogliamo trovare  $S_r$ .

Applichiamo la legge dello sconto: 
$$S_r = \frac{2000 \cdot 0,03 \cdot \frac{1}{3}}{1 + 0,03 \cdot \frac{1}{3}} = 19,80(\text{€})$$

Lo sconto è pari a € 19,80.

**172** Calcola lo sconto semplice prodotto dal capitale  $C$  nei seguenti casi:

- a.  $C = 3500(\text{€})$  in 9 mesi al tasso annuo del 4% [€ 101,94]
- b.  $C = 8000(\text{€})$  in 6 mesi al tasso semestrale del 2% [€ 156,86]
- c.  $C = 1800(\text{€})$  in 10 mesi al tasso semestrale del 2% [€ 58,06]
- d.  $C = 5000(\text{€})$  in 8 mesi al tasso trimestrale dell'1,8%. [€ 229,01]

**173** Un debito di € 3600 viene pagato 3 mesi prima della scadenza al tasso di sconto annuo semplice del 4%. Calcola la somma scontata e lo sconto effettuato. [€ 3564,36; € 35,64]

**174** Un capitale di € 3400 viene pagato, 1 anno 7 mesi e 18 giorni prima della scadenza, fruendo di uno sconto razionale al tasso del 5,1% annuo. Calcola la somma scontata. [€ 3138,56]

**175** Un debito di € 7000 viene pagato 10 mesi prima della scadenza al tasso di sconto annuo semplice del 3%. Calcola la somma scontata e lo sconto effettuato. [€ 6829,27; € 170,73]

**176** Un debito di € 2800 viene pagato 6 mesi e 10 giorni prima della scadenza al tasso di sconto semestrale semplice del 2%. Calcola la somma scontata e lo sconto effettuato. [€ 2742,11; € 57,89]

Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo del capitale in regime di sconto semplice.

- 177** Con € 9 638,55 paghi anticipatamente un debito che avresti dovuto pagare fra 9 mesi al tasso annuo del 5%. Calcola l'entità del debito se si opera in regime di sconto semplice. [€ 10000]

(Suggerimento: usa la formula  $V = \frac{C}{1 + it}$ , sostituisci i dati del problema e ricava C)

- 178** Con la somma di € 3 365,38 paghi anticipatamente un debito che avresti dovuto pagare fra 8 mesi al tasso annuo del 6%. Calcola l'entità del debito se si opera in regime di sconto semplice. [€ 3500]

- 179** Per estinguere un debito che scadrà tra 6 mesi paghi oggi € 7 766,99. Qual è l'importo del capitale avuto in prestito se viene applicato il tasso di sconto semplice del 3% semestrale? [€ 8000]

- 180** Calcola quale capitale ha prodotto:

- a. uno sconto razionale di € 22,33 in 3 mesi, al tasso annuo del 3% [€ 2999,66]
- b. uno sconto razionale di € 57,49 in 7 mesi al tasso annuo del 2,5% [€ 3999,66]
- c. uno sconto razionale di € 44,59 in 1 anno e 2 mesi al tasso annuo del 4% [€ 1000,09]
- d. uno sconto razionale di € 117,65 in 6 mesi al tasso semestrale del 2% [€ 6000,15]
- e. uno sconto razionale di € 176,04 in 9 mesi al tasso quadrimestrale dell'1%. [€ 8000,04]

Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il tasso di sconto in regime di sconto semplice.

- 181** Con la somma di € 11 851,85, Lucia paga tre mesi prima della scadenza un debito di € 12 000. A quale tasso di sconto annuo semplice è stata fatta l'operazione finanziaria? [5%]

(Suggerimento: usa la formula  $V = \frac{C}{1 + it}$ , sostituisci i dati del problema e risolvi l'equazione di incognita  $i$ )

- 182** Hai estinto un debito di € 12000, che sarebbe scaduto fra 9 mesi, pagando € 11 693,06. A quale tasso annuo di sconto razionale è avvenuta l'operazione? [3,5%]

- 183** Anticipo di 7 mesi il pagamento di un debito di € 6000, con la somma di € 5863,19. A quale tasso di sconto annuo semplice è stata fatta l'operazione finanziaria? [4%]

- 184** Si paga con la somma di € 8 309,57 un debito di € 8 500 undici mesi prima della scadenza; quale tasso di sconto semplice annuo è stato applicato? [2,5%]

- 185** Anticipi di un anno il pagamento di un debito di € 5 000, versando € 4807,69; a quale tasso di sconto semestrale semplice è stata fatta l'operazione finanziaria? [2% semestrale]

Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il tempo di anticipazione in regime di sconto semplice.

- 186** A Mario viene concesso di anticipare il pagamento di un debito di € 21 000, pagando oggi € 20 240,96; se il tasso di sconto semplice annuo applicato è del 5%, con quale anticipo Mario ha saldato il debito? [9 mesi]

- 187** Calcola in tempo di anticipazione nei seguenti casi:

- a. si è estinto un debito di € 6000 pagandolo € 5 797,10 al tasso di sconto semplice annuo del 6% [7 mesi]
- b. si è estinto un debito di € 5000 pagandolo € 4 868,15 al tasso di sconto semplice annuo del 5% [6m 15g]
- c. si è estinto un debito di € 15 000 pagandolo € 14 563,11 al tasso di sconto semplice trimestrale del 2%. [4m 15g]

- 188** Riscuotendo anticipatamente un credito di € 20000 con sconto razionale al tasso del 5% annuo, si ricava € 17 843,87. Quanto tempo prima è stato riscosso il credito? [2a 5m]

## Il regime di sconto composto

### RICORDA

■ Le leggi dello sconto composto sono le seguenti:

• la legge del valore attuale  $V = \frac{C}{(1+i)^t}$  o anche  $V = C(1+i)^{-t}$

• la legge dello sconto  $S_{cp} = C - V$

o anche  $S_{cp} = \begin{cases} C[1 - (1+i)^{-t}] & \text{in funzione di } C \\ V[(1+i)^t - 1] & \text{in funzione di } V \end{cases}$

### Comprensione

**189** Barra vero o falso.

In regime di sconto composto:

a. lo sconto è proporzionale al tempo di anticipazione  $t$   V  F

b. le leggi si applicano in caso di debiti a lunga scadenza  V  F

c. il fattore  $(1+i)^{-t}$  esprime lo sconto di un euro che scade al tempo  $t$   V  F

d. il fattore  $\frac{1}{(1+i)^t}$  esprime il valore attuale di un euro che scade al tempo  $t$ .  V  F

**190** Anticipando di 5 mesi il pagamento di un capitale di € 3450 al tasso annuo di sconto composto del 3%, di deve pagare una somma pari a:

a. € 3 492,75

b. € 3 407,77

c. € 3 400

d. € 3 500

**191** Il valore attuale di un capitale  $C$  è € 5980; tale somma è stata calcolata per un anticipo del pagamento di  $C$  di 1 anno e 3 mesi al tasso annuo composto del 2,5%. Il capitale  $C$  è:

a. € 6667,46

b. € 5798,24

c. € 6067,46

d. € 6167,46

**192** Completa la tabella inserendo i dati mancanti:

$V$ (in €)	$C$ in €	$i$	$t$
	1000	0,03	2 anni
	2500	0,04	3anni e 6 mesi
5000		0,02	5 anni

### Applicazione

Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo del valore attuale e dello sconto in regime di sconto composto.

**193** **ESERCIZIO GUIDA**

Marco deve restituire € 3000 fra due anni; decide di saldare oggi il debito e il creditore gli applica un tasso di sconto composto del 5%. Qual è la somma scontata e di quale sconto ha usufruito Marco?

Sappiamo che:  $C = 3000$      $i = 0,05$      $t = 2$  anni    vogliamo calcolare  $V$  e  $S_{cp}$ .

Per trovare la somma scontata applichiamo la formula

$$V = C(1 + i)^{-t}: \quad V = 3000(1 + 0,05)^{-2} = 2721,09(\text{€})$$

Lo sconto è la differenza  $C - V$ :  $S_{cp} = 3000 - 2721,09 = 278,91(\text{€})$

**194** Calcola il valore attuale di:

- a. un capitale di € 4 500, scontato al tasso del 3% annuo, 3 anni prima della scadenza [€ 4118,14]
- b. un capitale di € 7 400, scontato al tasso del 4,5% annuo, 1 anno e 8 mesi prima della scadenza [€ 6876,56]
- c. un capitale di € 23 000, scontato al tasso del 4,3% annuo, 1 anno e 3 mesi prima della scadenza [€ 21820,89]
- d. un capitale di € 1 500, scontato al tasso del 2% annuo, 1 anno e 4 mesi prima della scadenza [€ 1460,91]
- e. un capitale di € 6 500, scontato al tasso del 2% semestrale, 4 anni prima della scadenza [€ 5547,69]
- f. un capitale di € 2 500, scontato al tasso del 3% trimestrale, 1 anno prima della scadenza. [€ 2221,22]

**195** Calcola il valore attuale del capitale  $C$ , pagato 11 mesi prima della scadenza, nei seguenti casi:

- a.  $C = 2000(\text{€})$ , tasso di sconto composto annuo del 3% [€ 1946,54]
- b.  $C = 1500(\text{€})$ , tasso di sconto composto trimestrale dell'1,3% [€ 1430,62]
- c.  $C = 2600(\text{€})$ , tasso di sconto composto semestrale del 2% [€ 2507,30]
- d.  $C = 1800(\text{€})$ , tasso di sconto composto del 2,5% quadrimestrale. [€ 1681,83]

**196** Un debito di € 1 400 scade fra due anni. Se lo paghiamo oggi, otteniamo uno sconto composto al tasso annuo del 6,5%. Quanto dobbiamo pagare? [€ 1234,32]

**197** Determina quanto si deve pagare per saldare anticipatamente un debito di € 4 700, che scade fra 1 anno e 4 mesi, al quale è stato applicato lo sconto composto al tasso annuo del 5,5%. [€ 4376,17]

*Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo del capitale in regime di sconto composto.*

**198** Con la somma di € 4 395,50 saldi oggi un debito che scade fra 2 anni e sul quale viene applicato lo sconto composto del 4,5% annuo. Determina l'entità del debito. [€ 4800]  
(Suggerimento: utilizza la formula  $V = C(1 + i)^{-t}$  e ricava  $C$ )

**199** Calcola il valore del capitale sapendo che:

- a. 2 anni prima della scadenza, al tasso di sconto composto del 3% annuo, ha un valore di € 2 827,79 [€ 3000]
- b. 2 anni e 6 mesi prima della scadenza, al tasso di sconto composto del 5% annuo, ha un valore di € 3 983,27 [€ 4500]
- c. 1 anno e 6 mesi e 15 giorni prima della scadenza, al tasso di sconto composto del 2,5% annuo, ha un valore di € 9 626,48 [€ 10000]
- d. 3 anni prima della scadenza, al tasso di sconto composto del 3% semestrale, ha un valore di € 10 049,81 [€ 12000]
- e. 2 anni e 3 mesi prima della scadenza, al tasso di sconto composto del 2% trimestrale, ha un valore di € 5 857,29 [€ 7000]
- f. 3 anni e 8 mesi prima della scadenza, al tasso di sconto composto del 3,2% semestrale, ha un valore di € 5 873,73. [€ 7400]

**200** Se si accetta il pagamento anticipato di due crediti, che scadono rispettivamente il primo fra 4 mesi e il secondo fra 1 anno e 11 mesi, applicando lo sconto composto al tasso annuo del 6,75%, si ottiene una somma complessiva di € 7 214,66. Determina l'importo dei due crediti, sapendo che la differenza fra il secondo e il primo è di € 1 850. [€ 3000; € 4850]

Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo del tasso di sconto in regime di sconto composto.

**201** Tra 4 anni devi pagare € 20000, ma puoi estinguere oggi il debito con la somma di €17769,74. A quale tasso di sconto composto annuo è stata fatta l'operazione? [3%]  
(Suggerimento: applica la formula  $V = C(1 + i)^{-t}$  e risolvi l'equazione in  $i$  ottenuta ricorrendo ai radicali)

**202** Calcola il tasso di sconto nei seguenti casi.

**a.** Si deve pagare fra 3 anni un capitale di € 7000, ma viene pagato oggi con € 6222,97; trova il tasso annuo. [4%]

**b.** Si deve pagare fra 5 anni un capitale di € 30 000, ma viene pagato oggi con € 26 645,35; trova il tasso semestrale. [1,2%]

**c.** Si deve pagare fra 2 anni un capitale di € 5 000, ma viene pagato oggi con € 4 655,63; trova il tasso quadrimestrale. [1,2%]

**d.** Si deve pagare fra 3 anni un capitale di € 5 500, ma viene pagato oggi con € 4 654,87; trova il tasso trimestrale. [1,4%]

**e.** Si deve pagare fra 4 anni e 6 mesi un capitale di € 6200, ma viene pagato oggi con € 4 168,97; trova il tasso semestrale. [4,5%]

**f.** Si deve pagare fra 1 anno, 4 mesi e 15 giorni un capitale di € 25 000, ma viene pagato oggi con € 23 500,87; trova il tasso annuo. [4,6%]

**203** Oggi con € 7515,22 posso pagare un debito di € 8000 che scade fra un 1 anno e 120 giorni. Calcola il tasso di sconto composto applicato all'operazione finanziaria. [4,8%]

**204** Devi pagare fra 5 anni la somma di € 12000. Oggi hai l'opportunità di pagare la metà del debito con € 4931,56; calcola il tasso annuo di sconto composto. [4%]

**205** Dieci anni fa è stato prestato il capitale di € 8000, al tasso annuo composto del 10%, per 15 anni. Oggi si chiede che il debito venga pagato anticipatamente con la somma di € 22743,72. Quale tasso annuo di sconto composto è stato applicato? [8%]

Risolvi i seguenti problemi dove si richiede il calcolo del tempo di anticipo in regime di sconto composto.

**206** Estinguendo anticipatamente un debito di € 15 000, otteniamo uno sconto di € 250. Calcola il tempo di anticipazione se il tasso di sconto composto è del 5% annuo. [4 mesi 4 giorni]  
(Suggerimento: applica la solita formula  $V = C(1 + i)^{-t}$ ; per risolvere l'equazione in  $t$  ottenuta devi ricorrere ai logaritmi decimali)

**207** Calcola il tempo di scadenza nei seguenti casi.

**a.** Credito di € 20 000, pagato oggi con la somma di € 19 043,13, al tasso di sconto composto del 4% annuo. [1a 3m]

**b.** Credito di € 8 000, pagato oggi con la somma di € 7113,99, al tasso di sconto composto del 4,5% annuo. [2a 8m]

**c.** Credito di € 10 000, pagato oggi con la somma di € 9 345,79, al tasso di sconto composto del 2% annuo. [3a 5m]

**d.** Credito di € 12 000, pagato oggi con la somma di € 10 868,77, al tasso di sconto composto semestrale del 2%. [2a 6m]

**e.** Credito di € 10 000, pagato con uno sconto di € 5 253,58, al tasso di sconto composto trimestrale del 4%. [4a 1m 7g]

**208** Calcola la scadenza di un credito di € 17000 che è pagato oggi con la somma di € 13633,18, sapendo che il tasso di sconto composto è stato del 6% annuo. [3a 9m 14g]

**209** Sapendo che cedendo oggi un credito di € 23000, al tasso di sconto composto del 7% annuo si perde una somma di € 5650,16, calcola quanto tempo prima il credito viene ceduto. [4a 2m]



## ESERCIZI RIASSUNTIVI SUI REGIMI DI SCONTO

**210** Fra due mesi avrei dovuto ricevere la somma di € 2000 e fra 8 mesi la somma di € 3300. Decido di accettare la proposta di pagamento fattami dal debitore che oggi mi restituisce la somma di € 5199,40. Se sul primo capitale è stato applicato lo sconto razionale al tasso di sconto del 4,5% annuo, quale tasso di sconto razionale è stato applicato alla seconda somma? [4%]

**211** Puoi anticipare il pagamento di due debiti:

- il primo di € 2700 con scadenza fra 2 anni e 9 mesi
- il secondo di € 3200 con scadenza fra 1 anno e 20 giorni.

Calcola quanto complessivamente devi pagare, sapendo che su entrambi i debiti è stato applicato lo sconto semplice al tasso del 9% annuo per il primo debito e dell'8% annuo per il secondo.

[€ 5115,15]

**212** Hai due crediti: il primo scade fra 1 anno 4 mesi e 20 giorni; il secondo, pari al doppio del primo, scade fra 3 anni. Determina il valore dei due crediti, tenendo presente che, se li cedessi entrambi oggi, il loro valore complessivo, calcolato al tasso di sconto razionale semestrale del 3,8%, sarebbe di € 8866.

[€ 3500; € 7000]

**213** Hai presentato due cambiali allo sconto: la prima di € 31000 con scadenza a 7 mesi, la seconda di € 17000 con scadenza a 2 anni e 4 mesi. Determina i due tassi di sconto, sapendo che hai ottenuto complessivamente € 45007,71 e che il tasso di sconto semplice applicato al primo effetto è stato di due punti percentuali superiore a quello applicato al secondo. [7%; 5%]

**214** Per aver scontato razionalmente al tasso annuo dell'11% due effetti, il primo di € 8500 e il secondo di € 8900, hai incassato € 14593,30. Determina la scadenza dei due effetti, sapendo che il primo aveva una scadenza superiore di 40 giorni rispetto al secondo. [1a 9m 20g; 1a 8m 10g]

**215** Hai estinto anticipatamente, al tasso di sconto commerciale del 7%, due debiti che scadevano entrambi fra 11 mesi, pagando € 9826,25. Determina l'importo dei due debiti sapendo che il primo ha un importo superiore di € 2500 rispetto al secondo. [€ 4000; € 6500]

**216** Hai due crediti che scadono in tempi diversi: il primo è di € 5000 e scade fra 5 mesi, il secondo è di € 6500. Applicando a entrambi lo sconto commerciale al tasso annuo del 2,7%, oggi ricavi complessivamente € 11223,88. Quando scadeva il secondo credito? [1a 3m 1g]

**217** Con la somma di € 5700, paghi anticipatamente un credito di € 2000 che scade fra 2 anni e 4 mesi e un credito di € 4000 che scade fra 8 mesi e 15 giorni. Calcola il tasso di sconto commerciale applicato. [4%]

**218** Hai due debiti, il primo di € 4300 con scadenza fra 4 mesi, il secondo di € 1250 con scadenza fra 1 anno e 10 giorni. Decidi di estinguerli oggi, con sconto commerciale, pagando complessivamente la somma di € 5367,65. Se le scadenze fossero state invertite, avresti potuto versare € 114,06 in meno. Calcola i tassi di sconto applicati. [6%; 7,5%]

**219** Si vuole sapere se, per un capitale di € 6000 che scade fra 45 giorni, è più conveniente per il creditore applicare lo sconto razionale o lo sconto commerciale sapendo che il tasso applicato, uguale per entrambe le operazioni, è del 2% annuo. [ $S_r = 14,96(\text{€})$ ;  $S_c = 15(\text{€})$ ; sconto razionale]

**220** Con la somma di € 8339,64, puoi saldare due vecchi debiti con scadenza rispettivamente:

- il primo fra 1 anno e 4 mesi
- il secondo fra 2 anni 7 mesi e 15 giorni.

Il primo debito è di € 4000 e su entrambi è stato applicato un tasso di sconto composto annuo del 3,8% annuo. Qual è l'importo del secondo debito? [€ 5000]

- 221** Devi scontare due capitali, il primo di € 3 400 con scadenza fra 3 anni e 5 mesi ed il secondo di € 7 600 con scadenza fra 5 anni e 10 mesi. Quale fra le seguenti ipotesi è la più favorevole?
- Al primo capitale viene applicato lo sconto razionale al tasso annuo del 7,35%, mentre al secondo viene applicato lo sconto composto al tasso annuo del 7%.
  - Ad entrambi viene applicato lo sconto composto al tasso annuo del 7%.
  - Ad entrambi viene applicato lo sconto razionale al tasso semestrale del 4,2%. [€ 7839,18; caso a.]
- 222** Un credito di € 10 000 scade fra 4 anni 9 mesi e 3 giorni. Sapendo che oggi, in regime di sconto composto, il suo valore attuale è di € 6 557,5, determina il tasso quadrimestrale di sconto. Determina poi il periodo di tempo necessario per ottenere lo stesso valore attuale, con lo stesso tasso, supponendo di operare in regime di sconto semplice. [3%; 5a 10m]
- 223** Se si applica lo sconto composto ad un capitale di € 24 600 con scadenza fra 1 anno e 7 mesi, si ottiene la somma di € 21 480. Se invece di applicare lo sconto composto si applicasse lo sconto commerciale, quale tasso si dovrebbe applicare per avere la stessa somma? [8%]
- 224** Un debito di € 6 000 scade fra 2 anni e 6 mesi. Oggi con € 5 175,50, si paga anticipatamente il debito. Calcola il tasso semestrale applicato sia in regime di sconto commerciale sia in regime di sconto composto. [2,75%; 3%]
- 225** Oggi vengono pagati anticipatamente due crediti, il primo di € 5 000 che scadeva fra 6 mesi e 10 giorni e il secondo di € 6 300 che scadeva tra 1 anno e 4 mesi. Nella prima operazione è stato applicato lo sconto commerciale al tasso annuo dell'8%, mentre per la seconda operazione lo sconto composto al tasso annuo del 7,5%. Quanto si incassa? Quale tasso annuo di sconto composto si deve applicare al primo capitale se si vuole ottenere lo stesso valore attuale? [€ 10 509,77; 8,52%]
- 226** Hai la possibilità di pagare anticipatamente un debito di € 40 000 che scade fra 2 anni e 6 mesi scegliendo fra due ipotesi diverse:
- applicazione di un tasso di sconto semplice del 2,75% annuo e spese varie per € 150
  - applicazione del tasso di sconto composto del 2% annuo senza ulteriori spese.
- Qual è l'ipotesi migliore? Calcola il tasso composto effettivo della prima ipotesi. [prima; 2,53%]
- 227** Due anni e 6 mesi fa hai investito un certo capitale al tasso semestrale del 3,55% e oggi ritiri € 3 387,10. Quale somma hai investito? Usi poi la somma realizzata per saldare un debito di € 3 800 anticipando il pagamento di 2 anni e 8 mesi. A quale tasso annuo di sconto razionale è stata fatta quest'ultima operazione finanziaria? [€ 2 844,97; 12,59%]

## I TASSI EQUIVALENTI

la teoria è a pag. 21

### RICORDA

- Due tassi di interesse si dicono equivalenti in un certo regime finanziario se, applicati allo stesso capitale, per la medesima durata, danno lo stesso montante.

Le relazioni che permettono di passare da un tasso ad un altro ad esso equivalente sono:

- in regime di interesse semplice:  $i = i_k \cdot k$  e reciprocamente  $i_k = \frac{i}{k}$
- in regime di interesse composto:  $i = (1 + i_k)^k - 1$  e reciprocamente  $i_k = \sqrt[k]{1 + i} - 1$

La relazione  $1 + i = (1 + i_k)^k$  che sintetizza le due precedenti prende il nome di **formula dei tassi equivalenti**.

## Comprensione

- 228** Barra vero o falso.
- a. In regime di interesse semplice il tasso annuo del 6% è equivalente al tasso trimestrale del 2%. V F
- b. In regime di interesse composto il tasso annuo del 12% è equivalente ad un tasso semestrale del 6%. V F
- 229** In regime di interesse composto il tasso annuo dell'8% è equivalente al tasso semestrale del:
- a. 3,239%                      b. 3,923%                      c. 4%                              d. 4,2%
- 230** In regime di interesse composto il tasso annuo dell'8% è equivalente al tasso trimestrale del:
- a. 1,934%                      b. 2,3%                              c. 2%                              d. 1,943%
- 231** In regime di interesse composto il tasso annuo del 7,65% è equivalente al tasso quadrimestrale del:
- a. 1,913%                      b. 2,488%                      c. 2,884%                      d. 2,448%

## Applicazione

*Risolvi in regime di interesse semplice.*

### 232 ESERCIZIO GUIDA

Dato il tasso di interesse annuo del 3%, calcoliamo il tasso semestrale equivalente in regime di interesse semplice.

Conosciamo  $i = 0,03$ , dobbiamo calcolare il tasso semestrale equivalente  $i_2$  applicando la formula

$$i_k = \frac{i}{k} \text{ con } k = 2 :$$

$$i_2 = \frac{0,03}{2} = 0,015 \quad \text{che corrisponde a un tasso semestrale dell'1,5\%}.$$

**233** Converti i seguenti tassi applicando opportunamente le formule in capitalizzazione semplice:

- a.  $i_3 = 0,012$                       trova  $i$  e  $i_2$   
b.  $i = 3,2\%$                         trova  $i_2$  e  $i_4$   
c.  $i_4 = 0,8\%$                         trova  $i_3$  e  $i$   
d.  $i_2 = 0,035$                         trova  $i$  e  $i_6$   
e.  $i = 0,025$                         trova  $i_3$  e  $i_6$

**234** Dato il tasso di interesse annuo del 5%, calcola il tasso trimestrale equivalente. [1,25%]

**235** Dato il tasso di interesse annuo del 2%, calcola il tasso mensile equivalente. [0,17%]

**236** Dato il tasso di interesse annuo del 6%, calcola il tasso quadrimestrale equivalente. [2%]

*Risolvi in regime di interesse composto.*

### 237 ESERCIZIO GUIDA

Dato il tasso di interesse annuo del 5%, calcoliamo il tasso quadrimestrale equivalente in regime di interesse composto.

Conosciamo  $i = 0,05$ , dobbiamo calcolare  $i_3$  con la formula  $i_k = \sqrt[k]{1+i} - 1$  con  $k = 3$  :

$$i_3 = \sqrt[3]{1+0,05} - 1 = 0,0164 \quad \text{che corrisponde a un tasso quadrimestrale dell'1,64\%}.$$

- 238** Dato il tasso di interesse annuo del 3%, calcola il tasso quadrimestrale equivalente. [0,99%]
- 239** Dato il tasso di interesse annuo del 2,3%, calcola il tasso mensile equivalente. [0,19%]
- 240** Dato il tasso di interesse annuo del 5,6%, calcola il tasso trimestrale equivalente. [1,37%]
- 241** Dato il tasso di interesse trimestrale del 2,3%, calcola il tasso annuo equivalente. [9,52%]
- 242** Dato il tasso di interesse quadrimestrale del 4,3%, calcola il tasso annuo equivalente. [13,46%]
- 243** Dato il tasso di interesse bimestrale dello 0,24%, calcola il tasso annuo equivalente. [1,45%]
- 244** Investi in capitalizzazione composta semestrale la somma di € 6 525,49 al tasso del 4% annuo nominale convertibile semestralmente. Quanto realizzerai fra 6 mesi? Il risultato cambia se si opera in capitalizzazione semplice? [€ 6 656; no]
- 245** Calcola il montante ottenuto dall'impiego in capitalizzazione composta trimestrale per 3 trimestri di € 8 000 al tasso del 6% annuo nominale convertibile trimestralmente. [€ 8 365,43]
- 246** Determina l'ammontare di un capitale che, in capitalizzazione composta semestrale, al tasso annuo nominale convertibile semestralmente del 8,46%, ha prodotto dopo 3 anni un montante di € 5 385,25. [€ 4 200]
- 247** Calcola la somma inizialmente investita in capitalizzazione composta quadrimestrale, sapendo che, dopo 5 anni, il montante ottenuto è di € 6 828,98 e che è stato applicato un tasso annuo convertibile quadrimestralmente del 6,3%. [€ 5 000]
- 248** Determina il montante, in capitalizzazione composta semestrale, per un periodo di 6 anni e 3 mesi e al tasso del 6% annuo convertibile semestralmente, di un capitale di € 10 000. Calcola a quale tasso annuo deve essere impiegato lo stesso capitale per ottenere in capitalizzazione annua, lo stesso montante. [€ 14 469,89; 6,09%]
- 249** Hai depositato la somma di € 7 000 presso un istituto di credito che capitalizza annualmente al tasso del 3% annuo composto. Calcola il montante che puoi ottenere dopo 5 anni e 6 mesi e a quale tasso trimestrale dovresti impiegare lo stesso capitale per ottenere lo stesso montante. [€ 8 235,74; 0,74%]
- 250** Diana ha depositato per 6 anni e 2 mesi una certa somma al tasso annuo nominale convertibile quadrimestralmente del 5,25%. Sapendo che lo stesso capitale, impiegato al tasso annuo nominale convertibile trimestralmente del 6%, le avrebbe permesso di ottenere nello stesso tempo un montante superiore di € 261,30, calcola la somma depositata. [€ 3 999,94]
- 251** Un capitale è investito al tasso annuo nominale convertibile semestralmente del 7,74%; un secondo capitale pari al triplo del primo è stato impiegato al tasso annuo nominale convertibile trimestralmente del 6,20%; un terzo capitale maggiore del secondo di € 1 500 è stato impiegato al tasso annuo nominale convertibile quadrimestralmente del 9,45%. Sapendo che dopo 3 anni e 7 mesi il montante complessivo è di € 25 193,11, calcola l'importo dei tre capitali. [€ 2 500; € 7 500; € 9 000]
- 252** Nove anni fa Cristina versò in banca una determinata somma; dopo tre anni e due mesi versò una somma pari al doppio della prima; dopo altri 2 anni e 8 mesi, versò una somma pari a un quarto delle somme già versate. Per gli impieghi dei tre capitali è stata operata la capitalizzazione semestrale composta al tasso annuo nominale convertibile semestralmente del 4,2%. Calcola l'importo del primo capitale versato sapendo che il montante ottenuto ad oggi è di € 14 573,81. [€ 3 000]
- 253** Hai a disposizione una somma  $S$  che decidi di impiegare nel seguente modo:  $\frac{1}{5}S$  al tasso trimestrale composto del 1,5%,  $\frac{2}{3}S$  al tasso quadrimestrale del 2,85% e la restante parte al tasso semestrale del 5,05%. Dopo 7 anni e 5 mesi, ritiri un montante complessivo pari a € 27 506,70. Calcola:

- a. il valore della somma  $S$  [€ 15000]  
 b. il tasso annuo equivalente al quale è stata impiegata  $S$ . [8,52%]

**254** Tre anni e 10 mesi fa Giacomo ha impiegato i seguenti capitali:  
 • € 7300 al tasso annuo nominale convertibile del 4,4% in capitalizzazione composta trimestrale  
 • € 3800 al tasso trimestrale del 2,45% in capitalizzazione composta trimestrale.  
 Calcola il montante complessivo oggi a disposizione di Giacomo. [€ 14140,90]

**255** Hai a disposizione tre somme che decidi di impiegare in tempi diversi. Dopo un primo versamento iniziale, ne fai un secondo, dopo 1 anno e 4 mesi, pari al triplo del primo e infine, dopo altri 3 anni e 4 mesi, un terzo versamento pari alla metà del secondo. Calcola l'importo dei tre capitali in oggetto sapendo che, dopo 8 anni e 6 mesi, il montante ottenuto è di € 32498,65 ed il tasso annuo applicato in capitalizzazione composta trimestrale è stato del 2%. [€ 3500; € 10500; € 5250]

## APPROFONDIMENTI LA SCINDIBILITÀ DELLE LEGGI FINANZIARIE

### RICORDA

- Una legge finanziaria di capitalizzazione è scindibile quando si ottiene lo stesso montante capitalizzando, alle stesse condizioni, da un tempo  $t_0$  a un tempo  $t_1$  e poi dal tempo  $t_1$  al tempo  $t_2$ , oppure direttamente dal tempo  $t_0$  al tempo  $t_2$ .
- Una legge finanziaria di attualizzazione è scindibile quando si ottiene lo stesso valore attuale scontando, alle stesse condizioni, da un tempo  $t_2$  a un tempo  $t_1$  e poi dal tempo  $t_1$  al tempo  $t_0$ , oppure direttamente dal tempo  $t_2$  al tempo  $t_0$ .

- 256** Completa le seguenti affermazioni inserendo "è" oppure "non è":
- a. in regime di interesse semplice la legge di capitalizzazione ..... scindibile
  - b. in regime di sconto semplice la legge di attualizzazione ..... scindibile
  - c. in regime di sconto commerciale la legge di attualizzazione ..... scindibile
  - d. in regime di interesse composto la legge di capitalizzazione ..... scindibile
  - e. in regime di sconto composto la legge di attualizzazione ..... scindibile.

**257** Barra vero o falso.

Se una legge finanziaria è scindibile:

- a. il montante non viene alterato anche se viene frazionato il tempo di impiego
- b. il montante non viene alterato anche se si varia il tasso di interesse
- c. il valore attuale si altera frazionando il tempo di impiego.

V F  
 V F  
 V F

*Risolvi i seguenti problemi sulla scindibilità.*

**258** Le seguenti relazioni sono le equazioni risolventi di un problema  
 $M_1 = 2000(1 + 0,07)^{12}$        $M_2 = 2000(1 + 0,07)^8(1 + 0,07)^4$   
 In che regime finanziario stiamo operando? Senza effettuare calcoli cosa puoi dire di  $M_1$  e  $M_2$ ?

**259** Osserva ora queste altre due relazioni  
 $M_1 = 2000(1 + 0,07 \cdot 12)$        $M_2 = 2000(1 + 0,07 \cdot 8) \cdot (1 + 0,07 \cdot 4)$   
 In che regime finanziario stiamo operando? Senza effettuare nessun calcolo cosa puoi dire di  $M_1$  e  $M_2$ ?

**260** Un capitale di € 1 000 viene impiegato in un'operazione finanziaria della durata di 8 anni al tasso annuo composto del 3%; un secondo capitale, anch'esso di € 1 000, viene impiegato per 3 anni alle stesse condizioni, riscosso alla scadenza e subito reimpiegato per altri 5 anni. Verifica che i montanti dei due capitali sono uguali.

**261** Verifica che il montante di un capitale di € 4 000, impiegato in un'operazione finanziaria a interesse semplice per 1 anno e 8 mesi al tasso annuo del 3,4%, è diverso dal montante che si ottiene dall'impiego di un secondo capitale di € 4 000 per 1 anno, riscosso e reimpiegato immediatamente alle stesse condizioni per altri 8 mesi.

## L'EQUIVALENZA FINANZIARIA

la teoria è a pag. 26

### RICORDA

■ Diciamo che due capitali  $C_1$  e  $C_2$  sono finanziariamente equivalenti, in un dato regime, se fissata un'origine dei tempi e i tempi  $t_1$  e  $t_2$ , possedere  $C_1$  al tempo  $t_1$  o  $C_2$  al tempo  $t_2$  è indifferente dal punto di vista economico.

### Applicazione

*Risolvi i seguenti problemi sul calcolo del capitale unico.*

**262** Hai contratto tre debiti: il primo, di € 1 000, scade fra 1 anno; il secondo, di € 1 500, scade fra 4 anni; il terzo, di € 4 000, scade fra 7 anni. Col creditore stabilisci di estinguere tutti i debiti versando un'unica somma fra 3 anni. Determina la somma da versare nella duplice ipotesi che venga applicato:

a. interesse semplice e sconto razionale al tasso annuo del 4% [€ 5 970,58]

b. interesse composto e sconto composto al tasso annuo del 3,5%. [€ 6 006,27]

**263** Devi pagare 3 cambiali: la prima, di € 800, scade fra 2 anni; la seconda, di € 1 500, scade fra 5 anni; la terza, di € 4 100, scade fra 8 anni. Decidi di sostituire i tre effetti con uno solo con scadenza tra 3 anni. Calcola l'importo della nuova cambiale nell'ipotesi che il tasso annuo composto applicato sia del 4,5%.

[€ 5 499,64]

**264** Devi versare le seguenti somme: € 5 600 fra 1 anno, € 1 950 fra 2 anni, € 1 600 fra 7 anni e € 4 500 fra 9 anni. Ti accordi col creditore per pagare l'intero debito con un solo versamento fra 5 anni. Calcola la somma da versare sapendo che il tasso composto applicato è del 5% annuo.

[€ 14 217,61]

*Risolvi i seguenti problemi sulla scadenza comune.*

**265** Hai contratto tre debiti, rispettivamente di € 5 000 con scadenza a 1 anno, € 2 500 con scadenza a 3 anni, € 1 200 con scadenza a 6 anni. Vuoi pagare tali debiti con la somma di € 9 000. Se viene applicato il tasso annuo composto del 4,6%, a quale epoca potrai fare il saldo?

[2a 11m 13g]

**266** Si deve ottenere il pagamento di due crediti, il primo di € 6 000 che scade fra 3 anni, il secondo di € 3 700 che scade fra 6 anni. Il debitore propone di pagarli entrambi con un unico effetto dell'importo di € 8 000. Quando si potrà fare tale operazione, se è stato applicato un tasso semestrale composto del 3%?

[9m 26g]

**267** Giorgio ha diritto ad esigere i seguenti crediti: € 1 400 fra 1 anno e 10 mesi, € 8 200 fra 6 anni e 4 mesi, € 9 300 fra 9 anni. Si accorda con il debitore per saldare i debiti con un unico pagamento di € 14 000. Le operazioni sono fatte in capitalizzazione composta ad un tasso annuo convertibile semestralmente del 5%. Quando Giorgio riceverà la somma concordata?

[1a 1m 17g]

*Risolvi i seguenti problemi sulla scadenza media.*

**268** Qual è la scadenza media di tre debiti di € 1650, € 2500 e € 2850, che scadono rispettivamente tra 2 anni, tra 4 anni e tra 6 anni se il tasso composto applicato è del 4% annuo? [4a 3m 16g]

**269** Ti sei impegnato a versare le seguenti somme: € 1500 fra 3 anni e 6 mesi, € 2400 fra 6 anni, € 3800 fra 10 anni. Ti accordi col creditore per saldare gli importi con un unico pagamento al tasso annuo composto del 4%. Calcola la scadenza media. [7a 4m 6g]

**270** Si devono pagare nei prossimi anni tre somme. Sappiamo che:

- ogni somma supera la precedente di € 500
- le scadenze sono rispettivamente a 3, a 4 e a 5 anni
- la scadenza unica a cui effettuare il pagamento è fra 4 anni e 21 giorni
- il tasso applicato è del 4% annuo in capitalizzazione composta.

Calcola l'importo dei tre capitali.

[€ 4173,53; € 4673,53; € 5173,53]

*Risolvi i seguenti problemi sulla sostituzione dei pagamenti.*

**271** Devi riscuotere € 14000 fra 6 anni. Il debitore propone di suddividere il debito in tre parti uguali da pagarsi rispettivamente tra 2, 3, 5 anni. Se concedi tale sostituzione al tasso annuo composto del 5%, quanto riceverai ogni volta? [€ 4089,82]

**272** Devi pagare € 20000 fra 7 anni. Ottieni di estinguere il debito con due versamenti, di cui il primo pari a  $\frac{2}{3}$  del secondo, tra 3 e 5 anni rispettivamente. Se l'operazione è fatta al tasso annuo composto del 7%, a quanto ammontano i versamenti? [€ 6604,70; € 9907,05]

**273** Per l'acquisto di una macchina per la lavorazione del legno che costa € 79520, si ottiene di pagare € 45000 fra tre anni e € 50000 fra 6 anni. A quale tasso annuo di interesse composto è stata fatta l'operazione? [4%]

*Risolvi i seguenti problemi sul tasso medio d'impiego.*

**274** Otto anni e sei mesi fa hai impiegato i seguenti capitali: € 2400 al tasso annuo del 4%, € 3600 al tasso semestrale del 2,5%, € 4200 al tasso trimestrale dell'1%. A quale tasso medio annuo avresti dovuto investire il capitale complessivo per ottenere oggi lo stesso montante in regime di interesse composto? [4,39%]

**275** Un capitale di € 19000, impiegato a interesse semplice per 5 anni, ha subito le seguenti variazioni:

- 9% tasso iniziale annuo
- 8,5% tasso annuo applicato dopo 1 anno e 8 mesi dall'inizio dell'investimento
- 7,15% tasso annuo applicato dopo 2 anni e 6 mesi dall'inizio dell'investimento e mantenuto fino al termine dell'operazione.

Qual è stato il tasso annuo medio?

[7,99%]

**276** Un capitale di € 23000 è impiegato a interesse composto per 6 anni al tasso annuo del 7%. Dopo un anno il tasso viene portato al 6,25% e dopo ulteriori 2 anni al 6,8%. Qual è il tasso annuo medio, se nell'ultimo anno il tasso ha subito una ulteriore variazione e si è portato al 7,2% annuo? [6,7%]

**277** Calcola il tasso semestrale medio applicato a un capitale € 27000 impiegato in capitalizzazione composta semestrale per 15 anni, che ha subito le seguenti variazioni:

- 4% tasso semestrale iniziale
- 3,85% tasso semestrale applicato dopo 3 anni dall'inizio dell'investimento



- 3,55% tasso semestrale applicato dopo 6 anni dall'inizio dell'investimento
- 3,2% tasso semestrale applicato dopo 10 anni dall'inizio e fino al termine dall'investimento. [3,58%]

**278** Hai ottenuto € 26126,92 da un investimento fatto 7 anni fa in capitalizzazione composta semestrale. Nel periodo considerato il tasso semestrale è stato del 5% per i primi 2 anni e 5 mesi, successivamente è passato al 5,25% e negli ultimi 3 anni è sceso al 5,15%. Calcola:

a. il capitale inizialmente investito [€ 12985]

b. il tasso semestrale medio applicato per ottenere lo stesso montante. [5,12%]

## ESERCIZI RIASSUNTIVI

**279** Cinque anni fa hai depositato un certo capitale a tasso annuo semplice del 2%. L'interesse che ottieni oggi è uguale a quello ottenuto dalla capitalizzazione semplice di € 10000 per 4 anni al tasso annuo del 4%. Calcola il capitale depositato 5 anni fa. [€ 16000]

**280** Hai investito per 11 anni una determinata somma. Durante il primo periodo il tasso annuo nominale convertibile quadrimestralmente era del 9%, dopo 2 anni è sceso al 2,8% quadrimestrale e per gli ultimi 3 anni il tasso è stato del 7,5% annuo. Sapendo che il montante finale calcolato in capitalizzazione composta quadrimestrale è stato di € 18288,84, calcola il capitale inizialmente investito. [€ 7500]

**281** Devi decidere come investire la somma di € 5100. Hai due possibilità:

a. capitalizzazione composta semestrale degli interessi al tasso annuo del 7%

b. capitalizzazione composta quadrimestrale al tasso quadrimestrale dell'1,75%.

Stabilisci qual è la scelta economicamente più conveniente per un investimento della durata di 5 anni. [a. € 715,30; b. € 6615,86; il primo investimento]

**282** Porti allo sconto, ad un tasso di sconto razionale del 2,4% annuo, due effetti, il primo di € 5600 che scade fra 1 anno e 8 mesi e il secondo di € 3900 che scade fra 4 mesi; investi poi la somma realizzata in capitalizzazione composta semestrale. Se dopo due anni da questa operazione vuoi ottenere € 9821,50, a quale tasso annuo nominale convertibile semestralmente devi investire il denaro? [3%]

**283** Oggi vengono pagati anticipatamente due crediti, il primo di € 5000 con scadenza a 3 anni e 2 mesi, il secondo di € 7200 con scadenza a 4 anni e 8 mesi, entrambi con sconto composto al tasso annuo del 2,5%. Investi la somma realizzata in capitalizzazione quadrimestrale al tasso annuo nominale convertibile quadrimestralmente del 4,2%. Quale montante avrai fra 2 anni? [€ 12000,73]

**284** Hai diritto a incassare tre somme: la prima di € 2500 con scadenza a 1 anno e 3 mesi, la seconda di € 1700 con scadenza a 200 giorni e la terza di € 7600 con scadenza a 7 mesi e 20 giorni. Presenti allo sconto le tre somme che vengono scontate al tasso composto semestrale del 7%. Investi quindi quanto realizzato in una operazione che garantisce una capitalizzazione composta trimestrale al tasso annuo nominale convertibile trimestralmente dell'8% per i primi 2 anni e dell'8,8% per gli anni successivi. Dopo 5 anni quale somma avrò a disposizione? [€ 16214,53]

**285** Bianca impiega la somma di € 5200 in capitalizzazione composta semestrale per 4 anni e 4 mesi al tasso semestrale del 4,5%. Oggi ritira il montante accumulato e lo reinveste in capitalizzazione composta trimestrale per 2 anni e 9 mesi al tasso trimestrale del 2,05%. Determina il montante al termine dell'operazione ed il tasso annuo effettivo a cui è stato impiegato il capitale. [€ 9519,65; 8,91%]

**286** Tre anni fa hai contratto un debito di € 5000 della durata di 4 anni al tasso di interesse composto dello 0,6% trimestrale; oggi decidi di riscattare il debito e ti viene applicato il tasso di sconto composto del 2,42% annuo. Determina quale somma devi pagare oggi e verifica che tale capitale coincide (a meno di approssimazioni) con il montante del debito iniziale capitalizzato per 3 anni. Se le stesse operazioni



finanziarie fossero fatte in capitalizzazione semplice e con sconto razionale si avrebbe lo stesso risultato? Perché? [€ 5372,21; no, perchè non sono leggi scindibili]

**287** Luigi ha prestato 6 anni fa € 10000 al tasso del 4% annuo in capitalizzazione composta ed ha inoltre fatto i seguenti versamenti presso una banca che capitalizza al tasso trimestrale composto dello 0,9%: € 3000 4 anni fa, € 2500 3 anni fa, € 5000 un anno fa. Inoltre possiede dei BOT con le seguenti scadenze: € 4000 con scadenza fra un anno, € 8000 con scadenza tra 3 anni, € 2000 con scadenza fra tre mesi. Oggi Luigi decide di acquistare un immobile e, avendo bisogno di contanti, ritira tutti i capitali che possiede. Se la banca, tolte le commissioni, valuta i BOT al 3,02% annuo, quale anticipo potrà versare? [€ 37266,62]

**288** Marco ha diritto a riscuotere i seguenti crediti: € 3000 fra un anno e 3 mesi, € 2000 fra un anno e 6 mesi, € 1500 fra 2 anni. Oggi ha stipulato il contratto per l'acquisto di un garage e tra sei mesi dovrà pagare una certa somma; chiede che i crediti gli vengano pagati tutti insieme a tale epoca convenendo un tasso di sconto composto annuo nominale convertibile quadrimestralmente dell'1,2% e chiede una somma di € 6500. Il debitore accetterà? Motiva la tua risposta. [importo che dovrebbe pagare il debitore € 6422,66]

**289** Hai due debiti, il primo che scade fra 3 anni, il secondo, che ha un importo superiore rispetto al primo di € 1000, fra 5 anni. Concordi con il creditore una scadenza media fra 4 anni. Calcola l'importo dei due debiti supponendo che il tasso composto a cui vengono effettuate le operazioni finanziarie è del 5% annuo. [€ 20000,00; € 21000,00]

**290** Giovanni deve riscuotere i seguenti capitali: € 10000 fra 1 anno, € 15000 fra 2 anni, € 12000 fra 4 anni, € 8000 fra 6 anni. Oggi decide di effettuare una operazione finanziaria che ritiene molto redditizia e riscuote i capitali che gli vengono valutati al tasso del 6% annuo nominale convertibile semestralmente. Egli impiega la somma ricavata e dopo due anni riscuote € 45000. Calcola a quale tasso annuo composto è stata fatta quest'ultima operazione.  
Se gli vengono trattenuti € 100 per commissioni e imposte, determina poi:  
**a.** il tasso effettivo annuo di quest'ultima operazione  
**b.** il tasso effettivo annuo nominale convertibile semestralmente di quest'ultima operazione.

[tasso annuo: 9%; a. 8,93%; b. 8,74%]

**291** Per far fronte ad un debito avresti dovuto pagare € 1000 fra 6 mesi, € 2000 fra un anno e € 3000 fra un anno e mezzo. In accordo con il debitore paghi oggi € 4000 e il resto fra 2 anni. Se ti accordi per un tasso di valutazione annuo equivalente al tasso trimestrale dello 0,5%, quale somma dovrai versare fra due anni? [€ 1937,93]

**292** Otto mesi fa hai investito un certo capitale in regime di interesse semplice al tasso di interesse annuo del 5%. Oggi riscuoti il montante e contemporaneamente sconti una cambiale di € 4000, che scade tra 2 mesi al tasso di sconto annuo commerciale del 3%. Complessivamente incassi € 9146,66. Calcola l'importo del capitale investito. [€ 5000]

**293** Si scontano due effetti, il primo di € 8000 al tasso di sconto annuo composto del 6% con un tempo di anticipazione di 1 anno e 2 mesi; il secondo di € 6500 con un tempo di anticipazione di 2 anni. Complessivamente si ottengono € 13244,35. Calcola il tasso di sconto composto trimestrale con cui viene scontato il secondo effetto. [1,5% trimestrale]

**294** Un tale ha acquistato un'auto del valore di € 23000. Il venditore propone due ipotesi di pagamento:

- il 10% del valore del mezzo al momento della firma del contratto, € 10000 dopo 6 mesi e € 12000 dopo un anno
- € 4500 alla stipula del contratto, € 8000 dopo tre mesi e € 11000 dopo sei mesi.

Qual è l'ipotesi più conveniente per il cliente?

(Suggerimento: valuta il tasso a cui vengono effettuate le due operazioni finanziarie)

[tasso annuo della prima operazione: 8,23%, tasso annuo della seconda operazione: 6,99%]

## Per la verifica delle competenze

- 1** Scontiamo presso una banca le seguenti cambiali:
- € 3000, che scade fra 45 giorni, con sconto commerciale al tasso annuo del 6%
  - € 5000, che scade fra 6 mesi, con sconto commerciale al tasso semestrale del 4%
  - € 4000, che scade fra 3 mesi, con sconto semplice al tasso annuo del 5%.
- Investiamo la somma riscossa in capitalizzazione semplice al tasso trimestrale del 2%.  
Di quanto potremo disporre fra un anno? [€ 12666,37]
- 2** Un debito scontato commercialmente al tasso annuo del 5% viene pagato con € 4875. Se il tasso di sconto viene abbassato di un punto percentuale si pagano € 25 in più. Calcola l'importo del debito e la scadenza. [€ 5000; 6 mesi]
- 3** Sei mesi fa hai depositato, in una banca che capitalizza al tasso annuo nominale convertibile trimestralmente del 6%, un capitale di € 2000, 2 mesi fa hai fatto un ulteriore deposito di € 1200. Oggi ritiri il montante ottenuto in capitalizzazione semplice e paghi anticipatamente un debito che avresti dovuto pagare fra 3 mesi e sul quale viene applicato il tasso di sconto semplice del 5,5% annuo. A quanto ammontava il debito? [€ 3316,99]
- 4** Vuoi pagare anticipatamente due debiti, il primo di € 4000 con scadenza tra 4 mesi con sconto semplice del 7% annuo, il secondo che scade fra 6 mesi con sconto semplice al tasso semestrale del 5%. Per far ciò versi oggi € 6289,75. Calcola l'entità del secondo debito. [€ 2500]
- 5** Tre anni prima della scadenza hai ceduto due crediti, il secondo pari ai  $\frac{3}{4}$  del primo, e hai ricevuto € 29839,02. Determina i due capitali sapendo che al primo è stato applicato uno sconto composto annuo del 5% e al secondo uno sconto composto semestrale del 3%. [€ 20000; € 15000]
- 6** Quattro anni fa hai depositato un certo capitale presso una banca che capitalizza al tasso trimestrale composto dello 0,3%. Oggi ritiri il montante e ne utilizzi una parte per anticipare di 6 mesi il pagamento di un debito di € 6000 e sul quale viene applicato il tasso annuo di sconto composto del 5%. Calcola il capitale depositato in banca sapendo che dopo aver saldato il debito ti rimangono € 1488,27. [€ 7000]
- 7** Una azienda di agriturismo ha ristrutturato una cascina; l'impresa edile che ha eseguito i lavori presenta un conto di € 160000. Si concordano i seguenti pagamenti:
- un certo capitale subito
  - un capitale doppio del precedente dopo 6 mesi
  - tre rate da € 20000 rispettivamente dopo 1 anno, 1 anno e 6 mesi e 2 anni.
- Su tutti i pagamenti differiti viene calcolato il tasso annuo composto del 7%. Quanto deve pagare subito l'azienda? L'azienda versa subito all'impresa la somma concordata, ma, passati i 6 mesi, non è in grado di fare il secondo pagamento; chiede quindi una proroga di 3 mesi, che le viene concessa a un tasso di interesse semplice del 10%. All'epoca stabilita, per far fronte agli impegni presi, ciascun socio dell'azienda agricola versa € 2956,60. Quanti sono i soci dell'azienda di agriturismo? [€ 3605617; i soci sono 25]
- 8** Riscuoti sopra la pari un titolo del valore nominale di € 5000 emesso alla pari tre mesi fa e ricavi € 5061,36. Con tale somma paghi un debito di € 2000 contratto un anno fa e sul quale devi pagare l'interesse semplice al tasso del 7% annuo. Depositi la somma che ti rimane in una banca che capitalizza trimestralmente, al tasso di interesse composto trimestrale dell'1,2%. Calcola quanto avrai a disposizione fra tre anni e a quale tasso annuo è stato emesso il titolo.  
(Suggerimento: "sopra la pari" significa che il prezzo di emissione del titolo è superiore rispetto al suo valore nominale; "alla pari" significa uguaglianza tra prezzo di emissione e valore nominale) [€ 3370,94; 4,9%]

Risultati di alcuni esercizi.

- 2 a.**                    **5 a. F, b. V, c. V, d. F**                    **6 c.**                    **7 c.**                    **8 a.**                    **9 c.**                    **10 c.**
- 26 c.**                    **27 c.**                    **28 b.**                    **29 c.**                    **81 c.**                    **82 b.**                    **83 c.**                    **84 b.**
- 140 a. V, b. V, c. V, d. F**                    **141 b.**                    **142 b.**                    **143 c.**                    **144 a.**
- 145** € 45, € 96 000, 3,27%                    **168 a. V, b. F, c. V, d. F, e. V**                    **169 c.**
- 170** € 2205,88, € 294,12; € 5 000, € 4065,04; € 1167,55; 7,5%; € 10500, 1a 9m 3g
- 189 a. F, b. V c. F, d. V**                    **190 b.**                    **191 d.**                    **192** € 942,60; € 2 179,33; € 5 520,40
- 228 a. F, b. F**                    **229 b.**                    **230 d.**                    **231 b.**
- 256 a. non è, b. non è, c. non è, d. è, e. è**                    **257 a. V, b. F, c. F**
- 258** regime di interesse composto  $M_1 = M_2$                     **259** regime di interesse semplice  $M_1 \neq M_2$

# Test finale di autovalutazione

## Sui regimi di interesse semplice e composto

1 A quale delle seguenti frazioni di anno corrisponde un tempo di 2 anni 4 mesi e 12 giorni?

- a.  $\frac{18}{360}$       b.  $\frac{71}{30}$       c.  $\frac{141}{365}$       d.  $\frac{67}{180}$

2 punti

2 Un capitale C produce sia in capitalizzazione semplice che composta lo stesso montante quando:

- a. sia il tasso di interesse che il tempo sono uguali  
b. sia il tasso di interesse che il tempo sono uguali e il tempo è inferiore a un anno  
c. il tasso è lo stesso e il tempo è di un anno  
d. mai.

2 punti

3 L'interesse prodotto da un capitale di € 5 000 al tasso annuo del 4% per 6 mesi, arrotondato all'euro, è uguale a:

- a. in regime di interesse semplice:      ① 100      ② 200      ③ 150  
b. in regime di interesse composto:      ① 80      ② 100      ③ 99

5 punti

4 Il montante prodotto da un capitale di € 800 al tasso trimestrale dell'1%, dopo 8 mesi è uguale a euro:

- a. in capitalizzazione semplice:      ① 864      ② 805,33      ③ 821,33  
b. in capitalizzazione composta:      ① 810,30      ② 821,51      ③ 805,33

5 punti

5 Il montante prodotto da un capitale di € 12000 al tasso quadrimestrale dell'1,5% in regime di interesse composto in 1 anno e 2 mesi è uguale a euro:

- a. 12915,46      b. 12641,90      c. 12562,38      d. una somma diversa dalla precedenti

5 punti

6 Un capitale di € 3800, impiegato in capitalizzazione semplice, produce un interesse di € 80 in 11 mesi. Il tasso annuo utilizzato nell'operazione finanziaria è del:

- a. 2,3%      b. 3,2%      c. 2,4%      d. 2,1%

6 punti

7 Un capitale di € 1800 produce un montante di € 1823,50 al tasso di interesse trimestrale semplice dell'1,5%. Il tempo di durata dell'operazione finanziaria è:

- a. 3m 15g      b. 1a 2m      c. 2m 25g      d. 2m 18g

6 punti

8 In capitalizzazione composta, un capitale di € 20000 produce un interesse di € 606,02 in 3 anni. Il tasso annuo dell'operazione è del:

- a. 2%      b. 1,5%      c. 1%      d. 0,9%

6 punti

## Sui regimi di sconto

9 Lo sconto su un capitale di € 1380 che scade tra 10 mesi, al tasso di sconto commerciale del 3% è di euro:

- a. 36      b. 35,50      c. 38      d. 34,50

5 punti

- 10** Un capitale di € 5 600 è stato scontato 3 mesi prima della scadenza con una somma di € 5565. Il tasso annuo commerciale applicato è del:  
 a. 2,5%      b. 2,8%      c. 2%      d. 3%      6 punti
- 11** Con € 7947,02 si estingue anticipatamente un debito di € 8 000 ad uno sconto semplice del 2% annuo. Il tempo di anticipazione è di circa:  
 a. 3 mesi 15 g    b. 5 mesi 15g    c. 6 mesi      d. 4 mesi      6 punti
- 12** Un debito di € 1 000 con scadenza tra 8 mesi viene pagato oggi al tasso di sconto trimestrale composto del 2%. L'importo del pagamento è di euro:  
 a. 954,16      b. 948,56      c. 972,45      d. 934,72      5 punti
- 13** Si salda oggi un debito di € 5 000 in scadenza tra 1 anno e 2 mesi versando € 4671,40; il tasso di sconto composto annuo è del:  
 a. 4%      b. 5,8%      c. 6%      d. 6,4%      6 punti

### Sui tassi equivalenti e la scindibilità

- 14** Il tasso annuo del 9% è equivalente, in capitalizzazione semplice, al tasso quadrimestrale del:  
 a. 2,5%      b. 1,5%      c. 2%      d. 3%      5 punti
- 15** Il tasso semestrale del 4%, in capitalizzazione composta, è equivalente al tasso annuo dell':  
 a. 8,2%      b. 8,16%      c. 8,14%      d. 8%      5 punti
- 16** Il tasso annuo nominale convertibile trimestralmente del 3% è equivalente al tasso trimestrale del:  
 a. 0,75%      b. 12%      c. 0,5%      d. 6%      5 punti
- 17** Il tasso quadrimestrale del 6% è equivalente, in capitalizzazione composta, al tasso mensile del:  
 a. 2%      b. 0,5%      c. 1,47%      d. 1%      6 punti
- 18** Quali tra le seguenti leggi sono scindibili?  
 a. capitalizzazione semplice      b. capitalizzazione composta  
 c. sconto commerciale      d. sconto semplice  
 e. sconto composto.      4 punti

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Totale	
Punteggio																				

Voto:  $\frac{\text{totale}}{10} + 1 =$

# Soluzioni

1 b.

4 a. ③; b. ②

7 d.

10 a.

13 c.

16 a.

2 c.

5 b.

8 c.

11 d.

14 d.

17 c.

3 a. ①; b. ③

6 a.

9 d.

12 b.

15 b.

18 b., e.