

Concetti chiave e regole

L'integrale definito e il teorema fondamentale

Data una funzione $f(x)$ continua e positiva in un intervallo $[a, b]$, si chiama **trapezoide** la parte di piano delimitata dalla curva corrispondente, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$. L'area di un trapezoide si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x) dx$$

che prende il nome di **integrale definito** della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.

- **Teorema della media.** Se $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$, esiste almeno un punto $c \in [a, b]$ per il quale vale la relazione:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$$

Considerata una funzione $f(x)$ continua in un intervallo $[a, b]$, il suo integrale calcolato fra a e un punto x variabile in $[a, b]$ è esso stesso una funzione che si chiama **funzione integrale**; tale funzione ha espressione

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{con } x \in [a, b]$$

La funzione integrale ha come proprietà che la sua derivata coincide con $f(x)$, cioè $F'(x) = f(x)$.

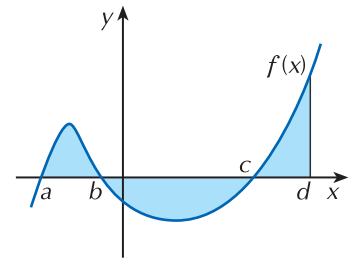
Per calcolare il valore di un integrale definito si usa la **formula di Newton-Leibniz**; se $\varphi(x)$ è una primitiva di $f(x)$, si ha che:

$$\int_a^b f(t) dt = [\varphi(x)]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Il calcolo delle aree

Per calcolare l'area di una regione finita di piano delimitata da una funzione continua $f(x)$ e dall'asse delle ascisse in un intervallo $[a, b]$ si deve calcolare l'integrale definito di $f(x)$ fra a e b quando $f(x)$ è positiva o nulla, l'opposto di questo integrale se $f(x)$ è negativa.

In pratica, si individuano gli intervalli dell'asse x nei quali la funzione $f(x)$ è positiva e quelli in cui è negativa e poi si calcolano gli integrali definiti in questi intervalli prendendoli con segno positivo quando $f(x) \geq 0$, con segno negativo quando $f(x) < 0$. Con riferimento alla figura a lato:

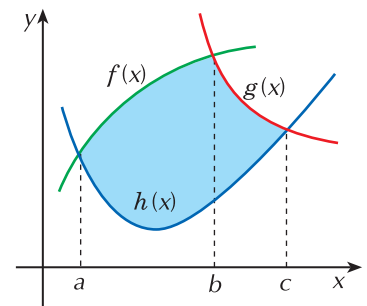


$$\int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx$$

Se la superficie di cui calcolare l'area è delimitata da più funzioni come nella figura a lato, si affrontano i seguenti passi:

- si individuano le ascisse dei punti di intersezione di ciascuna coppia di curve
- si calcolano gli integrali definiti in ciascuno degli intervalli individuati da tali punti, ad iniziare da uno di essi e percorrendo il contorno della figura in senso orario:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx + \int_c^a h(x) dx$$



Il calcolo dei volumi

Con il calcolo di un integrale definito si possono anche calcolare misure di volumi, di superfici di rotazione, di lunghezze di linee curve. Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a, b]$:

- il volume V del solido generato da $f(x)$ in una rotazione completa attorno all'asse x si calcola con la formula:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

- il volume V del solido generato da $f(x)$ in una rotazione completa attorno all'asse y si calcola con la formula:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \quad \text{oppure} \quad \pi \int_p^q [g(y)]^2 dy \quad \text{se } g(y) = f^{-1}(x) \quad \text{e } p = f(a), q = f(b)$$

Gli integrali impropri

Quando la funzione diventa infinita in uno degli estremi di integrazione oppure quando uno degli estremi è infinito si parla di **integrale improprio**:

- se $f(x)$ diventa infinita in $x = a$ e/o $x = b$, si dice che la funzione è integrabile se esistono finiti i limiti

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{a+h}^b f(x) dx \quad \lim_{k \rightarrow 0^+} \int_a^{b-k} f(x) dx$$

- se uno degli estremi di integrazione è infinito, si dice che la funzione è integrabile se esistono finiti i limiti

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

L'integrazione numerica

Quando non è possibile o non è conveniente calcolare il valore esatto dell'integrale definito di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$, se ne può calcolare un valore approssimato I procedendo in questo modo:

- si suddivide l'intervallo $[a, b]$ in un numero n di parti uguali di ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$
- si approssima la funzione f in ciascuno degli intervalli ottenuti con una funzione F
- si integra F nell'intervallo corrispondente
- si sommano i valori ottenuti.

A seconda della funzione F che si sceglie si ottengono i diversi metodi di integrazione numerica:

- con il **metodo dei rettangoli** la funzione F è una retta parallela all'asse x e si ha che:

$$I = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad \text{oppure} \quad I = h \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

- con il **metodo dei trapezi** la funzione F è la retta che passa per i punti estremi di ciascun intervallo e si ha che:

$$I = h \cdot \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right]$$

- con il **metodo delle parabole** la funzione F è la parabola che passa per i punti estremi e per il punto medio di ciascun intervallo e si ha che:

$$I = \frac{1}{3} h \cdot \left[y_0 + y_{2n} + 4 \underbrace{(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})}_{\text{ordinate dei punti di indice dispari}} + 2 \underbrace{(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})}_{\substack{\text{ordinate dei punti di indice pari} \\ \text{esclusi } y_0 \text{ e } y_{2n}}} \right]$$

L'errore

L'errore che si introduce nella valutazione dell'integrale definito della funzione $f(x)$ con ciascuno dei tre metodi di approssimazione, posto $f_M^{(k)} = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(k)}(x)|$, è:

$$\bullet E_{\text{rettangoli}} \leq \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \frac{f'_M}{2} \quad \bullet E_{\text{trapezi}} \leq \frac{(b-a)^3}{n^2} \cdot \frac{f''_M}{12} \quad \bullet E_{\text{parabole}} \leq \frac{(b-a)^5}{n^4} \cdot \frac{f^{(4)}_M}{2880}$$