APPROFONDIMENTO

Il quarto criterio

Il teorema dell'angolo esterno ci permette di dimostrare un altro criterio per stabilire la congruenza di due triangoli.

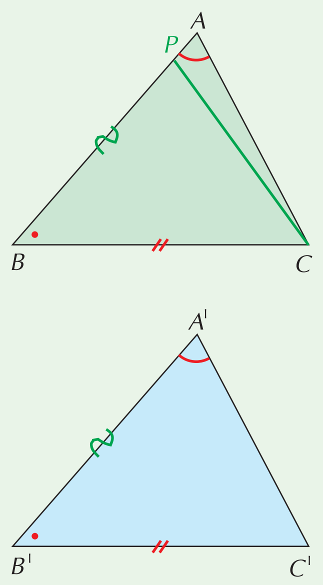
Quarto criterio di congruenza. Due triangoli sono congruenti se hanno due angoli e il lato opposto a uno di essi ordinatamente congruenti.

Hp. $\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$ **Th.** $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'}$ (***figura 1***)

$\widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'}$

$BC \cong B'C'$

Figura 1



Dimostrazione.

Procediamo per assurdo e supponiamo che i due triangoli non siano congruenti; dovrà allora essere AB non congruente ad $A'B'$ (se lo fossero i due triangoli sarebbero congruenti sia per il primo che per il secondo criterio di congruenza) e poniamo che sia $AB > A'B'$.

Esiste allora un punto P su AB tale che $PB \cong A'B'$ e se tracciamo il segmento PC, otteniamo che $\overset{\triangle}{PBC} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'}$ (primo criterio di congruenza); dalla congruenza di questi triangoli discende che $\widehat{BPC} \cong \widehat{B'A'C'}$ e poiché per ipotesi $\widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'}$, per la proprietà transitiva della congruenza si ha che $\widehat{BPC} \cong \widehat{BAC}$. Ma $\widehat{BPC}$ è l'angolo esterno del triangolo APC e quindi $\widehat{BPC} > \widehat{BAC}$.

In definitiva abbiamo concluso che: $\widehat{BPC} \cong \widehat{BAC}$ e $\widehat{BPC} > \widehat{BAC}$; poiché queste relazioni sono incompatibili, dobbiamo concludere che non può essere $AB > A'B'$. D'altra parte non possiamo concludere che $AB < A'B'$ (il punto P dovrebbe essere preso sul prolungamento di AB ed il ragionamento sarebbe analogo). Deve quindi essere $AB \cong A'B'$ e i due triangoli sono perciò congruenti.

ESERCIZI

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

Dei triangoli ABC e $A'B'C'$ si sa che hanno ordinatamente congruenti due angoli, per esempio quelli di vertici A e A', C e C', e che le bisettrici di una coppia di angoli congruenti, per esempio AD e $A'D'$, sono congruenti. Dimostra che $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'}$.

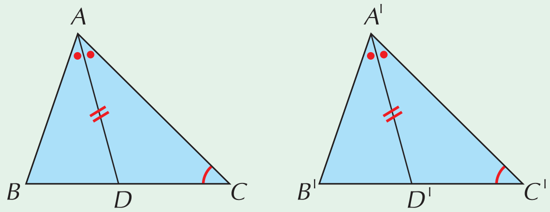
Hp. $\widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'}$

$\widehat{ACB} \cong \widehat{A'C'B'}$

$\widehat{BAD} \cong \widehat{DAC}$

$\widehat{B'A'D'} \cong \widehat{D'A'C'}$

Th. $\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$



Considera i triangoli ADC e $A'D'C'$; di essi sai che:

$AD \cong$ .... per .... $\widehat{DAC} \cong$ .... perché ....

$\widehat{ACD} \cong$ .... per .... quindi ....

In particolare $AC \cong A'C'$.

Considera adesso i triangoli ABC e $A'B'C'$; di essi sai che .... quindi ....

2 Dimostra che se due triangoli rettangoli hanno l'ipotenusa ed un angolo acuto ordinatamente congruenti, allora sono congruenti.

3 Dimostra che se due triangoli rettangoli hanno un cateto e l'angolo ad esso opposto ordinatamente congruenti, allora sono congruenti.

4 Nei triangoli ABC e $A'B'C'$ della figura a lato la mediana AM è congruente alla mediana $A'M'$ ed inoltre $\widehat{AMC} \cong \widehat{A'M'C'}$ e $\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$. Dimostra che i due triangoli sono congruenti.