Concetti chiave e regole

Le espressioni algebriche

Un'**espressione algebrica letterale** è un'espressione nella quale alcuni numeri sono rappresentati da lettere. In particolare si parla di:

- **monomi** se nell'espressione ci sono solo operazioni di moltiplicazione fra le lettere che hanno esponente intero positivo
- **polinomi** se nell'espressione, oltre alle moltiplicazioni, ci sono anche operazioni di addizione e sottrazione.

In ogni caso, sia i monomi che i polinomi non contengono operazioni di divisione fra lettere.

I monomi

Il **grado di un monomio** è la somma dei gradi delle sue lettere; se è in forma normale, il grado rispetto ad ogni sua lettera è il grado di quella lettera; tutte le lettere che non compaiono in un monomio hanno grado zero.
Diciamo poi che due monomi sono:

- **uguali** se hanno lo stesso coefficiente numerico e la stessa parte letterale: $3ab$ è uguale a $3ab$
- **opposti** se hanno la stessa parte letterale e coefficienti numerici opposti: $5x^2$ e $-5x^2$ sono opposti
- **simili** se hanno la stessa parte letterale: $2ax^2$ è simile a $-6ax^2$.

Le operazioni fra monomi

- **La somma o la differenza** fra monomi dà luogo ad un monomio solo se i monomi sono simili; la somma di monomi non simili è un polinomio:
  $2ax - 3ax = -ax$ è un monomio $\qquad$ $2a + 3b$ è un polinomio
- **il prodotto** fra monomi si può sempre eseguire applicando le proprietà delle potenze: $4ab^2 \cdot (-3abx) = -12a^2b^3x$
- **il quoziente** fra monomi dà luogo a un monomio solo se le lettere del divisore hanno una potenza minore o uguale di quelle corrispondenti del dividendo:
  $\frac{5}{2}b^3y^2z : \left(-\frac{10}{9}by\right) = -\frac{9}{4}b^2yz$ $\qquad$ $4a^3b : 2ax = 2a^2bx^{-1}$ non è un monomio

I polinomi

Il **grado di un polinomio** è il massimo dei gradi dei monomi che lo compongono; il grado rispetto a una sua lettera è il massimo dei gradi con cui quella lettera compare.
Diciamo poi che un polinomio è:

- **omogeneo** se i suoi monomi sono tutti dello stesso grado: $2x^2y - 3xy^2 + x^3 - y^3$
- **ordinato** rispetto a una sua lettera se le potenze di quella lettera sono scritte in ordine crescente o decrescente: $a^3 - 2a^2 + 1$
- **completo** rispetto ad una lettera se il polinomio contiene tutte le potenze di quella lettera, da quella più grande fino a zero: $y^3 + 5y^2 - 4y - 2$.

Le operazioni fra polinomi

Poiché in un'espressione letterale le lettere rappresentano numeri, le **operazioni fra polinomi** si eseguono tenendo presenti le proprietà delle operazioni fra numeri.

- **la somma o la differenza** fra polinomi si esegue sommando o sottraendo i monomi simili dei due polinomi; la sottrazione si può sempre trasformare in una addizione cambiando i segni dei termini del secondo polinomio:
  $(6a - 3x + 1) - (4a + 5 - x) = 6a - 3x + 1 - 4a - 5 + x = 2a - 2x - 4$
- **il prodotto fra polinomi** si esegue applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:
  $(3x - b)(1 + 2x) = 3x + 6x^2 - b - 2bx$

- il **quoziente fra un polinomio e un monomio** si esegue, quando possibile, dividendo ciascun termine del polinomio per il monomio divisore e sommando i quozienti ottenuti;
- il **quoziente fra due polinomi** non sempre dà luogo a un polinomio; per eseguire la divisione si esegue una procedura analoga a quella della divisione fra numeri.

I prodotti notevoli

Il calcolo di alcuni prodotti fra polinomi si può abbreviare tenendo conto di particolari regole:

- quadrato di un binomio: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- quadrato di un trinomio: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- cubo di un binomio: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- somma di due monomi per la loro differenza: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Il teorema del resto e la regola di Ruffini

Le divisioni di un polinomio $P(x)$ per un binomio di primo grado della forma $(x-a)$ hanno un particolare rilievo; per esse valgono i seguenti teoremi:

- **teorema del resto:** il resto della divisione di $P(x)$ per $(x-a)$ è uguale a $P(a)$.
  $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ divisore: $x - 1$ $\rightarrow$ resto: $P(1) = 3$
- **teorema di Ruffini:** un polinomio $P(x)$ è divisibile per il binomio $(x-a)$ se e solo se $P(a) = 0$.
  In questo caso a rappresenta uno **zero** del polinomio.

Il teorema di Ruffini rappresenta quindi un criterio di divisibilità di $P(x)$ per $(x-a)$.