MATEMATICA *per* TUTTI

I radicali

1 **ESERCIZIO SVOLTO**

Potenze e radici. Sappiamo che si può estrarre la radice quadrata solo di numeri *positivi o nulli* e che il risultato è un numero *positivo o nullo*. La radice cubica di un numero reale qualsiasi, invece, *esiste sempre* ed ha lo stesso segno del numero dato. Ad esempio:

- $\sqrt{25} = 5$ perché $5^2 = 25$
- $\sqrt{0} = 0$ perché $0^2 = 0$
- $\sqrt{-10}$ non ha significato in R
- $\sqrt[3]{-8} = -2$ perché $(-2)^3 = -8$
- $\sqrt[3]{\dfrac{64}{125}} = \dfrac{4}{5}$ perché $\left(\dfrac{4}{5}\right)^3 = \dfrac{64}{125}$

Nel caso di estrazione di radice quadrata o cubica di numeri che non sono quadrati perfetti si ottengono numeri irrazionali (numeri con forma decimale illimitata e non periodica), come ad esempio, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{13}$....; per essi abbiamo sempre mantenuto la scrittura con la radice piuttosto che la loro approssimazione decimale; quindi $\sqrt{5}$ invece di 2,236......

Ricordiamo che, dato un numero naturale n diverso da zero, si definisce **radicale** o **radice *n*-esima di un numero *a*** (positivo o nullo nel caso n sia pari) , quel numero b (positivo o nullo nel caso n sia pari) che elevato alla potenza n sia uguale ad a. In simboli:

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \text{equivale a} \qquad b^n = a$$

dove $n \in N - \{0\}$; a, $b \in R$ (nel caso n pari: a, $b \geq 0$).

Sappiamo che:

- n indica l'**indice** del radicale
- a è detto **argomento del radicale** o **radicando**.

Inoltre:

- se $n = 1$ l'indice di radice si omette e si pone $\sqrt[1]{a} = a$
- se $n = 2$ l'indice di radice si omette e si pone $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ detto anche **radicale quadratico**
- se $n = 3$ si ha $\sqrt[3]{a}$ detto anche **radicale cubico**
- se $n \geq 4$ si hanno radici quarte, quinte, seste....

■ Per radicali di indice dispari con radicando negativo vale la seguente proprietà:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a} \qquad \text{con } a > 0$$

Ad esempio, $\sqrt[3]{-17} = -\sqrt[3]{17}$.

2 Calcola, se esiste, il valore dei seguenti radicali:

$\sqrt{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{-9}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt[3]{-4}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt[3]{-54}$

3 **ESERCIZIO SVOLTO**

La proprietà invariantiva e la semplificazione di un radicale. La proprietà invariantiva afferma che:

- il valore di un radicale, con *radicando maggiore o uguale a zero*, non cambia se si moltiplicano l'indice e l'esponente del radicando per uno stesso numero naturale p diverso da zero, cioè:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Tale proprietà si applica **solo** su radicandi positivi o nulli. In caso di radicali di indice dispari con radicandi negativi, prima di applicare tale proprietà, dobbiamo portar fuori il segno $-$ dal simbolo di radice.

Vediamo ora degli esempi:

- $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[6]{5^4}$ i due radicali sono uguali perché abbiamo moltiplicato per 2 l'indice 3 e l'esponente 2
- $\sqrt[5]{7} = \sqrt[15]{7^3}$ i due radicali sono uguali perché abbiamo moltiplicato per 3 l'indice 5 e l'esponente 1
- $\sqrt[3]{-10} = -\sqrt[3]{10} = -\sqrt[6]{10^2}$ i due radicali sono uguali perché, dopo aver portato fuori il segno $-$, abbiamo moltiplicato per 2 l'indice 3 e l'esponente 1.

Se leggiamo da destra a sinistra la relazione individuata dalla proprietà invariantiva, possiamo dire che se l'indice della radice e l'esponente del radicando hanno un fattore comune, questo può essere semplificato.
Per esempio:

- $\sqrt[6]{7^3} = \sqrt{7}$ abbiamo diviso indice della radice ed esponente del radicando per 3
- $\sqrt[8]{4^5} = \sqrt[8]{2^{10}} = \sqrt[4]{2^5}$ abbiamo diviso indice della radice ed esponente del radicando per 2

Quando si esegue questa seconda operazione si dice che si **semplifica un radicale**. Un radicale che non si può semplificare si dice **irriducibile**; per esempio sono irriducibili i radicali $\sqrt[3]{2^4}$, $\sqrt{3^5}$.

4 Completa le seguenti uguaglianze:

$\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[6]{\cdots\cdots}$ $\quad$ $\sqrt[5]{3^3} = \sqrt[10]{\cdots\cdots}$ $\quad$ $\sqrt[7]{5^3} = \sqrt[21]{\cdots\cdots}$

$\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[\cdots]{2^9}$ $\quad$ $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[\cdots]{5^6}$ $\quad$ $\sqrt[3]{4^2} = \sqrt[\cdots]{4^{10}}$

Semplifica i seguenti radicali.

5 $\sqrt[10]{2^5}$ $\quad$ $\sqrt[8]{3^4}$ $\quad$ $\sqrt[9]{7^6}$ $\quad$ $\sqrt[12]{5^8}$

6 $\sqrt[4]{2^2 \cdot 5^8}$ $\quad$ $\sqrt[6]{3^4 \cdot 5^2}$ $\quad$ $\sqrt[4]{6^4 \cdot 3^2}$ $\quad$ $\sqrt[8]{2^{16} \cdot 3^4}$

7 $\sqrt[10]{2^5 \cdot 5^{10}}$ $\quad$ $\sqrt[16]{2^8 \cdot 7^{24}}$ $\quad$ $\sqrt[6]{216}$ $\quad$ $\sqrt[4]{576}$

8 **ESERCIZIO GUIDATO**

Semplifica i seguenti radicali:

- $\sqrt[6]{8a^3b^6}$

  Scrivi il coefficiente numerico sotto forma di potenza: ....

  Semplifica il radicale: ....

- $\sqrt[8]{a^2 - 2ab + b^2}$

  Scomponi il radicando: ....

  Semplificando ottieni: ....

9 Semplifica i seguenti radicali:

a. $\sqrt[9]{\dfrac{x^3}{27y^6}}$ **b.** $\sqrt[8]{\dfrac{25a^2b^4}{y^{16}}}$ **c.** $\sqrt[3]{y^3 + 1 + 3y^2 + 3y}$ **d.** $\sqrt{y^2 + 2y + 1}$

10 **ESERCIZIO SVOLTO**

Ricordiamo che nello studio delle operazioni con i radicali abbiamo sempre considerato radicali del tipo $\sqrt[n]{a}$ con $a \geq 0$, cioè con radicando non negativo sia nel caso n pari che n dispari. Rivediamo, ora, le operazioni di moltiplicazione e divisione di radicali.

La **moltiplicazione e la divisione** fra due radicali si può eseguire solo se i radicali hanno lo stesso indice. In questo caso il prodotto o il quoziente è un radicale che ha lo stesso indice e per radicando il prodotto o il quoziente fra i radicandi.
Per esempio:

- $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5 \cdot 3} = \sqrt{15}$
- $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{12 \cdot 18} = \sqrt[3]{(2^2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3^2)} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{6^3} = 6$
- $\sqrt{45} : \sqrt{15} = \sqrt{\dfrac{45}{15}} = \sqrt{3}$

Se i radicali non hanno lo stesso indice, occorre prima ricondurli in questa situazione applicando la proprietà invariantiva; per esempio, riduciamo i seguenti radicali allo stesso indice:

- $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{6}$; $\sqrt[4]{2}$

  l'indice comune è il *m.c.m.* fra gli indici delle tre radici, cioè nel nostro caso 12; quindi

$$\sqrt{5} = \sqrt[12]{5^6} \qquad \sqrt[3]{6} = \sqrt[12]{6^4} \qquad \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3}$$

Quando i radicali hanno lo stesso indice si può poi calcolare il loro prodotto o il loro quoziente; per esempio:

- $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{6} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{\dfrac{5^6 \cdot 6^4}{2^3}} = \sqrt[12]{\dfrac{5^6 \cdot 2^4 \cdot 3^4}{2^3}} = \sqrt[12]{5^6 \cdot 2 \cdot 3^4}$

In modo analogo calcoliamo i seguenti prodotti e quozienti:

- $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{8^3 \cdot 5^4} = \sqrt[12]{2^9 \cdot 5^4}$

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 4^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2^4} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{128}$
- $\sqrt{8} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{\dfrac{8^3}{4^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^9}{2^4}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$
- $\sqrt[3]{15} : \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{\dfrac{15^2}{3}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^2 \cdot 5^2}{3}} = \sqrt[6]{75}$

11 Riduci i seguenti radicali allo stesso indice:

a. $\sqrt[4]{3}$ e $\sqrt[3]{2}$ **b.** $\sqrt{7}$ e $\sqrt[3]{5}$ **c.** $\sqrt[5]{4}$ e $\sqrt[3]{3}$

12 Esegui le operazioni indicate:

a. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{2}$ **b.** $\sqrt{\dfrac{1}{16}} \cdot \sqrt[6]{8}$ **c.** $\sqrt[3]{9} : \sqrt{6}$ **d.** $\sqrt[10]{5} \cdot \sqrt[5]{2}$

e. $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} : \sqrt[6]{3}$ **f.** $\sqrt{\dfrac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} : \sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$ **g.** $\dfrac{\sqrt[3]{2} : \sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}$ **h.** $\left(\sqrt{\dfrac{4}{5}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}\right) \cdot \sqrt[6]{\left(\dfrac{4}{5}\right)^5}$

13 **ESERCIZIO SVOLTO**

Quando si deve eseguire il prodotto di un numero k per un radicale, basta ricordare che $k = \sqrt[n]{k^n}$; per esempio:

- $2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$

Quando si esegue questa operazione di dice che **si è portato il fattore esterno sotto il simbolo di radice.**
Se il fattore esterno è un numero positivo, per portarlo sotto il simbolo di radice basta elevarlo alla potenza indicata dall'indice della radice; se è negativo, basta lasciare il segno "–" fuori dal radicale e elevare a potenza il valore assoluto del numero. Per esempio:

- $\dfrac{3}{4} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \cdot \dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{3}{8}}$
- $-\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{4}{5}} = -\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \cdot \dfrac{4}{5}} = -\sqrt{\dfrac{1}{10}}$

14 Porta sotto il simbolo di radice i fattori esterni supponendo positivi quelli letterali:

a. $4\sqrt[3]{2}$ $-2\sqrt[4]{5}$ $-\dfrac{1}{2}\sqrt{8}$ $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\dfrac{2}{9}}$

b. $a \cdot \sqrt[3]{b}$ $x \cdot \sqrt[3]{3y^2}$ $x \cdot \sqrt{x}$ $a^3 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{a^3}}$

c. $(x-1)\sqrt{6(x-1)}$ $(x-2)\sqrt{3x}$

15 **ESERCIZIO SVOLTO**

L'operazione contraria rispetto a quella del portar dentro è quella del **portar fuori un fattore dal simbolo di radice**; questa operazione si può eseguire quando l'esponente di uno dei fattori del radicando è maggiore o uguale dell'indice della radice.

Si procede cercando di riscrivere, se necessario, il radicando in modo che il fattore o i fattori da portar fuori abbiano esponente multiplo dell'indice; si applica poi la regola relativa al prodotto e alla semplificazione di radicali. Ad esempio:

- $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- $\sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{32 \cdot 4} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$
- $\sqrt{60} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 2\sqrt{15}$
- $\sqrt[3]{\dfrac{8}{25}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3}{5^2}} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{5^2}} = 2\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}$
- $\sqrt{\dfrac{x^5y^3}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{x^4 \cdot x \cdot y^2 \cdot y}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{x^4y^2}{a^2}} \cdot \sqrt{xy} = \dfrac{x^2y}{a}\sqrt{xy}$

16 **ESERCIZIO GUIDATO**

Porta fuori dal simbolo di radice tutti i possibili fattori dei seguenti radicali:

a. $\sqrt{8x^3y^2} = 2xy\sqrt{2x}$ **b.** $\sqrt{16a^5b^4} = \sqrt{2^4a^5b^4} = \ldots\ldots\ldots$

c. $\sqrt[3]{a^5b^2} = \ldots\ldots\ldots$ **d.** $\sqrt[4]{64x^5(x+y)^4} = \ldots\ldots\ldots$

17 **ESERCIZIO SVOLTO**

Per **elevare a potenza** un radicale, si eleva a quella potenza il radicando; per esempio:

- $\left(\sqrt[5]{3xy}\right)^2 = \sqrt[5]{(3xy)^2} = \sqrt[5]{9x^2y^2}$
- $\left(\sqrt{2a^2b}\right)^3 = \sqrt{(2a^2b)^3} = \sqrt{8a^6b^3}$
- $\left(\sqrt[4]{5ab}\right)^2 = \sqrt[4]{(5ab)^2} = \sqrt[2]{5ab}$

Osserviamo con attenzione l'ultimo esempio: l'indice della radice e l'esponente della potenza sono entrambi divisibili per 2; il calcolo della potenza può anche essere fatto in modo più rapido semplificando questi due numeri. Per esempio:

- $\left(\sqrt[6]{3x^2}\right)^2 = \sqrt[3]{3x^2}$
- $\left(\sqrt[8]{a^2x}\right)^4 = \sqrt{a^2x}$

Per **estrarre la radice m-esima** di un radicale di indice n, basta considerare la radice di indice $m \cdot n$, vale cioè l'uguaglianza $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$; per esempio:

- $\sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$
- $\sqrt{\sqrt[3]{64a^3}} = \sqrt[6]{2^6a^3} = \sqrt{8a} = 2\sqrt{2a}$

Se la radice più interna è moltiplicata per un fattore ad essa esterno, occorre prima trasportare sotto il simbolo di radice tale fattore; per esempio:

- $\sqrt{2\sqrt{\dfrac{1}{2}}} = \sqrt{\sqrt{\dfrac{2^2}{2}}} = \sqrt[4]{2}$
- $\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^6 \cdot \dfrac{1}{a^2}}} = \sqrt[9]{a^4}$

18 Calcola:

a. $\left(3\sqrt{2}\right)^3$ **b.** $\left(\frac{1}{3}\sqrt[4]{2}\right)^2$ **c.** $\left(y\cdot\sqrt{\frac{1}{y}}\right)^5$

d. $\sqrt{\sqrt{x^3}}$ **e.** $\frac{1}{3}\sqrt[4]{x\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}}$ **f.** $\sqrt{\frac{x-1}{a}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{x-1}}}$

19 **ESERCIZIO SVOLTO**

Due radicali che differiscono solo per un eventuale fattore esterno, mentre l'indice della radice ed il radicando sono uguali, si dicono **simili**. Sono ad esempio simili i radicali

$$\sqrt{2} \quad \text{e} \quad -3\sqrt{2}, \qquad\qquad 6\sqrt[3]{5} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\sqrt[3]{5}.$$

Si possono **calcolare la somma e la differenza di due o più radicali** solo se questi sono simili. Per esempio:

- $\sqrt[3]{5}+8\sqrt[3]{5}-10\sqrt[3]{5}=(1+8-10)\sqrt[3]{5}=-\sqrt[3]{5}$
- $-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}-\sqrt{3}=(-2+4-1)\sqrt{3}=\sqrt{3}$

Alcuni radicali che apparentemente non sembrano simili possono diventarlo quando si portano fuori dal simbolo di radice tutti i possibili fattori; per esempio:

- $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{75}=\sqrt{3\cdot 2^2}-\sqrt{3^3}+\sqrt{3\cdot 5^2}=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+5\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

20 Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a. $\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{4}-\frac{5}{4}\sqrt[3]{4}$ **b.** $3\sqrt{7}-2\sqrt[3]{2}+2\sqrt{7}-3\sqrt[3]{2}-5\sqrt{7}$

c. $\sqrt{54}-\sqrt{32}-\sqrt{150}+\sqrt{18}$ **d.** $\left(\sqrt{3}-2\right)^2+\left(2\sqrt{3}+1\right)^2$

21 **ESERCIZIO SVOLTO**

Razionalizzare il denominatore di una frazione significa scriverne una ad essa equivalente ma nel cui denominatore non compaiono radicali. Per eseguire l'operazione di razionalizzazione si deve applicare la proprietà invariantiva della divisione e moltiplicare quindi numeratore e denominatore della frazione per un opportuno **fattore razionalizzante**.
Per esempio:

- $\frac{1}{\sqrt{5}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt{5}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt[3]{2^2}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
- $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; in questo modo si ottiene al denominatore una differenza di quadrati che elimina i due radicali

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{6\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2}=2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$$

22 Razionalizza il denominatore delle seguenti frazioni:

a. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **b.** $\dfrac{9x}{\sqrt{3x}}$ **c.** $\dfrac{2a}{\sqrt[4]{a^3b}}$

d. $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ **e.** $\dfrac{14}{3-\sqrt{2}}$ **f.** $\dfrac{4}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$

23 **ESERCIZIO SVOLTO**

Ricordiamo che possiamo attribuire un significato alle potenze dei numeri reali con esponente razionale mediante la relazione

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{dove } a > 0, \quad n \in N - \{0\}, \quad m \in N$$

Per esempio:

- $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
- $2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$
- $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3}$

Per le operazioni con le potenze ad esponente frazionario valgono proprietà analoghe a quelle che già conosci per le potenze ad esponente intero; per esempio:

- $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}}$
- $5^{\frac{3}{2}} : 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}} = 5^{\frac{5}{4}}$
- $\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}} = 3^{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}} = 3^{\frac{5}{6}}$

Inoltre l'analogia che abbiamo stabilito fra radicali e potenze ad esponente frazionario, ci permette di operare con i numeri scritti nell'una o nell'altra forma a seconda della convenienza del calcolo; per esempio:

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} : \sqrt[6]{32} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} : 2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$
- $(\sqrt{2}+1)^{\frac{2}{3}} \cdot (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1} = \sqrt[6]{(\sqrt{2}+1)^4(\sqrt{2}-1)^3} = \sqrt[6]{(\sqrt{2}+1)^3(\sqrt{2}-1)^3 \cdot (\sqrt{2}+1)} =$

  $= \sqrt[6]{\left[(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\right]^3 \cdot (\sqrt{2}+1)} = \sqrt[6]{(2-1)^3(\sqrt{2}+1)} = \sqrt[6]{\sqrt{2}+1}$

24 Calcola nel modo che ritieni più opportuno:

a. $3^{-\frac{5}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{4}}$ **b.** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}} : \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\right]^{-2}$

c. $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{25} : \left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{5}} \cdot \sqrt[6]{125}\right)^2$ **d.** $(2-\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}(2+\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} - 1$

Risultati di alcuni esercizi.

2. $\pm\frac{1}{2}$; non esiste; $+\frac{1}{3}$; -2; ± 5; 2; non esiste; $-\sqrt[3]{4}$; ± 6; $-3\sqrt[3]{2}$

4. $\sqrt[6]{2^4}$; $\sqrt[10]{3^6}$; $\sqrt[21]{5^9}$; $\sqrt[12]{2^9}$; $\sqrt[9]{5^6}$; $\sqrt[15]{4^{10}}$

5. $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{49}$; $\sqrt[3]{25}$

6. $\sqrt{1\,250}$; $\sqrt[3]{45}$; $\sqrt{108}$; $\sqrt{48}$

7. $\sqrt{50}$; $\sqrt{686}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{24}$

8. $\sqrt{2ab^2}$; $\sqrt[4]{a-b}$

9. **a.** $\sqrt{\frac{x}{3y^2}}$; **b.** $\sqrt[4]{\frac{5ab^2}{y^8}}$; **c.** $y+1$; **d.** $y+1$

11. **a.** $\sqrt[12]{27}$ e $\sqrt[12]{16}$; **b.** $\sqrt[6]{343}$ e $\sqrt[6]{25}$; **c.** $\sqrt[15]{64}$ e $\sqrt[15]{243}$

12. **a.** $\sqrt[12]{2^{11}}$; **b.** $\sqrt{\frac{1}{8}}$; **c.** $\sqrt[6]{\frac{3}{8}}$; **d.** $\sqrt[10]{20}$; **e.** $\sqrt[3]{9}$ **f.** $\sqrt[12]{\frac{2^7}{3^7}}$; **g.** $\sqrt[12]{\frac{27}{4}}$; **h.** $\frac{4}{5}$

14. **a.** $\sqrt[3]{2^7}$; $-\sqrt[4]{80}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{\frac{3}{32}}$;

b. $\sqrt[3]{a^3b}$; $\sqrt[3]{3x^3y^2}$; $\sqrt{x^3}$; $\sqrt{a^3}$;

c. $\sqrt{6(x-1)^3}$; $\sqrt{3x(x-2)^2}$

16. **b.** $4a^2b^2\cdot\sqrt{a}$; **c.** $a\cdot\sqrt[3]{a^2b^2}$; **d.** $2x(x+y)\cdot\sqrt[4]{4x}$

18. **a.** $54\sqrt{2}$; **b.** $\frac{1}{9}\sqrt{2}$; **c.** $y^2\cdot\sqrt{y}$; **d.** $\sqrt[4]{x^3}$; **e.** $\frac{1}{3}\sqrt[8]{x}$ **f.** $\sqrt[3]{\frac{x-1}{a}}$

20. **a.** $\frac{9}{4}\sqrt[3]{4}$; **b.** $-5\sqrt[3]{2}$; **c.** $-2\sqrt{6}-\sqrt{2}$; **d.** 20

22. **a.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$; **b.** $3\sqrt{3x}$; **c.** $\frac{2\sqrt[4]{ab^3}}{a^2b}$; **d.** $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}$; **e.** $2(3+\sqrt{2})$; **f.** $2(2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4})$

24. **a.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{4}}$; **b.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{21}{2}}$; **c.** $5^{\frac{7}{12}}$; **d.** 0