Concetti chiave e regole

Le equazioni di secondo grado

Un'equazione di secondo grado si può sempre ricondurre alla sua forma normale $ax^2 + bx + c = 0$ nella quale deve essere $a \neq 0$. Se i coefficienti b o c sono nulli l'equazione si dice incompleta e le sue soluzioni si trovano applicando la legge di annullamento del prodotto oppure la definizione di radicale:

- $ax^2 + bx = 0 \quad \rightarrow \quad x(ax + b) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = -\dfrac{b}{a}$
- $ax^2 + c = 0 \quad \rightarrow$ è riconducibile alla forma $x^2 = k$ che ha soluzioni $\begin{cases} x = \pm\sqrt{k} & \text{se } k > 0 \\ \varnothing & \text{se } k < 0 \end{cases}$
- $ax^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

Le soluzioni dell'equazione completa si trovano applicando la formula $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

nella quale l'espressione $b^2 - 4ac$ si chiama **discriminante** e si indica con il simbolo Δ,

oppure la formula ridotta se b è pari. Ponendo $b = 2\beta$, quindi $\beta = \dfrac{b}{2}$, si ha $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$

In base al valore del discriminante l'equazione:

- ammette due soluzioni reali e distinte se $\Delta > 0$
- ammette due soluzioni reali coincidenti se $\Delta = 0$
- non ha soluzioni reali se $\Delta < 0$.

Nelle **equazioni di secondo grado frazionarie**:

- si determina il dominio ponendo i denominatori diversi da zero;
- si riconducono entrambi i membri allo stesso denominatore per rendere l'equazione intera;
- si risolve l'equazione e si controlla l'accettabilità delle soluzioni.

Relazioni fra coefficienti e soluzioni

Fra le soluzioni x_1 e x_2 di un'equazione di secondo grado ed i suoi coefficienti sussistono le seguenti relazioni:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Mediante la loro applicazione è possibile:

- trovare due numeri conoscendo la loro somma s ed il loro prodotto p risolvendo l'equazione:
  $x^2 - sx + p = 0$
- scomporre il trinomio $ax^2 + bx + c$ con la formula: $\quad a(x - x_1)(x - x_2)$.

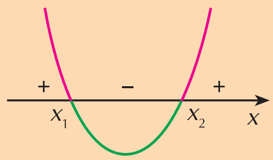
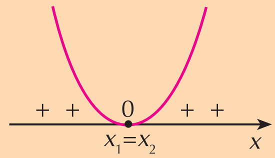
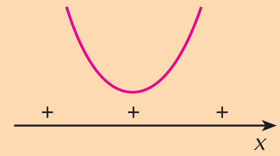
L'interpretazione grafica

Ad ogni equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ si può associare la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$. Le soluzioni dell'equazione, se esistono reali, rappresentano, dal punto di vista grafico, le ascisse dei punti di intersezione della parabola con l'asse x, sono cioè gli **zeri** della funzione.

Le disequazioni di secondo grado

Il segno di un trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$ al variare di x in R si può individuare mediante la rappresentazione grafica della parabola $y = ax^2 + bx + c$ ad esso associata individuando la sua posizione relativamente all'asse delle ascisse:

Supponendo $a > 0$, si possono presentare 3 casi a seconda del valore di Δ:

	Caso $\Delta > 0$	Caso $\Delta = 0$	Caso $\Delta < 0$
se $a > 0$			

Si possono sfruttare queste considerazioni per risolvere una disequazione di secondo grado $ax^2 + bx + c \gtrless 0$ dove si può sempre supporre che sia $a > 0$:

- se $\Delta > 0$ il trinomio è positivo per valori esterni all'intervallo delle radici, è negativo per valori compresi
- se $\Delta = 0$ il trinomio è positivo per ogni $x \in R$ escluso il punto in cui il trinomio si annulla
- se $\Delta < 0$ il trinomio è sempre positivo.

Le disequazioni frazionarie e i sistemi di disequazioni

- Per risolvere una **disequazione frazionaria** della forma $\dfrac{A(x)}{B(x)} \gtreqless 0$

  si devono studiare i segni dei polinomi $A(x)$ e $B(x)$, riportare le variazioni di segno in una tabella e da essa dedurre il segno della frazione.
- Per risolvere un **sistema di disequazioni** si risolvono tutte le disequazioni del sistema separatamente, si costruisce una tabella delle soluzioni di tutte le disequazioni e si considerano solo gli intervalli dove tutte le disequazioni sono verificate. Si determina cioè l'intersezione delle soluzioni.

Equazioni e disequazioni con i moduli

Per risolvere un'equazione o una disequazione che contiene un modulo è necessario individuare quando il suo argomento è positivo e quando è negativo. In particolare, se k è un numero reale:

- $|f(x)| = k$ è equivalente a $f(x) = -k \vee f(x) = k$ se $k \geq 0$, non ha soluzione se $k < 0$
- $|f(x)| > k$ è equivalente a $f(x) < -k \vee f(x) > k$ se $k > 0$, R se $k < 0$
- $|f(x)| < k$ è equivalente al sistema $\begin{cases} f(x) > -k \\ f(x) < k \end{cases}$ se $k > 0$, non ha soluzioni se $k < 0$

Sistemi non lineari

Un sistema è non lineare se almeno una delle sue equazioni è di grado superiore al primo. In particolare:

- in un **sistema di secondo grado** tutte le equazioni sono di primo grado tranne una che è di secondo.

Per risolvere un sistema non lineare si applicano i due principi di sostituzione e/o di riduzione; se il sistema è di secondo grado conviene ricavare l'espressione di una variabile da una delle equazioni di primo grado e sostituire in tutte le altre.